Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мельников, М. Л. Нечаев, К вопросу о хеджировании платежных обязательств в сред-неквадратическом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 672–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:54:09

© 1998 г.

МЕЛЬНИКОВ А. В.* , НЕЧАЕВ М. Л.*

К ВОПРОСУ О ХЕДЖИРОВАНИИ
ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ
В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ

В статье предложен некоторый новый подход к задаче «оптимального» управления активами в ситуации неполного рынка, развивающий известный метод Фельмера, Зондермана и Швайцера хеджирования платежных обязательств в «среднеквадратическом». При этом устранены некоторые технические условия, налагавшиеся ранее на аппроксимирующую последовательность, такие, как невырожденность и принадлежность ее элементов пространству $\mathcal{L}_2$. Приводятся примеры и даются интерпретации полученных результатов, связывающие их с такими ключевыми понятиями финансового рынка, как полнота и арбитраж.

Ключевые слова и фразы: хеджирование в среднеквадратическом, инвестирование, арбитраж, мартингальная мера, опцион.

1. Введение

Финансовым рынком называют совокупность активов, которые определяются своими ценами, эволюционирующими во времени. В случае двух активов, безрискового B и рискового S , говорят о (B, S) -рынке (см. [1]). Участник такого рынка, заключая контракт на некоторый период (на покупку или продажу актива), принимает на себя *платежное обязательство*, определяемое всей эволюцией цен. Действия на рынке сводятся к формированию *портфеля (стратегии)*, состоящего на каждый момент из двух составляющих: количеств безрискового и рискового активов. Если средства только перераспределяются в портфеле, то говорят о его *самофинансируемости*. Рынок называют *безарбитражным*, если с помощью самофинансируемого портфеля нельзя создать положительный капитал, исходя из нулевого начального, без риска разорения (получения отрицательного капитала). Если же произвольное (зависящее от всей эволюции цен) платежное обязательство на рынке может быть выражено терминальным капиталом некоторого самофинансируемого портфеля (*репликация*), то такой рынок называют *полным*.

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия.

Проблема *хеджирования* платежного обязательства понимается как построение портфеля, терминальный капитал которого «доминирует» это обязательство. Следовательно, для *полного* рынка она решается в точности построением *реплицирующего* портфеля (см. статью [1], в которой могут быть найдены формальные определения используемых нами понятий: финансовый рынок, арбитраж, полнота, портфель, самофинансируемость и т. д.).

Однако в условиях *неполного* рынка эта проблема не столь однозначна. Здесь необходимо выделить в первую очередь подход, основанный на построении *нижних* и *верхних цен* заданного платежного обязательства. При этом основополагающую роль играет *опциональное разложение* (см. [2]). Другой же подход, впервые предложенный в [3] и развиваемый в целом ряде других работ (см. [4]–[8]), состоит в том, чтобы минимизировать в среднеквадратическом разность между терминальным капиталом самофинансируемой стратегии и заданным платежным обязательством. К этому направлению относится и настоящая работа. В отличие от целого ряда статей (см. [3]–[8]), здесь строится самофинансируемый портфель, оптимальный в *условно среднеквадратическом смысле*. Это позволяет избавиться от ряда технических предположений предыдущих работ, таких, как «условие ND» (см. [5]). В частности, контрпример Шахермайера (см. [6]) в применении к нашей работе становится примером, иллюстрирующим предлагаемый метод.

2. Постановка задачи оптимального хеджирования

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — стандартный стохастический базис (см. [9]). Все рассматриваемые объекты предполагаются заданными на этом базисе, стохастические последовательности согласованы с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Множество предсказуемых последовательностей $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ ($\gamma_0 \in \mathcal{F}_0, \gamma_n \in \mathcal{F}_{n-1}, n = 1, 2, \dots$) обозначим $\mathcal{P}$.

Предположим, что задана стохастическая последовательность $S = (S_n)_{n \geq 0}$ и случайные величины $H \in \mathcal{F}_N, G_0 \in \mathcal{F}_0$. Элементы последовательности S и случайные величины H, G_0 принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(\mathbf{P})$.

Обозначим $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ и $G_k(\gamma) = \sum_{n=1}^k \gamma_n \Delta S_n$. Будем строить такую предсказуемую последовательность $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_n)_{n \geq 1}$, что для любой $\gamma \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ & \leq \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \end{aligned} \quad (1)$$

Соответствующее решение задачи (1) будем называть *оптимальной стратегией*.

