Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ваколбингер, В. А. Ватулин, Ветвящиеся процессы в пространстве с долго живущими частицами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 655–671

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:49:13

© 1998 г. ВАКОЛБИНГЕР А.**, ВАТУТИН В. А.*

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ
С ДОЛГО ЖИВУЩИМИ ЧАСТИЦАМИ¹⁾

Рассматриваются критические ветвящиеся процессы в $\mathbf{R}^d$, частицы которых перемещаются в пространстве в соответствии с устойчивым распределением с параметром α , размножаются в соответствии с устойчивым распределением с параметром $(1 + \beta)$, и хвосты распределений, длительности жизни которых правильно меняются с параметром $\gamma \leq 1$. Показано, что если начальная конфигурация частиц имеет пуассоновское распределение в $\mathbf{R}^d$, то при стремлении временного параметра t к бесконечности процесс локально вырождается, если $d < \alpha\gamma/\beta$; сходится к пуассоновскому пределу полной интенсивности, если $d > \alpha\gamma/\beta$; и сходится по некоторой подпоследовательности к нетривиальному пределу при $d = \alpha\gamma/\beta$. Установлено также, что если распределение длительности жизни частиц нерешетчато и имеет конечное математическое ожидание, то при $t \rightarrow \infty$ процесс сходится к нетривиальному пределу полной интенсивности при $d > \alpha/\beta$ и локально вырождается в противном случае.

Ключевые слова и фразы: вырождение, выживание, устойчивые распределения, правильно меняющиеся функции, уравнения восстановления.

1. Введение

Известно, что в популяциях критических ветвящихся процессов «быстрое» разбегание частиц способствует возникновению равновесных состояний, в то время как «тяжелые» хвосты распределений числа потомков ведут к образованию кластеров частиц, что благоприятствует локальному вырождению процессов. Такое явление описано, например, для так называемых (d, α, β) -ветвящихся популяций, в которых индивидуумы перемещаются в $\mathbf{R}^d$ согласно симметричному устойчивому процессу с параметром α , дают потомство в соответствии с производящей

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

**Fachbereich Mathematik (12), J. W. Göthe Universität, D-60054 Frankfurt am Main, Germany.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00338, 96-15-96092, ИНТАС-РФФИ 95-0099 и Немецкого научного фонда.

функцией

$$f(s) = \mathbb{E}s^\xi = s + c(1-s)^{1+\beta}, \quad (1)$$

и длительности жизни которых имеют экспоненциальное распределение. В таких популяциях мобильность частиц увеличивается с ростом α , а рост β ведет к уменьшению интенсивности образования кластеров. Как установлено в [3], граница между локальным вырождением и выживанием (persistence), т.е. сходимостью к стационарному распределению с сохранением интенсивности, задается соотношением $d = \alpha/\beta$ и, более того, система частиц локально вырождается в $\mathbf{R}^d$, если указанное соотношение между размерностью пространства и оставшимися параметрами процесса выполнено.

В настоящей статье, в дополнение к двум противодействующим тенденциям мобильности и возникновения кластеров, мы исследуем влияние третьего параметра, а именно, распределения длительности жизни частиц. Интуитивно ясно, что увеличение продолжительности жизни частиц способствует «разбеганию» потомков и, следовательно, препятствует локальному вырождению. Для того чтобы придать этим аргументам строгое обоснование, предположим, что распределение длительности жизни частиц Γ удовлетворяет, для некоторого $\gamma \in (0, 1]$, соотношению

$$1 - \Gamma(t) \sim c_1 t^{-\gamma}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Мы покажем, что в такой ситуации граница между локальным вырождением и выживанием задается соотношением $d = \alpha\gamma/\beta$.

Оказывается, что для $d > \alpha\gamma/\beta$ пределы являются пуассоновскими случайными полями полной интенсивности (теорема 2а). Этот факт уже был установлен в работе [10], где использовано явное представление распределения Пальма через обращенное генеалогическое дерево, и показано, что при $t \rightarrow \infty$ случайно выбранный индивидум не имеет вокруг себя родственников в любой ограниченной окрестности. Последнее является характерным для пуассоновских популяций. В данной статье мы даем другое доказательство упомянутого результата, анализируя уравнение восстановления для преобразования Лалласа мер, соответствующих изучаемой популяции размножающихся частиц.

Используя безграничную делимость распределения популяций и возможность изменения «масштаба» для процесса перемещения частиц, мы показываем в теореме 2б, что (как и предполагалось в [10]) при $d < \alpha\gamma/\beta$ популяция локально вырождается при $t \rightarrow \infty$. Однако при $d = \alpha\gamma/\beta$ анализируемая система частиц сходится (при $t \rightarrow \infty$ по некоторой подпоследовательности) к нетривиальному пределу (теорема 2в), что опровергает соответствующую гипотезу из [10]. Это явление не имеет аналогов в классических ситуациях (с конечным средним длительности жизни частиц), в которых популяции локально вырождаются для критических размерностей. Следует заметить, что вопрос о структуре предельного

поля и, в частности, о том, является ли предел единственным и, если да, то имеет ли предельное поле полную интенсивность, остался открытым.

