Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 461–484

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:28:40

© 2004 г.

ВАТУТИН В. А.*, ТОПЧИЙ В. А.**

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ КАТАЛИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ¹⁾

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем по решетке $\mathbf{Z}$, в котором частицы могут гибнуть и производить потомство, лишь находясь в нуле.

В предположении, что базовое марковское случайное блуждание однородно и симметрично, а средняя численность потомства одной частицы равна 1, описывается асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ условного распределения соответствующим образом нормированного двумерного вектора $(\zeta(t), \mu(t))$, где $\zeta(t)$ и $\mu(t)$ — количество частиц в нуле и вне нуля в момент t , при условии $\zeta(t) > 0$.

Ключевые слова и фразы: критический ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, неоднородное ветвящееся случайное блуждание по решетке на прямой, предельные теоремы.

1. Введение. Каталитическим ветвящимся случайным блужданием мы будем называть следующую версию ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по решетке $\mathbf{Z}$. Находящиеся вне нуля частицы блуждают без превращений по решетке $\mathbf{Z}$ до момента попадания в точку $x = 0$. Частицы, попавшие в точку $x = 0$, проводят в этой точке случайное время, а затем либо гибнут, производя в нулевой точке потомство, либо совершают мгновенный прыжок в одно из ненулевых состояний. Эволюция новорожденных частиц не зависит от предыстории процесса, а также перемещения и размножения остальных частиц.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

** Омский филиал Института математики им. В. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск Россия; e-mail: topchij@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Первый автор поддержан РФФИ (грант № 02-01-00266), фондом Президента РФ (грант НШ-1758.2003.1), программой «Современные проблемы теоретической математики» РАН и INTAS (грант № 03-51-5018); второй автор поддержан РФФИ (грант № 03-01-00045), фондом Президента РФ (грант № НШ-2139.2003.1) и программой 1.1 Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики в ИМ СО РАН».

Дадим более формальное описание интересующей нас модели. Будем предполагать, что перемещение частиц по целочисленной решетке $\mathbf{Z}$ (за исключением тех, которые выходят из нуля, не производя потомства) происходит в соответствии с матрицей интенсивностей переходных вероятностей $A = |a(x, y)|_{x \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, y \in \mathbf{Z}}$, причем порождающее случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}$ удовлетворяет следующим условиям. Оно

— однородно: $a(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a(y - x)$ при $x \neq 0$, причем $a(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $a(0) < 0$;

— симметрично: $a(-x) = a(x)$;

— неразложимо: из любого состояния за некоторое число шагов можно попасть в любое другое состояние, или, что то же самое, н.о.д. $\{x \neq 0: a(x) > 0\} = 1$;

— регулярно: $\sum_{x \in \mathbf{Z}} a(x) = 0$.

Интенсивности переходов из нуля пропорциональны интенсивностям переходов из других состояний и имеют вид $a(0, x) = -a(x)/a(0)$. Это означает, что вероятности переходов из состояния в состояние для блуждания однородны по пространству и времени, причем время пребывания в состоянии $x = 0$ имеет экспоненциальное распределение со средним 1, тогда как время пребывания в любом другом состоянии $x \neq 0$ имеет экспоненциальное распределение со средним $-1/a(0)$.

Развитие популяции начинается в момент времени $t = 0$ с одной частицы, расположенной в нуле. Начальная частица, так же как и любая другая частица, оказавшаяся в точке нуль позднее, проводит в этой точке случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с единичным средним, а затем либо переходит в точку $y \neq 0$ с вероятностью $(1 - \alpha)a(0, y)$, либо гибнет с вероятностью α , порождая при этом случайное количество потомков ξ в соответствии с производящей функцией

$$f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}s^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k. \quad (1)$$

Новорожденные частицы появляются в нуле и с момента рождения эволюционируют независимо друг от друга и от остальных частиц. Их превращения стохастически эквивалентны блужданиям с возможной гибелью и ветвлением в нуле для начальной частицы (отметим, что частицы могут делиться, не выходя из нуля, или при любом из возвращений в него).

Пусть $\zeta(t)$ и $\mu(t)$ — количество частиц в нуле и вне нуля в момент t соответственно. Целью работы является описание асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ условного распределения подходящим образом нормированного двумерного вектора $(\zeta(t), \mu(t))$ при условии $\zeta(t) > 0$.