Сформулированную оптимизационную проблему можно интерпретировать как *задачу хеджирования платежного обязательства* H с

помощью актива, дисконтированная цена которого принимает значения S_n в моменты времени $n = 0, \dots, N$. Данная интерпретация будет полезна для нас при построении оптимальной последовательности $\hat{\gamma}$ задачи (1). Наличие определенных правил «торгов» и ограниченность средств «хеджера» накладывают на класс стратегий *ограничения*, например, $\gamma_n \geq 0$ (запрет на «короткую продажу»). В некоторых случаях такая оптимизационная задача также может быть решена, но это выходит за рамки настоящей работы.

3. Структура оптимальной стратегии

Будем придерживаться следующих, не приводящих к противоречию, соглашений. Произведение $\prod_{k \in \Theta} a_k$, где $\Theta = \emptyset$, равно единице, сумма $\sum_{k \in \Theta} a_k$ есть нуль, и неопределенности вида $0/0$ также равны нулю, равенства и неравенства в отношениях между случайными величинами понимаются в смысле **P**-п.н. Определим следующие предсказуемые последовательности:

$$\beta_n = \frac{\mathbf{E}[\Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1}]}, \quad n = 1, \dots, N; \quad (2)$$

$$\rho_n = \frac{\mathbf{E}[H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1}]}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Из приводимой ниже леммы будет ясно, что определения β_n и ρ_n корректны.

Лемма 1. Пусть β_n определены формулой (2) для $n = 1, \dots, N$. Тогда для любого $n = 1, \dots, N$

$$\prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}), \quad (a)$$

$$\Delta S_n \prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}), \quad (b)$$

$$\beta_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}), \quad (c)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1} \right] \leq 1 \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \end{aligned} \quad (d)$$

Доказательство леммы 1, а также лемм 2–5 приводится в разделе 5.

Следствие. Последовательности $\beta = (\beta_n)_{n \geq 1}$ и $\rho = (\rho_n)_{n \geq 1}$ определены корректно.

Лемма 2. Пусть последовательность $\hat{\gamma} \in \mathcal{P}$ такова, что $E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 | \mathcal{F}_0] < \infty$ (P-н.н.) и для любой $\gamma \in \mathcal{P}$ такой, что

$$E[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 | \mathcal{F}_0] < \infty \quad (\text{P-н.н.}),$$

$$E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))(G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma)) | \mathcal{F}_0] \geq 0 \quad (\text{P-н.н.}).$$

Тогда $\hat{\gamma}$ является оптимальной стратегией.

Лемма 3. Пусть последовательность $\hat{\gamma} \in \mathcal{P}$ такова, что $E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 | \mathcal{F}_0] < \infty$ (P-н.н.) и

$$E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad (\text{P-н.н.}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Тогда $\hat{\gamma}$ является оптимальной стратегией.

Лемма 4. Обозначим

$$\hat{\gamma}_n = \rho_n - (G_0 + G_{n-1}(\hat{\gamma})) \beta_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Тогда для любого $n = 1, \dots, N$

$$G_0 + G_N(\hat{\gamma}) = \sum_{k=n}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) + (G_0 + G_{n-1}(\hat{\gamma})) \prod_{l=k}^N (1 - \beta_l \Delta S_l).$$

Лемма 5. Пусть

$$\hat{\gamma}_n = \rho_n - (G_0 + G_{n-1}(\hat{\gamma})) \beta_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 | \mathcal{F}_0] < \infty \quad (\text{P-н.н.}),$$

$$E[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad (\text{P-н.н.}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Из лемм 3 и 5 получаем следующий основной результат работы.

Теорема. Пусть

$$\hat{\gamma}_n = \rho_n - (G_0 + G_{n-1}(\hat{\gamma})) \beta_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

где последовательности $\beta = (\beta_n)_{n \geq 1}$ и $\rho = (\rho_n)_{n \geq 1}$ определены формулами (2) и (3), тогда $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_n)_{n \geq 1}$ является оптимальной стратегией.

В частности, при $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ задача превращается в стандартную задачу $\mathcal{L}_2$ -хеджирования (см. [5]–[7]), а стратегия $\hat{\gamma}$ совпадает со «стратегией Швайцера», полученной с помощью проекционной техники $\mathcal{L}_2$ при некоторых дополнительных ограничениях на процесс цен и используемые стратегии.