Наконец, в теореме 1 мы исследуем случай, когда длительность жизни частиц имеет произвольное нерешетчатое распределение с конечным средним. Мы доказываем, при помощи сравнительно кратких аналитических выкладок, что популяция частиц выживает при $d > \alpha/\beta$ и локально вырождается при $d \leq \alpha/\beta$. Этот результат был ранее установлен при помощи более сложных рассуждений в следующих частных случаях: в [3] для экспоненциального распределения длительности жизни частиц, и в [9] для произвольного распределения длительности жизни частиц и $\alpha = 2$.

Для простоты мы ограничиваемся ситуацией, когда начальная популяция частиц является однородным пуассоновским полем и состоит только из «новорожденных» частиц, хотя наши результаты могут быть распространены, например, на случай произвольных (но одинаково распределенных) оставшихся длительностей жизней первоначальных частиц, а также на более широкий класс распределений частиц в пространстве.

Методы нашей работы позволяют исследовать случай решетчатого распределения Γ , но мы не будем касаться этой ситуации, чтобы избежать почти дословных повторений доказательств.

2. Модель и основные результаты

Рассмотрим следующую модель ветвящегося процесса в $\mathbf{R}^d$. В фиксированный момент времени каждый индивидуум (частица) характеризуется положением $x \in \mathbf{R}^d$, возрастом θ и оставшимся временем жизни τ . Частицы перемещаются в соответствии с симметричным устойчивым процессом с параметром $\alpha \in]0, 2]$. В момент гибели индивидуум производит, независимо от всех других индивидуумов, случайное число ξ новых частиц, которые перемещаются в пространстве независимо друг от друга, стартуя из точки гибели частицы-родителя. Предполагается, что случайная величина ξ имеет распределение, задаваемое производящей функцией (1) с $\beta \in (0, 1]$ и $c \in (0, 1/(1+\beta))$. Таким образом, $E\xi = 1$, т.е., мы рассматриваем критический процесс. Предполагается, что длительность жизни σ каждого индивидуума имеет распределение Γ с носителем на $\mathbf{R}_+$, а процесс начинается с частиц нулевого возраста, распределенных в пространстве в соответствии с пуассоновским точечным полем, имеющим лебегову меру интенсивности λ на $\mathbf{R}^d$. Мы рассматриваем два случая:

Случай А: Γ является нерешетчатым распределением со средним

$$\mu = E\sigma < \infty. \quad (3)$$

Случай Б: Γ является нерешетчатым распределением, удовлетворя-

ющим при некотором $\gamma \in (0, 1]$ условию (2).

Через $\mathcal{X}_t$ будем обозначать считающую случайную меру, описывающую положение частиц в момент t . Под сходимостью считающих мер в $\mathbf{R}^d$ мы будем понимать сходимость в слабой топологии, порожденной отображением $\eta \mapsto \int \phi d\eta$, где η — мера на $\mathbf{R}^d$, а ϕ — непрерывная функция с компактным носителем. Здесь и далее символ $\int$ обозначает $\int_{\mathbf{R}^d}$.

Теорема 1. В случае А:

а) если $d > \alpha/\beta$, то $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению при $t \rightarrow \infty$ к пуассоновской популяции, интенсивность которой есть мера Лебега;

б) если $d \leq \alpha/\beta$, то $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению при $t \rightarrow \infty$ к вырожденной популяции.

Теорема 2. В случае Б:

а) если $d > \alpha\gamma/\beta$, то $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению при $t \rightarrow \infty$ к пуассоновской популяции, интенсивность которой есть мера Лебега;

б) если $d < \alpha\gamma/\beta$, то $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению при $t \rightarrow \infty$ к вырожденной популяции;

в) если $d = \alpha\gamma/\beta$, то $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению (при $t \rightarrow \infty$ вдоль некоторой подпоследовательности) к нетривиальному пределу.

Краткий план доказательства теорем 1 и 2 выглядит следующим образом.

Пусть $\mathcal{Z}_t$ — целочисленная случайная мера на $\mathbf{R}^d$, которая описывает положение частиц в популяции в момент t , начавшейся с одной частицы в нулевой момент. Поскольку исходная популяция $\mathcal{X}_0$ является пуассоновской, а ветвление различных частиц происходит независимо, мера $\mathcal{X}_t$ безгранично делима и имеет преобразование Лапласа (см., например, [8, 1.4.7]).

$$\mathbf{E} \exp \left(- \int \phi d\mathcal{X}_t \right) = \exp \left(- \int \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^0 \left(1 - \exp \left(- \int \phi d\mathcal{Z}_t \right) \right) \lambda(dx) \right).$$

Здесь $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^0(\mathcal{Z}_t \in \cdot)$ обозначает распределение положения частиц в популяции, начавшейся из одной частицы, имевшей в момент 0 нулевой возраст и находившейся в точке $\mathbf{x}$. Символ ϕ обозначает неотрицательную непрерывную функцию на $\mathbf{R}^d$ с ограниченным непустым носителем.