Отметим, что изучение ветвящихся процессов в каталитической среде было начато в работах [4]–[7], где (в несколько более общей ситуации блужданий по решетке $\mathbf{Z}^d$) выведены интегральные уравнения

для производящих функций случайных величин $\zeta(t, x)$ — частиц, находящихся в момент t в точке $x \in \mathbf{Z}^d$, и величины $\eta(t)$ — размера популяции в момент t , а также исследовано асимптотическое поведение моментов указанных величин. Настоящая работа является продолжением статей [1] и [2], в которых для случая $d = 1$ была найдена асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\{\eta(t) > 0\}$ и $\mathbf{P}\{\zeta(t, 0) > 0\}$ и доказаны одномерные условные предельные теоремы для величин $\zeta(t) = \zeta(t, 0)$ и $\eta(t)$ при условиях $\zeta(t) > 0$ и $\eta(t) > 0$ соответственно.

Заметим, что ветвящиеся случайные блуждания в каталитической среде могут быть использованы в качестве аппроксимаций *каталитических суперпроцессов* (см., например, [8] и [9]). Описанию аппроксимаций такого рода посвящена отдельная статья (см. [13]).

Всюду далее предполагается, что выполнены следующие условия:

$$b^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in \mathbf{Z}} x^2 a(x) < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\xi = f'(1) = 1, \quad \sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}\xi^2 \in (0, \infty). \quad (2)$$

Таким образом, рассматриваемый нами процесс ветвления является *критическим* с конечной дисперсией числа непосредственных потомков одной частицы. Положим

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{3/4}}{\sigma \pi^{1/4}} \sqrt{\frac{b(1-\alpha)}{\alpha}} \quad \text{и} \quad c_q \stackrel{\text{def}}{=} \pi K^2 = \frac{2\sqrt{2\pi} b(1-\alpha)}{\sigma^2 \alpha}.$$

Теорема 1 (см. [1]). *Если выполнены условия (2), то при $t \rightarrow \infty$*

$$Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\mu(t) > 0\} \sim Kt^{-1/4}, \quad q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\} \sim \frac{c_q}{\sqrt{t \ln t}}$$

и, кроме того, для всех $s \in [0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[s^{\mu(t)} \mid \eta(t) > 0] = 1 - \sqrt{1-s}.$$

Следствие 1 (см. [1]). *Если выполнены условия (2), то $\mathbf{P}\{\eta(t) > 0\} \sim Kt^{-1/4}$ при $t \rightarrow \infty$ и, кроме того, для всех $s \in [0, 1]$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[s^{\eta(t)} \mid \eta(t) > 0] = 1 - \sqrt{1-s}.$$

Теорема 2 (см. [2]). *Если выполнены условия (2), то при всех $\lambda \in [0, \infty)$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \exp \left\{ -\frac{\lambda \zeta(t)}{\mathbf{E}[\zeta(t) \mid \zeta(t) > 0]} \right\} \mid \zeta(t) > 0 \right\} = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

Приведенные утверждения не содержат информации о распределении случайной величины $\mu(t)$ в такие (редкие, как показывает теорема 1) моменты времени, когда $\zeta(t) > 0$. В данной работе мы восполняем этот пробел и, среди прочего, описываем асимптотическое поведение $\mu(t)$ при условии $\zeta(t) > 0$. Для формулировки основного результата статьи —

теоремы 3 нам понадобится функция $\varphi(\lambda_1)$, являющаяся непрерывным положительным решением уравнения

$$\varphi(\lambda_1) = 1 - \alpha \sigma^2 \lambda_1^{1/2} \int_0^1 \varphi^2(\lambda_1(1-v)) dv^{1/2}, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad (3)$$

(которое, в соответствии с леммой 7 из [3], существует, единственно и, более того, допускает единственное аналитическое продолжение на область $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$). Аналогично определим функцию $D(\lambda_2)$ как единственное ограниченное решение уравнения

$$D(\lambda_2) = 1 - \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_0^1 \frac{D(\lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad (4)$$

которое будет положительным и имеющим аналитическое продолжение на область $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Существование и единственность такого решения будут установлены в лемме 3 и в ходе доказательства формулируемой ниже теоремы 3.

Теорема 3. Если выполнены условия (2) и

$$h''(x) = \sigma^2 + o(|\ln^{-1} x|) \quad \text{при } x \rightarrow +0, \quad (5)$$

то для всех $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \exp \left\{ -\frac{\lambda_1 \zeta(t)}{\mathbf{E}[\zeta(t) | \zeta(t) > 0]} - \frac{\lambda_2 \mu(t)}{c_p \sqrt{t}} \right\} \middle| \zeta(t) > 0 \right\} = \frac{D(\lambda_2)}{1 + \lambda_1},$$

где $c_p^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} b\sqrt{2\pi}(1-\alpha)$.