4. Примеры и замечания

4.1. Арбитраж и условия невырожденности. В работе М. Швайцера [6] для решения аналогичной задачи на процесс S , помимо принадлежности S_n пространству $\mathcal{L}_2$, накладывается дополнительное условие «невырожденности» (nondegeneracy condition), или ND-условие: существует $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$(\mathbf{E}[\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}])^2 \leq \delta \mathbf{E}[\Delta S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.})$$

для всех $n = 1, \dots, N$.

Из этого условия следует, что рынок, на котором действует инвестор, *безарбитражен*. Действительно, как показано в той же работе, при условии ND можно определить меру $\hat{\mathbf{P}}$, эквивалентную $\mathbf{P}$, такую, что

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \text{const} \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l),$$

относительно которой $S = (S_n)_{n \geq 0}$ является мартингалом. Следовательно (см., например, [1]), рынок безарбитражен.

Наши рассуждения *нигде* не используют понятие арбитража, соответственно стратегия $\hat{\gamma}$ дает некоторое решение задачи и в случае *арбитражности рынка*.

Например, пусть условия ND выполнены для всех моментов, за исключением момента n , когда $S_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Тогда

$$\mathbf{E} \left[\prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = (1 - \beta_n \Delta S_n) \mathbf{E} \left[\prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0,$$

поскольку

$$1 - \beta_n \Delta S_n = 1 - \frac{\mathbf{E}[\Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]} \Delta S_n = 0.$$

Следовательно, $\hat{\gamma}_k = 0$ для любого k до момента $k = n - 1$, а в момент $k = n - 1$ величина $\hat{\gamma}_n$ выбирается так, чтобы компенсировать платежное обязательство (получить необходимый «начальный капитал», см. (6) в п. 4.3) с учетом используемой далее стратегии и имеющейся к моменту $n - 1$ относительно H информации $\mathcal{F}_{n-1}$:

$$\hat{\gamma}_n = \frac{\mathbf{E}[H \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]}{\Delta S_n \mathbf{E}[\prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]},$$

а затем нужно следовать стратегии, вытекающей из предположения ND, когда, как ранее указано, арбитражные возможности отсутствуют.

4.2. Пример Шахермайера. Следующий пример, принадлежащий Шахермайеру, приводится Швайцером в статье [6], где предлагается решение аналогичной оптимизационной задачи при следующих условиях:

1) элементы последовательности $S = (S_n)_{n \geq 0}$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_2$ и удовлетворяют условию ND;

2) множество допустимых стратегий Θ включает только такие предсказуемые последовательности $\gamma \in \mathcal{P}$, что $\gamma_n \Delta S_n \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P})$.

Пример Шахермайера использовался для обоснования необходимости условия ND.

Пусть $\Omega = [0, 1] \times \{-1, 1\}$ и $\mathcal{F}$ — борелевская σ -алгебра на Ω . Элементы Ω обозначим как $\omega = (u, v)$, $u \in [0, 1]$, $v \in \{-1, 1\}$. Пусть $U(\omega) = u$, $V(\omega) = v$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \sigma(U)$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, и $\mathbf{P}$ — мера на Ω такая, что U имеет равномерное распределение на $[0, 1]$ и условное распределение V при заданном U есть $\mathbf{P}(V = 1 | U) = U^2$, $\mathbf{P}(V = -1 | U) = 1 - U^2$. Положим $S_0 = 0$, $\Delta S_1 \equiv 1$ и $\Delta S_2 = V^+(1+U) - 1 = V^+U - V^-$. Очевидно, что $S_2 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P})$. Определим платежное обязательство

$$H = \left(\frac{1}{U} + 1 \right) V^+ = \frac{1}{U} V^+(1+U).$$

Случайная величина H принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathbf{P})$, поскольку $\mathbf{E}[H^2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[H^2 | \mathcal{F}_1]] = \mathbf{E}[(1+U)^2] < \infty$. Положим $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = 1/U$ и получим, что

$$G_2(\hat{\gamma}) = \frac{1}{U} + \frac{1}{U} (V^+(1+U) - 1) = H.$$

Таким образом, построенная стратегия $\hat{\gamma}$ предсказуема (более того, $\mathcal{F}_0$ -измерима) и реплицирует платежное требование H . Однако она не удовлетворяет сразу двум условиям. Во-первых, $\hat{\gamma}$ недопустима, поскольку $\hat{\gamma}_1 \Delta S_1 = 1/U \notin \mathcal{L}_2(\mathbf{P})$. Во-вторых,

$$\mathbf{E}[\Delta S_2 | \mathcal{F}_1] = \mathbf{E}[V^+(1+U) - 1 | U] = U^3 + U^2 - 1$$