В силу критичности ветвления частиц и однородности их движения $\mathbf{E}\mathcal{X}_t \equiv \lambda$ и, следовательно, случайные популяции $\mathcal{X}_t$ плотны (см., [6, лемма 4.5]). Поэтому сходимость $\int \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^0(1 - \exp(-\int \phi d\mathcal{Z}_t))\lambda(dx)$ к некоторому пределу $G(\phi)$ влечет (см., например, [6, с. 32]) сходимость по распределению случайных мер $\mathcal{X}_t$ к некоторой случайной мере $\mathcal{X}_{\infty}$, удовлетворяющей соотношению

$$\mathbf{E} \exp \left(- \int \phi d\mathcal{X}_{\infty} \right) = \exp \left(- G(\phi) \right).$$

Мы покажем, что пределы $G(\phi)$ действительно существуют (в условиях теоремы 2в для некоторой подпоследовательности $t \rightarrow \infty$) и, кроме того,

1. $G(\phi)$ равны нулю в предположениях теорем 2в и 1б (см., раздел 4 и теорему 5);

2. В условиях теоремы 1а

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(\varepsilon \phi) = \int \phi d\lambda$$

(см., теорему 4);

3. В условиях теоремы 2а

$$G(\phi) = \int \left(1 - \exp(-\phi(x)) \right) \lambda(dx),$$

(см., лемму 6), и, таким образом (см., [6, с. 16]), $G(\phi)$ является преобразованием Лапласа пуассоновской популяции с интенсивностью равной мере Лебега, причем

4. В предположениях теоремы 2в, $G(\phi) > 0$ (см., лемму 6 и теорему 3).

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе мы не используем предположение (1) о форме производящей функции числа непосредственных потомков; все что нам необходимо — это условие критичности ветвления $E\xi = 1$.

Начнем с некоторых предварительных утверждений. Для удобства будем обозначать через K , K_i , $i = 1, 2, \dots$ некоторые положительные константы, быть может разные в разных формулах.

Будем использовать обозначение $P_x^\theta(\mathcal{Z}_t \in \cdot)$ для распределения меры $\mathcal{Z}_t$ при условии, что исходная частица-предок находилась в нулевой момент времени в точке x и имела возраст θ . Для упрощения будем писать P_x вместо P_x^0 .

Лемма 1. Для любого шара $B \in \mathbf{R}^d$ найдется константа $K = K(B)$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}^d$, $\theta \geq 0$ и $t \geq 1$

$$P_x^\theta\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \leq K t^{-d/\alpha}. \quad (4)$$

Доказательство. Легко понять, что

$$P_x^\theta\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \leq E_x^\theta \mathcal{Z}_t(B),$$

где символ E_x^θ — математическое ожидание относительно меры P_x^θ . Обозначим через Γ_θ условное распределение времени жизни частицы при условии, что время ее жизни не меньше θ . Пусть, далее W_t^x — положение в момент t симметричного устойчивого процесса с параметром α ,

стартового в момент нуль в точке x . Используя стандартные аргументы, имеем

$$\begin{aligned} E_x^\theta \mathcal{Z}_t(B) &= (1 - \Gamma_\theta(t)) P\{W_t^x \in B\} \\ &+ \int_0^t d\Gamma_\theta(u) E_x^{u,*} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{j=1}^{Z^i(t-u)} I(W_u^x + W_{t-u}^{i,j,W_u^x} \in B), \quad (5) \end{aligned}$$

где $Z^i(t-u)$ равно числу частиц, существующих в момент t и принадлежащих к популяции, начавшейся в момент u с i -го потомка частицы-родителя, W_u^x — положение частицы-родителя в момент гибели и, наконец, W_{t-u}^{i,j,W_u^x} — отклонение (относительно точки гибели первоначальной частицы) положения j -й частицы i -го непосредственного потомка первоначальной частицы из числа существующих процессе в момент t . Математическое ожидание $E_x^{u,*}$ взято при условии, что исходная частица погибла в момент u , и при этом в нулевой момент она находилась в точке x , а $I(A)$ обозначает индикатор события A . Критичность процесса ветвления и независимость перемещений и длительностей жизни различных частиц позволяют записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} E_x^{u,*} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{j=1}^{Z^i(t-u)} I(W_u^x + W_{t-u}^{i,j,W_u^x} \in B) &= P\{W_u^x + W_{t-u}^{W_u^x} \in B\} \\ &= P\{W_t^x \in B\}. \end{aligned}$$

Используя это равенство в (5), получаем:

$$E_x^\theta \mathcal{Z}_t(B) = P\{W_t^x \in B\} \leq K t^{-d/\alpha}, \quad (6)$$

где последняя оценка следует из предложения 4.2 работы [4]. Лемма доказана.