Таким образом, случайные величины $\zeta(t)$ и $\mu(t)$ — количество частиц вне нуля и в нуле в момент t , — нормированные соответствующим образом, асимптотически независимы в такие моменты t , когда $\zeta(t) > 0$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 3, опишем асимптотическое поведение нормирующей функции $\mathbf{E}\{\zeta(t) | \zeta(t) > 0\}$ при $t \rightarrow \infty$. С этой целью рассмотрим порождающее случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}$ без ветвления. Предположим, что блуждание начинается в нуле в момент времени $t = 0$, и пусть τ_1 — время, проведенное случайным блужданием в нуле до момента первого выхода из него, а τ_2 — промежуток времени между моментом первого выхода частицы из нуля и моментом ее первого возвращения в нуль. Отметим, что в силу определения $a(0,0) = -1$, и, следовательно, $G_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\tau_1 \leq t\} = 1 - e^{-t}$. Положим

$$G_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\tau_2 \leq t\}, \quad G_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha G_1(t) + (1-\alpha) G_1 * G_2(t), \quad (6)$$

где символ $*$ обозначает операцию свертки распределений. Как показано в [1], функция $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\zeta(t)$ допускает представление

$$P(t) = (1 - G_1(\cdot)) * U(t), \quad (7)$$

где

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} G_3^{*k}(t), \quad (8)$$

$G_3^{*0}(t) = 1$, а $G_3^{*k}(t)$, $k \geq 1$, является k -кратной сверткой функции $G_3(t)$ с самой собой.

Оказывается, что функция $P(t)$ обладает рядом приятных свойств.

Лемма 1 (см. [1]). *Функция $P(t)$ монотонно убывает и имеет асимптотическое представление $P(t) \sim c_p t^{-1/2}$ при $t \rightarrow \infty$.*

Последнее утверждение в сочетании с теоремой 1 означает, что

$$\mathbf{E}[\zeta(t) \mid \zeta(t) > 0] = \frac{\mathbf{E}\zeta(t)}{\mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\}} = \frac{P(t)}{q(t)} \sim c^* \ln t, \quad t \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где $c^* \stackrel{\text{def}}{=} c_p c_q^{-1} = \alpha \sigma^2 (4\pi)^{-1} b^{-2} (1 - \alpha)^{-2}$.

2. Случайные блуждания и процессы Беллмана–Харриса.

Для доказательства теоремы 3 мы воспользуемся подходом, предложенным в работах [1] и [2]. С этой целью мы введем вспомогательный процесс Беллмана–Харриса $(Z_1(t), Z_2(t))$ с двумя типами частиц (см. [10], [11], [12]), где через $Z_i(t)$, $i = 1, 2$, обозначено количество частиц i -го типа в процессе в момент времени t . Пусть

$$F_i(t; s_1, s_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \left[s_1^{Z_1(t)} s_2^{Z_2(t)} \mid Z_i(0) = 1 \right], \quad i = 1, 2,$$

обозначают производящие функции вектора $(Z_1(t), Z_2(t))$ в момент $t > 0$ при условии, что в нулевой момент времени процесс начался с одной частицы типа i . Опишем характеристики необходимого нам критического процесса Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Продолжительность жизни частиц первого типа в этом процессе имеет функцию распределения $G_1(t) = \mathbf{P}\{\tau_1 \leq t\} = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$, а в момент гибели такая частица порождает потомков двух типов с производящей функцией $f_1(s_1, s_2) = \alpha f(s_1) + (1 - \alpha) s_2$. Иными словами, с вероятностью αf_k она производит ровно $k = 0, 1, 2, \dots$ частиц первого типа и с вероятностью $1 - \alpha$ ровно одну частицу второго типа, где величины f_k те же, что и в определении (1). Продолжительность жизни частиц второго типа имеет распределение $G_2(t) = \mathbf{P}\{\tau_2 \leq t\}$ (что соответствует распределению времени, проведенного частицей каталитического ветвящегося случайного блуждания вне нуля, где она не может порождать потомков, до ее первого возвращения в нуль при условии, что она вышла из нуля). В момент гибели частица второго типа порождает ровно одну частицу первого типа и ничего более. Таким образом, для частиц второго типа производящая функция числа непосредственных потомков имеет вид $f_2(s_1, s_2) = s_1$.