и

$$\mathbf{E}[\Delta S_2^2 | \mathcal{F}_1] = \mathbf{E}[(V^+(1+U) - 1)^2 | U] = U^4 - U^2 + 1.$$

Следовательно, отношение

$$\frac{(\mathbf{E}[\Delta S_2 | \mathcal{F}_1])^2}{\mathbf{E}[\Delta S_2^2 | \mathcal{F}_1]} = \frac{(U^3 + U^2 - 1)^2}{U^4 - U^2 + 1}$$

не является равномерно ограниченной константой, меньшей 1, а процесс S не удовлетворяет условию ND. Кажется неестественным то, что стратегия, реплицирующая платежное обязательство и измеримая относительно $\mathcal{F}_0$, не принадлежит классу допустимых стратегий. В данной работе (см. разделы 2, 3) в качестве критерия оптимальности стратегии

выбрано условное математическое ожидание $\mathbf{E}[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 | \mathcal{F}_0]$, а ее существование и структура получены без предположений $\gamma_n \Delta S_n \in \mathcal{L}_2$ и ND. Следовательно, в рамках предложенной в данной работе оптимизационной задачи пример Шахермайера, в отличие от работ Швайцера (см. [6], [7]), только иллюстрирует наш метод.

4.3. Хеджирование опционов Европейского типа. Задача хеджирования опциона включает в себя не только выработку оптимальной стратегии хеджирования, но и определение стоимости контракта. В рамках предлагаемого метода задача формулируется следующим образом.

Выбрать $G_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ и построить предсказуемую последовательность $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_n)_{n \geq 1}$ так, что для любых $G_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ и $\gamma \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[(H - \hat{G}_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 | \mathcal{F}_0 \right] \\ \leq \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 | \mathcal{F}_0 \right] \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}) \end{aligned} \quad (4)$$

Для любого $\mathcal{F}_0$ -измеримого $G_0 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P})$ решение задачи (1) дается теоремой из раздела 3. Обозначим $\hat{\gamma}(G_0)$ решение, соответствующее G_0 . Очевидно, для любых $G_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ и $\gamma \in \mathcal{P}$

$$\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}(G_0)))^2 | \mathcal{F}_0 \right] \leq \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 | \mathcal{F}_0 \right]. \quad (5)$$

Минимизируем $\mathbf{E}[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}(G_0)))^2 | \mathcal{F}_0]$ по G_0 . Из леммы 4 следует, что

$$H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}(G_0)) = H - \sum_{n=1}^N \rho_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) - G_0 \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n).$$

Используя равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\rho_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ = \rho_n \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \beta_l \Delta S_l) \mathbf{E} \left[\Delta S_n (1 - \beta_n \Delta S_n) \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0, \end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}(G_0)))^2 | \mathcal{F}_0 \right] \\ = \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{n=1}^N \rho_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right)^2 | \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2G_0 \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{n=1}^N \rho_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \mid \mathcal{F}_0 \right] \\
& + G_0^2 \mathbf{E} \left[\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n)^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\
& = \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{n=1}^N \rho_n \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right)^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\
& - 2G_0 \mathbf{E} \left[H \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \mid \mathcal{F}_0 \right] + G_0^2 \mathbf{E} \left[\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \mid \mathcal{F}_0 \right].
\end{aligned}$$

Из неравенства Гёльдера следует, что на множестве $A = \{\omega: \mathbf{E}[\prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_0] = 0\}$ значение $\mathbf{E}[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}(G_0)))^2 \mid \mathcal{F}_0]$ не зависит от G_0 . В этом случае естественно положить G_0 равным нулю. На множестве $\bar{A}$ величина G_0 определяется однозначно. Таким образом, учитывая соглашения относительно значения неопределенностей вида $0/0$, мы можем записать, что

$$\hat{G}_0 = \frac{\mathbf{E}[H \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \mid \mathcal{F}_0]}{\mathbf{E}[\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \mid \mathcal{F}_0]}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 1. Указанное решение совпадает с соответствующим решением задачи хеджирования платежного обязательства в случае полного рынка.