Обозначим через $F(t; s) = E s^{Z(t)}$ производящую функцию числа частиц $Z(t)$ в процессе в момент t , если в нулевой момент в процессе была одна частица нулевого возраста, и пусть $Q(t; s) = 1 - F(t; s)$. Положим также

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^{*i}(t).$$

Лемма 2. Для любого $s \in (0, 1]$

$$Q(t; s) \leq \left(\frac{1-s}{cU(t)} \right)^{1/(1+\beta)}, \quad (7)$$

где константа c та же, что и в (1).

Доказательство. Имеем (см., например, [5])

$$F(t; s) = s(1 - \Gamma(t)) + \int_0^t f(F(t-u; s)) d\Gamma(u)$$

или

$$Q(t; s) = (1-s)(1-\Gamma(t)) + \int_0^t Q(t-u; s) d\Gamma(u) - c \int_0^t (Q(t-u; s))^{1+\beta} d\Gamma(u).$$

Решая это уравнение восстановления относительно $Q(t; s)$, получим (см., [2, гл. XI, § 1])

$$Q(t; s) = (1-s) - c \int_0^t (Q(t-u; s))^{1+\beta} dU(u) \geq 0.$$

Известно [1], что для критического ветвящегося процесса функция $Q(t; s)$ монотонно убывает по t для любого фиксированного $s \in [0, 1]$. Следовательно,

$$c(Q(t; s))^{1+\beta} U(t) \leq \int_0^t c(Q(t-u; s))^{1+\beta} dU(u) \leq (1-s).$$

Отсюда нетрудно вывести утверждение леммы.

Лемма 3. Для любого шара B в $\mathbf{R}^d$ и $u \in [0, t - K^{\alpha/d} - 1]$

$$\mathbf{P}_x\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \leq Q(u; 1 - K(t-u)^{-d/\alpha}),$$

где константа $K = K(B)$ такая же как и в (4).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_x\{Z(u) = k, \mathcal{Z}_t(B) > 0\} \\ &= \mathbf{P}\{Z(t) > 0\} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_x\{Z(t) = k; \mathcal{Z}_t(B) = 0\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Предполагая, что $Z(u) = k$, обозначим через $\Theta_k = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ и $\mathbf{Y}_k = (y_1, \dots, y_k)$ возраст и положение частиц, существующих в момент u . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\{\mathcal{Z}_t(B) = 0 \mid Z(u) = k\} \\ = \mathbf{E}_x\left(\mathbf{P}_x\{\mathcal{Z}_t(B) = 0 \mid Z(u) = k; \Theta_k, \mathbf{Y}_k\}; Z(u) = k\right). \end{aligned}$$

При фиксированных Θ_k и $\mathbf{Y}_k$ эволюции отдельных частиц независимы. Это обстоятельство, в сочетании с (4) и неравенством $K(t-u)^{-d/\alpha} < 1$,

приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) = 0 \mid Z(u) = k; \Theta_k, \mathbf{Y}_k\} \\ &= \prod_{j=1}^k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_j}^{\theta_j}\{\mathcal{Z}_{t-u}^j(B) = 0\} = \prod_{j=1}^k \left(1 - \mathbf{P}_{\mathbf{y}_j}^{\theta_j}\{\mathcal{Z}_{t-u}^j(B) > 0\}\right) \\ &\geq \prod_{j=1}^k (1 - K(t-u)^{-d/\alpha}) = (1 - K(t-u)^{-d/\alpha})^k. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{Z}_{t-u}^j(B)$ обозначает число частиц в шаре B в момент t , которые являются потомками j -й частицы из числа существующих в момент u . Следовательно,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) = 0; Z(u) = k\} \geq (1 - K(t-u)^{-d/\alpha})^k \mathbf{P}\{Z(u) = k\}.$$

Подставляя эту оценку в (8), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1 - K(t-u)^{-d/\alpha})^k\right) \mathbf{P}\{Z(u) = k\} \\ &= Q(u; 1 - K(t-u)^{-d/\alpha}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для фиксированного N положим $C(t, N) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d: \|\mathbf{x}\| \leq Nt^{1/\alpha}\}$.

Лемма 4. Пусть B — шар в $\mathbf{R}^d$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $t \geq 1$

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus C(t, N)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \lambda(d\mathbf{x}) \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \leq \mathbf{E}_{\mathbf{x}}\mathcal{Z}_t(B)$. Обозначим через $W_t^{j, \mathbf{x}}$ положение j -й частицы из числа существующих в момент t . В силу критичности процесса

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}}\mathcal{Z}_t(B) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{Z(t)} I(W_t^{j, \mathbf{x}} \in B) = \mathbf{P}\{W_t^{\mathbf{x}} \in B\} = \mathbf{P}\{W_t^0 \in B - \mathbf{x}\}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что B является шаром радиуса, скажем, r с центром в начале координат. Используя этот факт и принимая во внимание ограничения на область интегрирования в равенстве

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus C(t, N)} \mathbf{P}\{W_t^0 \in B - \mathbf{x}\} \lambda(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus C(t, N)} \lambda(d\mathbf{x}) \int_{B - \mathbf{x}} \mathbf{P}\{W_t^0 \in dy\},$$

получаем, что $\|\mathbf{y}\| > Nt^{1/\alpha} - r$. Отсюда, меняя порядок интегрирования, выводим, что повторный интеграл можно оценить снизу величиной

$$\int_{\|\mathbf{y}\| > Nt^{1/\alpha} - r} \mathbf{P}\{W_t^0 \in d\mathbf{y}\} \int_{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq r} \lambda(d\mathbf{x}).$$

Взяв $N \geq 2r$ и $t \geq 1$ и обозначая через c_r внутренний интеграл (который не зависит от $\mathbf{y}$), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d \setminus C(t, N)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \lambda(d\mathbf{x}) &\leq c_r \mathbf{P}\left\{\|W_t^0\| \geq \frac{N}{2}t^{1/\alpha}\right\} \\ &= c_r \mathbf{P}\left\{\|W_1^0\| \geq \frac{N}{2}\right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Как следует из леммы [4], для любого t и любого шара B из $\mathbf{R}^d$

$$\int \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \lambda(d\mathbf{x}) < \infty.$$

Обозначим через $\phi(\mathbf{x})$ неотрицательную ограниченную борелевскую функцию, определенную на $\mathbf{R}^d$ и имеющую ограниченный носитель. Положим

$$v(t, \mathbf{x}) = v_\phi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \left(1 - \exp \left\{ - \int \phi d\mathcal{Z}_t \right\} \right) \quad (9)$$

(напомним, что математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathbf{x}} := \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^0$ берется при условии, что первоначально популяция состояла из единственной частицы нулевого возраста, находившейся в точке $\mathbf{x}$). Опираясь на теорему восстановления, можно показать, что

$$\begin{aligned} v(t, \mathbf{x}) &= (1 - \Gamma(t)) \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \left(1 - e^{-\phi(W_t)} \right) \\ &\quad + \int_0^t d\Gamma(u) \int \left(1 - F(1 - v(t-u, \mathbf{y})) \right) dH_u^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $H_u^\alpha(\cdot, \mathbf{x})$ — распределение симметричного устойчивого процесса W порядка α в $\mathbf{R}^d$ в момент u , который стартовал из точки $\mathbf{x}$ в нулевой момент времени. Пусть

$$v(t) = v_\phi(t) = \int v(t, \mathbf{x}) \lambda(d\mathbf{x}).$$

Заметим, что $v(t) < \infty$ ввиду замечания 1 и неравенства

$$v(t) \leq \int \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{Z}_t(B) > 0\} \lambda(d\mathbf{x}), \quad (11)$$

в котором B — шар с центром в нуле, содержащий носитель ϕ . Интегрируя (10) по мере Лебега в $\mathbf{R}^d$ и обозначая

$$b(\phi) = \int \left(1 - e^{-\phi(\mathbf{x})}\right) \lambda(d\mathbf{x}),$$

получаем

$$v(t) = (1 - \Gamma(t)) b(\phi) + \int_0^t d\Gamma(u) \int \left(1 - f(1 - v(t - u, \mathbf{y}))\right) \lambda(d\mathbf{y}). \quad (12)$$

Положим

$$\Phi(z) = f(1 - z) - (1 - z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &= (1 - \Gamma(t)) b(\phi) + \int_0^t v(t - u) d\Gamma(u) \\ &\quad - \int_0^t d\Gamma(u) \int \Phi(v(t - u, \mathbf{y})) \lambda(d\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя обозначение

$$g(t) = g_\phi(t) = \int \Phi(v_\phi(t, \mathbf{y})) \lambda(d\mathbf{y}) \quad (14)$$

и решая уравнение восстановления (13) относительно $v(t)$, находим:

$$v(t) = b(\phi) - \int_0^t g(t - u) dU(u). \quad (15)$$

4. Случай Б: малые размерности

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 26. Вспоминая определение (9) и результаты, установленные в конце разд. 2, мы видим, что осталось лишь установить справедливость соотношения

$$v_\phi(t) = \int v_\phi(t, \mathbf{x}) \lambda(d\mathbf{x}) \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (16)$$

для любой неотрицательной непрерывной функции ϕ на $\mathbf{R}^d$ с ограниченным носителем. В силу (11) соотношение (16) немедленно вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5. Если выполнены условия (1), (2) и $d < \gamma\alpha/\beta$, то для любого шара $B \subset \mathbf{R}^d$