З а м е ч а н и е 2. Случайная величина $\hat{G}_0$ может и не принадлежать пространству $\mathcal{L}_2(\mathbf{P})$. Однако, расширив множество случайных величин, рассматриваемых как возможные значения начального капитала, до множества $\{g \in \mathcal{F}_0: g \prod_{n=1}^N (1 - \beta_n \Delta S_n) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P})\}$, можно провести доказательства утверждений раздела 3 и убедиться в справедливости приведенного результата.

4.4. Перераспределение риска «активов» и «пассивов» компании. Продемонстрируем теперь возможности предлагаемого метода для решения задач управления активами страховой компании в соответствии с ситуацией на финансовом рынке и обязательствами («пассивами»), которые приняла на себя компания.

Предположим, что финансовый рынок состоит из двух активов: банковского счета и акции. Цена единицы банковского счета представлена (детерминированной) последовательностью $B = (B_n)_{n \geq 0}$, а цена акции — стохастической последовательностью $S = (S_n)_{n \geq 0}$.

Процесс риска страховой компании описывается стохастической последовательностью $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$, $\Delta Z_n = D_n - C_n$, $\Delta Z_0 = 0$, где D_n — премии, поступившие в момент n , а C_n — страховые выплаты, осущес-

ствленные компанией в момент n . При этом не делается *никаких* предположений относительно *зависимости* величин ΔZ_n .

Капитал компании $V = (V_n)_{n \geq 0}$ эволюционирует в соответствии с выбранной (предсказуемой) стратегией $\pi = (\pi_n)_{n \geq 0}$, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$:

$$V_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \quad \Delta V_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \Delta Z_n, \quad (7)$$

или

$$V_n = V_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta B_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta S_i + Z_n,$$

где V_0 — начальный капитал, β_n и γ_n обозначают здесь число единиц банковского счета и число акций соответственно. Обозначим $Y_n = V_n/B_n$, $X_n = S_n/B_n$, тогда из (7) следует

$$Y_{n-1} = \beta_n + \gamma_n X_{n-1}, \quad \Delta Y_n = \gamma_n \Delta X_n + \frac{\Delta Z_n}{B_n},$$

или

$$Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Z_i}{B_i}.$$

Помимо компенсации страховых выплат, страховая компания должна платить заработную плату, осуществлять арендные платежи и т.п., а также иметь некоторую прибыль.

Пусть итоги деятельности подводятся в момент N , когда уплачивается заработная плата и другие платежи, составляющие сумму H^1 , а «планируемая» к моменту N прибыль составляет сумму H^2 . Тогда естественно поставить следующую задачу: найти стратегию $\hat{\pi} \in \mathcal{P}$ такую, что для любой стратегии $\pi \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(H^1 + H^2 - V_N(\hat{\pi}) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ & \leq \mathbf{E} \left[\left(H^1 + H^2 - V_N(\pi) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим $H = H^1 + H^2/B_N + \sum_{n=1}^N \Delta Z_n/B_n$. Из формулы (8) вытекает, что решение поставленной задачи сводится к исследуемой нами проблеме (1): найти последовательность $\hat{\gamma} \in \mathcal{P}$ такую, что для любой стратегии $\gamma \in \mathcal{P}$

$$\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \leq \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma))^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}),$$

где $G_0 = Y_0$, $G_n(\gamma) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta X_i$.

Далее, компания платит заработную плату и осуществляет иные платежи не только в конце периода планирования. Поэтому естественно включить эти платежи в процесс риска, который в этом случае будет

определяться формулой $\Delta Z'_n = D_n - C_n - H_n^1$, где H_n^1 — заработная плата и иные платежи, уплачиваемые компанией в момент n . Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно свести задачу получения в момент N прибыли, «наиболее близкой» величине H^2 , к решению задачи (1).