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}\{\mathcal{X}_t(B) > 0\} \lambda(d\mathbf{x}) \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$D(t, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d: \|\mathbf{x}\| \leq t^{(1+\varepsilon)/\alpha} \right\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}) &= \int_{D(t, \varepsilon)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\mathbf{R}^d \setminus D(t, \varepsilon)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

В силу леммы 3 при $0 \leq u \leq t - K^{\alpha/d} - 1$

$$\begin{aligned} \int_{D(t, \varepsilon)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}) &\leq Q \left(u; 1 - K(t-u)^{-d/\alpha} \right) \int_{D(t, \varepsilon)} \lambda(d\mathbf{x}) \\ &\leq K_1 Q \left(u; 1 - K(t-u)^{-d/\alpha} \right) t^{(1+\varepsilon)d/\alpha}. \end{aligned}$$

Используя (7), последнее выражение можно оценить сверху величиной

$$K_2 \left(\frac{(t-u)^{-d/\alpha}}{U(u)} \right)^{1/(1+\beta)} t^{(1+\varepsilon)d/\alpha}.$$

Зафиксируем $u = at$, $a \in (0, 1)$. Ввиду (2) для выбранного u справедливо соотношение

$$U(u) \sim K_3 t^\gamma \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

(см., ([2, XIV, § 3])). Поскольку

$$-\frac{d/\alpha + \gamma}{1 + \beta} + \frac{(1 + \varepsilon)d}{\alpha} = -\frac{\gamma - \beta d/\alpha}{1 + \beta} + \frac{\varepsilon d}{\alpha} < 0$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то

$$\begin{aligned} \int_{D(t, \varepsilon)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}) &\leq K_2 \left(\frac{(t-u)^{-d/\alpha}}{U(u)} \right)^{1/(1+\beta)} t^{(1+\varepsilon)d/\alpha} \\ &\leq K_4 t^{-(d/\alpha + \gamma)/(1+\beta) + (1+\varepsilon)d/\alpha} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, как и при доказательстве леммы 4, можно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d \setminus D(t, \varepsilon)} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{Z}_t(B) > 0 \} \lambda(d\mathbf{x}) &\leq c_r \mathbf{P} \left\{ \|W_t^0\| \geq \frac{1}{2} t^{(1+\varepsilon)/\alpha} \right\} \\ &= c_r \mathbf{P} \left\{ \|W_1^0\| \geq \frac{1}{2} t^{\varepsilon/\alpha} \right\} \rightarrow 0 \quad (18) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$. Доказательство (17) завершено.

Из леммы 5 следует (16) и, таким образом, справедливость теоремы 2в установлена.

5. Случай Б: большие и критическая размерности

В данном разделе мы исследуем ситуацию $d \geq \gamma\alpha/\beta$ для случая Б. Как и прежде, обозначим через ϕ неотрицательную непрерывную функцию на $\mathbf{R}^d$ с ограниченным носителем. Напомним, что $v(t, x) = v_\phi(t, x)$ определено в (9).

Как отмечалось в разд. 2, для доказательства теорем 2а и 2в необходимо убедиться в том, что при $d > \gamma\alpha/\beta$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int v(t, x) \lambda(dx) = \int \left(1 - \exp(-\phi(x))\right) \lambda(dx) \equiv b(\phi), \quad (19)$$

а при $d = \gamma\alpha/\beta$ найдется последовательность $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ для которой

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \int v(t_k, x) \lambda(dx) < b(\phi). \quad (20)$$

Лемма 6. Пусть $\Phi(z) = cz^{1+\beta}$. Если $d = \gamma\alpha/\beta$, то

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) > 0. \quad (21)$$

Если $d > \gamma\alpha/\beta$, то справедливо соотношение (19).

Доказательство. Начнем со случая $d = \gamma\alpha/\beta$ и предположим, что утверждение леммы не выполнено, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0. \quad (22)$$

В силу предложения 4.2 из [4]

$$\begin{aligned} g(t) &= c \int v^{1+\beta}(t, y) \lambda(dy) \leq K_1 (t+1)^{-d\beta/\alpha} \int v(t, y) \lambda(dy) \\ &= K_1 (t+1)^{-d\beta/\alpha} v(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^t g(t-u) dU(u) \leq K_1 \int_0^t (t-u+1)^{-d\beta/\alpha} v(t-u) dU(u). \quad (23)$$

Ввиду (2) и равенства $\gamma = d\beta/\alpha$ найдется константа $K > 0$ такая, что

$$1 - \Gamma(t) \geq \frac{K}{(t+1)^\gamma} = \frac{K}{(t+1)^{d\beta/\alpha}}, \quad t \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^t (t-u+1)^{-d\beta/\alpha} dU(u) \leq \int_0^{t-1} (1-\Gamma(t-u)) dU(u) + \int_{t-1}^t (t-u+1)^{-\gamma} dU(u).$$

Ясно, что

$$\int_0^{t-1} (1-\Gamma(t-u)) dU(u) \leq \int_0^t (1-\Gamma(t-u)) dU(u) = \Gamma(t) \leq 1.$$