5. Доказательства

5.1. Доказательство леммы 1. Будем следовать доказательству, приведенному в [7]. Рассмотрим случай $n = N$. Утверждение (b) при $n = N$ сводится к утверждению $\Delta S_N \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P})$, и, следовательно, оно выполнено. Ввиду неравенства Гёльдера значение β_N определено корректно. Обозначим

$$Y_N^{(m)} = \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]} \frac{\Delta S_N^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]} I \left\{ \mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}] \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Очевидно, что $Y_N^{(m)} \uparrow \beta_N^2 \Delta S_N^2$ (P-п.н.) и $Y_N^{(m)}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_2(\mathbf{P})$ ($0 \leq Y_N^{(m)} \leq \Delta S_N^2 m$). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\beta_N^2 \Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_N^{(m)} | \mathcal{F}_{N-1}] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]} \\ &\quad \times I \left\{ \mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}] \geq \frac{1}{m} \right\} \leq 1 \quad (\text{P-п.н.}), \end{aligned}$$

откуда $\mathbf{E}[\beta_N^2 \Delta S_N^2] \leq 1$, и утверждения (a), (c) для $n = N$ доказаны.

Покажем, что верно и утверждение (d).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(1 - \beta_N \Delta S_N)^2 | \mathcal{F}_{N-1}] &= 1 - 2 \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]} \\ &\quad + \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]^2} \mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= 1 - \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]^2} \mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= \mathbf{E}[(1 - \beta_N \Delta S_N) | \mathcal{F}_{N-1}] \quad (\text{P-п.н.}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[1 - \beta_N \Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}] &= 1 - \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]^2} \mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}] - \mathbf{E}[\Delta S_N | \mathcal{F}_{N-1}]^2}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 | \mathcal{F}_{N-1}]} \leq 1 \quad (\text{P-п.н.}), \end{aligned}$$

т.е. утверждение (d) для $k = N$ верно.

Предположим, что утверждения (a)–(d) выполнены для $n = k + 1, \dots, N$. Покажем, что они выполнены для $n = k$. Из утверждения (d) для $n = k + 1$ следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \right] &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_k \right] \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_k \right] \right] \leq \mathbf{E} [\Delta S_k^2] < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение (b) для $n = k$ выполнено. Обозначим

$$\begin{aligned} Y_k^{(m)} &= \frac{\mathbf{E} [\Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1}]^2}{\mathbf{E} [\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1}]} \\ &\times \frac{\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2}{\mathbf{E} [\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1}]} \\ &\times I \left\{ \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \geq \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$Y_k^{(m)} \uparrow \beta_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2,$$

$$0 \leq Y_k^{(m)} \leq m \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2, \quad Y_k^{(m)} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{P}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\beta_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} [Y_k^{(m)} \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} [\Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1}]^2}{\mathbf{E} [\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1}]} \\ &\times I \left\{ \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \geq \frac{1}{m} \right\} \leq 1 \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} \left[\beta_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \right] \leq 1, \quad \beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}).$$

Используя

$$\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}),$$

получим утверждение (а) для $n = k$:

$$\prod_{l=k}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) = \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) - \beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}).$$

Для доказательства утверждения (d) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\prod_{l=k}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] &= \mathbf{E} \left[(1 - \beta_k \Delta S_k)^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &\quad - 2\mathbf{E} \left[\beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[\beta_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_k \right] \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &\quad - 2\mathbf{E} \left[\beta_k \Delta S_k \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_k \right] \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &\quad + \beta_k^2 \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_k \right] \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] - \mathbf{E} \left[\beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=k}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E} \left[\prod_{l=k}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] = \mathbf{E} \left[\prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \mathbf{E} \left[\beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& \leq 1 - \mathbf{E} \left[\beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& \leq 1 - \frac{\mathbf{E} \left[\Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]^2}{\mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]} \leq 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, утверждения (а)–(д) доказаны.

5.2. Следствие. Как было указано выше, значение

$$\beta_N = \frac{\mathbf{E}[\Delta S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_N^2 \mid \mathcal{F}_{N-1}]}$$

определено корректно ввиду неравенства Гёльдера. Аналогичные рассуждения показывают корректность определения β_n , $n = 1, \dots, N$.

Рассмотрим ρ_n , $n = 1, \dots, N$. Пусть $n = k$:

$$\rho_k = \frac{\mathbf{E} \left[H \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]}{\mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]}.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E} \left[H \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \right| \\
& \leq \mathbf{E} \left[H^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Это показывает, что если

$$\mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] = 0,$$

то

$$\mathbf{E} \left[H \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] = 0.$$

Следствие доказано.

5.3. Доказательство леммы 2. Пусть стратегия $\gamma^* \in \mathcal{P}$ такова, что

$$\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] < \infty.$$

Тогда имеем (P-п.н.)

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}) + G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + 2\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[(G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая предположение леммы, получаем, что (P-п.н.)

$$\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \geq \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right].$$

Лемма доказана.

5.4. Доказательство леммы 3. Пусть стратегия $\gamma^* \in \mathcal{P}$ такова, что $\mathbf{E}[(H - G_0 - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0] < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}) + G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + 2\mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[(G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*))^2 \mid \mathcal{F}_0 \right]. \end{aligned}$$

Определим последовательность множеств A_N^m : $A_N^m = \{\omega \in \Omega: |\hat{\gamma}_k - \gamma_k^*| \leq m, k = 1, \dots, N\} \in \mathcal{F}_{N-1}$. Поскольку $A_N^m \uparrow \Omega$ и

$$\begin{aligned} & |(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) I(A_N^m)| \\ &\leq |(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*))|, \end{aligned}$$

то, используя теорему Лебега для условных математических ожиданий (см., например, [9]), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [| (H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) I(A_N^m) | \mid \mathcal{F}_0] < \infty, \\ & \mathbf{E} [| (H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) I(A_N^m) | \mid \mathcal{F}_{N-1}] \\ & \longrightarrow \mathbf{E} [| (H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) | \mid \mathcal{F}_{N-1}], \end{aligned}$$

$$m \rightarrow \infty, \quad (\text{P-п.н.}).$$

Легко видеть, что наша конструкция и предположения леммы приводят к равенствам

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) I(A_N^m) | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \left(\sum_{n=1}^N (\hat{\gamma}_n - \gamma_n^*) \Delta S_n \right) I(A_N^m) | \mathcal{F}_{N-1} \right] \\ &= \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) | \mathcal{F}_{N-1}] \left(\sum_{n=1}^{N-1} (\hat{\gamma}_n - \gamma_n^*) \Delta S_n \right) I(A_N^m). \end{aligned}$$

Принимая во внимание $A_N^m \uparrow \Omega$, имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) | \mathcal{F}_{N-1}] \left(\sum_{n=1}^{N-1} (\hat{\gamma}_n - \gamma_n^*) \Delta S_n \right) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \end{aligned}$$

Повторяя те же рассуждения для A_{N-l}^m : $A_{N-l}^m = \{\omega \in \Omega: |\hat{\gamma}_k - \gamma_k^*| \leq m, k = 1, \dots, N-l\} \in \mathcal{F}_{N-l-1}$, $l = 1, 2, \dots$, получим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) | \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} [\dots \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \right. \\ & \quad \times (G_N(\hat{\gamma}) - G_N(\gamma^*)) | \mathcal{F}_{N-1}] \dots | \mathcal{F}_1] | \mathcal{F}_0] = 0 \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \end{aligned}$$

Используя лемму 2, приходим к утверждению леммы 3.

5.5. Доказательство леммы 4. Для случая $n = N - 1$ утверждение леммы вытекает из следующего равенства:

$$\begin{aligned} G_0 + G_N(\hat{\gamma}) &= G_0 + G_{N-1}(\hat{\gamma}) + \rho_N \Delta S_N - (G_0 + G_{N-1}(\hat{\gamma})) \beta_N \Delta S_N \\ &= \rho_N \Delta S_N + (G_0 + G_{N-1}(\hat{\gamma})) (1 - \beta_N \Delta S_N). \end{aligned}$$

Далее, предположим, что лемма верна для $n = m, m + 1, \dots, N - 1$. Покажем, что тогда она верна и для $n = m - 1$:

$$\begin{aligned} G_0 + G_N(\hat{\gamma}) &= \sum_{k=m+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \\ &+ (G_0 + G_m(\hat{\gamma})) \prod_{k=m+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) = \sum_{k=m+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \\ &+ (G_0 + G_{m-1}(\hat{\gamma})) \prod_{l=m+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) + \rho_m \Delta S_m \prod_{l=m+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (G_0 + G_{m-1}(\hat{\gamma})) \beta_m \Delta S_m \prod_{l=m+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \\
& = \sum_{k=m}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) + (G_0 + G_{m-1}(\hat{\gamma})) \prod_{l=m}^N (1 - \beta_l \Delta S_l).
\end{aligned}$$

Доказательство завершается применением метода математической индукции.