Кроме того, в силу соотношения $\int_0^\infty u d\Gamma(u) = \infty$ и теоремы восстановления (см., [2, гл. XI, § 1]),

$$\int_{t-1}^t (t-u+1)^{-\gamma} dU(u) \leq U(t) - U(t-1) \rightarrow 0 \quad (24)$$

при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, интеграл $\int_0^t (t-u+1)^{-d\beta/\alpha} dU(u)$ ограничен для любого t , скажем, некоторой константой $K < \infty$. В силу условия (22) для любого $\varepsilon > 0$ существует T такое, что $v(t) \leq \varepsilon$ при $t \geq T$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-u+1)^{-\gamma} v(t-u) dU(u) \\ & \leq \varepsilon \int_0^{t-T} (t-u+1)^{-\gamma} dU(u) + b(\phi) \int_{t-T}^t (t-u+1)^{-\gamma} dU(u) \\ & \leq \varepsilon K + b(\phi) (U(t) - U(t-T)) \leq 2\varepsilon K \end{aligned} \quad (25)$$

для достаточно больших t (снова в силу теоремы восстановления ([2, гл. XI, § 1])). Используя этот факт в (23) и вспоминая предположение (22), мы видим, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t-u) dU(u) = 0. \quad (26)$$

Ввиду (15) это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = b(\phi) > 0.$$

Последнее противоречит (22). Таким образом, первая часть леммы доказана.

Для доказательства оставшейся части леммы нужно использовать представление $(t+1)^{-d\beta/\alpha} = (t+1)^{-\gamma} (t+1)^{-\omega}$, где $\omega = d\beta/\alpha - \gamma > 0$ при $d > \gamma\alpha/\beta$, а затем повторить рассуждения, использовавшиеся при

доказательстве (25) с $(t+1)^{-\omega}$ вместо $v(t)$, и последовательно установить, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (t-u+1)^{-d\beta/\alpha} dU(u) = 0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t-u) dU(u) = 0.$$

Отсюда и из (15) следует желаемый результат.

Теперь доказательство теоремы 26 завершается при помощи следующего утверждения.

Теорема 3. Если выполнено условие (2), $d = \gamma\alpha/\beta$, а последовательность $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ такова, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_\phi(t_k) = G(\phi),$$

то

$$G(\phi) < b(\phi). \quad (27)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е., что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_\phi(t) \equiv b(\phi). \quad (28)$$

Тогда

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t-u) dU(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{g(t-u)}{1-\Gamma(t-u)} (1-\Gamma(t-u)) dU(u).$$

Ясно, что

$$\int_0^t (1-\Gamma(t-u)) dU(u) = 1.$$

Следовательно,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{1-\Gamma(t)} = \liminf_{t \rightarrow \infty} t^\gamma g(t) = 0.$$

Как и прежде положим $C(t, N) = \{y: \|y\| \leq Nt^{1/\alpha}\}$. Легко проверить, что для любого фиксированного N

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^\gamma \int_{C(t, N)} \Phi(v(t, y)) \lambda(dy) = 0$$

или, вспоминая, что $\Phi(z) = cz^{1+\beta}$ и применяя неравенство Йенсена, что

$$\int_{C(t, N)} \Phi(v(t, y)) \lambda(dy) \geq \frac{c}{|C(t, N)|^\beta} \left(\int_{C(t, N)} v(t, y) \lambda(dy) \right)^{1+\beta}$$

Поскольку $|C(t, N)|^\beta \sim K(N)t^{d\beta/\alpha} = K(N)t^\gamma$ для некоторой константы $K(N)$, то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{C(t, N)} v(t, \mathbf{y}) \lambda(d\mathbf{y}) = 0.$$

Заметим теперь, что согласно лемме 4 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно большое N , для которого $\int_{\mathbf{R}^d \setminus C(t, N)} v(t, \mathbf{y}) \lambda(d\mathbf{y}) \leq \varepsilon$. Эта оценка в сочетании с предыдущим соотношением показывает, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^d} v(t, \mathbf{y}) \lambda(d\mathbf{y}) = \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0,$$

что противоречит (28). Доказательство теоремы завершено.