5.6. Доказательство леммы 5. Покажем, что $(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}))$ интегрируема в квадрате. Из леммы 4 вытекает, что

$$H - G_0 - G_N(\hat{\gamma}) = H - \sum_{k=1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) + G_0 \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l).$$

Из леммы 1 и условий леммы 5 получим, что

$$G_0 \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l), \quad H \in \mathcal{L}_2(\mathbf{P}).$$

Определим

$$\begin{aligned}
X_k^{(m)} &= \frac{\mathbf{E}[H \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1}]}{\mathbf{E}[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1}]} \\
&\times \frac{\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2}{\mathbf{E}[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1}]} \\
&\times I \left\{ \mathbf{E} \left[\Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \geq \frac{1}{m} \right\}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$X_k^{(m)} \uparrow \rho_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2,$$

то, пользуясь неравенством Гёльдера и теоремой о монотонной сходимости, имеем соответственно

$$0 \leq \mathbf{E}[X_k^{(m)} | \mathcal{F}_{k-1}] \leq \mathbf{E}[H^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

и

$$\mathbf{E} \left[\rho_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \leq \mathbf{E}[H^2 | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \left[\rho_k^2 \Delta S_k^2 \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l)^2 \right] \leq \mathbf{E} [H^2] < \infty.$$

Для доказательства второго утверждения заметим, что (Р-п.н.)

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\rho_n \Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \Delta S_k \Delta S_n \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[G_0 \Delta S_n \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1} \right].$$

Принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[H \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \beta_k \\ &= \mathbf{E} \left[H \beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \end{aligned}$$

и элементарное тождество

$$\sum_{k=n+1}^N (1 - a_k) = 1 - \sum_{j=n+1}^N a_j \sum_{k=j+1}^N (1 - a_k),$$

имеем, что

$$\mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \Delta S_n \mid \mathcal{F}_n \right] \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\Delta S_n \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \mid \mathcal{F}_n \right] \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\Delta S_n \mathbf{E} \left[H \left(1 - \sum_{k=n+1}^N \beta_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \mid \mathcal{F}_n \right] \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\Delta S_n \mathbf{E} \left[H \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_n \right] \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right].
\end{aligned}$$

Используя явный вид β_n и ρ_n , получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left[\rho_n \Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \frac{\mathbf{E} [H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbf{E} [\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]} \\
&\quad \times \mathbf{E} \left[\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left[\Delta S_n \prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = \mathbf{E} \left[\Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&\quad - \mathbf{E} \left[\beta_n \Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&\quad - \frac{\mathbf{E} [\Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbf{E} [\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1}]}
\end{aligned}$$

$$\times \mathbf{E} \left[\Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \Delta S_k \Delta S_n \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E} \left[\rho_k \Delta S_k \Delta S_n \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \Delta S_k \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \beta_l \Delta S_l) \mathbf{E} \left[\Delta S_n \prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[G_0 \Delta S_n \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= G_0 \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \beta_l \Delta S_l) \mathbf{E} \left[\Delta S_n \prod_{l=n}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем (Р-п.н.)

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[(H - G_0 - G_N(\hat{\gamma})) \Delta S_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(H - \sum_{k=n+1}^N \rho_k \Delta S_k \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \right) \Delta S_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[\rho_n \Delta S_n^2 \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \Delta S_k \Delta S_n \prod_{l=k+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[G_0 \Delta S_n \prod_{l=1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[H \Delta S_n \prod_{l=n+1}^N (1 - \beta_l \Delta S_l) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 23–79.
2. Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 105, № 4, p. 459–479.
3. Föllmer H., Sondermann D. Hedging of nonredundant contingent claims. — In: Contributions to Mathematical Economics. Ed. by W. Hildenbrand and A. Mas-Colell. Amsterdam: North-Holland, 1986, p. 205–223.
4. Föllmer H., Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information. — Applied Stochastic Analysis. Ed. by M. Davis and R. Elliott. London: Gordon & Breach, 1991, p. 389–414.
5. Schweizer M. Mean-variance hedging for general claims. — Ann. Appl. Probab., 1992, v. 2, № 1, p. 171–179.
6. Schweizer M. Variance-optimal hedging in discrete time. — Math. Oper. Res., 1995, v. 20, № 1, p. 1–32.
7. Schweizer M. Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 206–236.
8. Schäl M. On quadratic cost criteria for option hedging. — Math. Oper. Res., 1994, v. 19, p. 131–141.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию
5.V.1997