6. Случай А: большие размерности

Пусть, как и прежде, ϕ — неотрицательная непрерывная функция на $\mathbf{R}^d$ с ограниченным непустым носителем. Напомним, что

$$v(t) \equiv v_\phi(t) \equiv \int v_\phi(t, \mathbf{x}) \lambda(d\mathbf{x}).$$

Теорема 4. Если $d > \alpha/\beta$ и выполнено условие (3), то предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \equiv G(\phi) > 0$$

существует и, кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} G(\varepsilon \phi) = \int \phi d\lambda.$$

Доказательство. Обратимся к определению функции g в (14). Поскольку (см., например, доказательство леммы 6)

$$g(t) \leq k(t+1)^{-d\beta/\alpha} v(t) \leq k(t+1)^{-d\beta/\alpha} b(\phi),$$

то функция $g(t)$ ограничена, интегрируема и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. По предположению функция распределения Γ нерешетчата и имеет конечное математическое ожидание. Поэтому (см., [7, с. 87])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t-u) dU(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(u) du. \quad (29)$$

Вспоминая (15), нетрудно проверить, что предел

$$G(\phi) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = b(\phi) - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(u) du \quad (30)$$

существует. Заметим также, что в силу критичности процесса ветвления и предположения 4.2 из [4], для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$v_{\varepsilon\phi}(t, y) \leq \mathbf{E}_y^0 \left(\int \varepsilon \phi d\mathcal{X}_t \right) = \varepsilon \mathbf{E}_y \phi(W_t) \leq \varepsilon K(t+1)^{-d/\alpha},$$

где K — константа, зависящая только от ϕ , и

$$\int_{\mathbf{R}^d} v_{\varepsilon\phi}(t, y) \lambda(dy) \leq \int \varepsilon \mathbf{E}_y \phi(W_t) dy = \varepsilon \int \phi(y) \lambda(dy).$$

Отсюда следует, что интеграл $\int \Phi(v_{\varepsilon\phi}(t, y)) \lambda(dy)$ не превосходит величины

$$\left(\varepsilon K(t+1)^{-d/\alpha} \right)^\beta \int v_{\varepsilon\phi}(t, y) \lambda(dy) \leq \varepsilon^{1+\beta} K_1(t+1)^{-d\beta/\alpha} \int \phi(y) \lambda(dy).$$

Поэтому,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\infty g_{\varepsilon\phi}(t) dt = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\infty dt \int \Phi(v_{\varepsilon\phi}(t, y)) \lambda(dy) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} G(\varepsilon\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} b(\varepsilon\phi) = \int \phi(y) \lambda(dy) > 0.$$

Как отмечалось в разд. 2,

$$\mathbf{E} \exp \left(- \int \phi d\mathcal{X}_t \right) = \exp \left\{ - \int v_\phi(t, \mathbf{x}) \lambda(d\mathbf{x}) \right\}$$

и, следовательно, при выполнении условий теоремы 1а $\mathcal{X}_t$ сходится по распределению к нетривиальному пределу $\mathcal{X}_\infty$, интенсивность которого равна

$$\mathbf{E} \int \phi d\mathcal{X}_\infty = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \exp(-G(\varepsilon\phi)) = \int \phi(y) \lambda(dy).$$

Это доказывает теорему 1а.

7. Случай А: малые и критическая размерности

В этом разделе мы заканчиваем доказательство теоремы 1.

Теорема 5. Если $d \leq \alpha/\beta$ в случае А, то $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$.

Доказательство. Полагая $g^{(T)}(t) := g(t) I(t \leq T)$, мы выводим из (15) и теоремы восстановления (см. [7, с. 87]), что для любого $T > 0$

$$\infty > b(\phi) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g^{(T)}(t) dt. \quad (31)$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_0^{\infty} g(t) dt < \infty. \quad (32)$$

Теперь, при помощи тех же рассуждений, что и в начале доказательства теоремы 4, несложно установить существование пределов (29) и (30). Отталкиваясь от соотношения

$$\infty > \int_0^{\infty} g(u) du = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{d\beta/\alpha}} (1+u)^{d\beta/\alpha} g(u)$$

и замечая, что $\int_0^{\infty} du/(1+u)^{d\beta/\alpha} = \infty$ при $d\beta/\alpha \leq 1$, получаем:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{d\beta/\alpha} g(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{d\beta/\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(v(t, y)) \lambda(dy) = 0.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, использовавшиеся в конце доказательства теоремы 3, и вспоминая, что функция $v(t)$ монотонна по t , заключаем, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} v(t, y) \lambda(dy) = \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Наука, 1967, 752 с.
3. *Gorostiza L., Wakolbinger A.* Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 1, p. 266–288.
4. *Gorostiza L., Roelly S., Wakolbinger A.* Persistence of critical multitype particle and measure branching processes. — Probab. Theory Relat. Fields, 1992, v. 92, № 3, p. 313–335.
5. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
6. *Kallenberg O.* Random measures, 3 rd. ed. Berlin: Akademie-Verlag, New York: Academic Press, 1983.
7. *Lindvall T.* Lectures on the Coupling Method. New York: Wiley, 1992, 257 p.
8. *Liemant A., Matthes K., Wakolbinger A.* Equilibrium Distributions of Branching Processes. Berlin: Akademie-Verlag, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
9. *Stöckl A.* Critical branching Brownian particle systems. — Doctoral Thesis, Johannes Kepler Universität Linz, 1994.
10. *Stöckl A., Wakolbinger A.* Critical branching populations with infinite mean individual lifetime may have Poisson limits. — Unpublished manuscript, 1993.

Поступила в редакцию
19.II.1998