Определенный нами процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц является критическим и неразложимым, так как максимальный по

модулю корень его матрицы средних

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial s_j}(1, 1) \right\|_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 1, а все элементы матрицы M^2 положительны. Очевидно, что

$$(Z_1(t), Z_2(t)) \stackrel{\text{distr}}{=} (\zeta(t), \mu(t)). \quad (10)$$

Используя явный вид функций $f_i(s_1, s_2)$, $i = 1, 2$, запишем стандартные интегральные уравнения для производящих функций описанного ветвящегося процесса (см., например, [10, гл. VIII, § 1], или [11]):

$$\begin{aligned} F_1(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) \\ &+ \int_0^t \left(\alpha f(F_1(t-u; s_1, s_2)) + (1 - \alpha) F_2(t-u; s_1, s_2) \right) dG_1(u), \\ F_2(t; s_1, s_2) &= s_2(1 - G_2(t)) + \int_0^t F_1(t-u; s_1, s_2) dG_2(u). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $F_2(t; s_1, s_2)$ из второго уравнения в первое, получаем

$$\begin{aligned} F_1(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) + s_2(1 - \alpha)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\ &+ \int_0^t \alpha f(F_1(t-u; s_1, s_2)) dG_1(u) \\ &+ \int_0^t (1 - \alpha) F_1(t-u; s_1, s_2) d(G_1 * G_2(u)). \end{aligned}$$

Полагая $Q(t; s_1, s_2) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F_1(t; s_1, s_2)$, мы видим, что

$$\begin{aligned} Q(t; s_1, s_2) &= (1 - s_1)(1 - G_1(t)) + (1 - s_2)(1 - \alpha)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\ &+ \int_0^t Q(t-u; s_1, s_2) dG_3(u) \\ &- \alpha \int_0^t h(Q(t-u; s_1, s_2)) dG_1(u), \end{aligned} \quad (11)$$

где $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(1-x) - (1-x)$, а функция $G_3(t)$ та же, что и в (6).

В силу (7) и (8) решение уравнения восстановления (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q(t; s_1, s_2) &= (1 - s_1) P(t) + (1 - \alpha)(1 - s_2)(1 - G_2(\cdot)) * G_1 * U(t) \\ &- \alpha \int_0^t h(Q(t-u; s_1, s_2)) d(G_1 * U(u)). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что $(1 - \alpha)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) = (1 - \alpha) G_1(t) - (1 - \alpha) G_2 * G_1(t) = G_1(t) - G_3(t)$ и в силу (6)

$$(1 - \alpha)(1 - G_2(\cdot)) * G_1 * U(t) = G_1 * U(t) - G_3 * U(t) = 1 - P(t).$$

Учитывая, что $G_1(t) = 1 - e^{-t}$, получаем $(G_1 * U(t))' = (1 - G_1(\cdot)) * U(t) = P(t)$. Используя полученные выше соотношения, преобразуем уравнение (12) к виду

$$Q(t; s_1, s_2) = (1 - s_1) P(t) + (1 - P(t))(1 - s_2) - \alpha \int_0^t h(Q(t - u; s_1, s_2)) P(u) du. \quad (13)$$

Пусть $Q(t; s, 1) \stackrel{\text{def}}{=} q(t; s)$. Тогда $q(t) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\} = q(t; 0)$. Подставляя в (13) $s_1 = s$ и $s_2 = 1$, получаем уравнение

$$q(t; s) = (1 - s) P(t) - \alpha \int_0^t h(q(t - u; s)) P(u) du.$$

3. Совместное распределение. Данный пункт посвящен доказательству теоремы 3.

В дальнейшем для удобства символами $C, C_1, C_2, \dots$ будут обозначаться ограниченные положительные постоянные, которые могут быть различными в разных формулах (как правило, в новых формулах постоянные будут нумероваться заново). В частности, соотношение $C_1 \omega_1(t) \leq \omega(t) \leq C_2 \omega_2(t)$, $t \geq t_0$, означает, что для функций $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ существуют постоянные $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ такие, что указанные неравенства верны при всех $t \geq t_0$.

Лемма 2. Для всех $s_1, s_2 \in [0, 1]$ верны оценки

$$0 \leq Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1) \leq 1 - s_2 \quad \text{и} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - q(t; 0)) \\ &= (q(t; 0) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - Q(t; s_1, s_2)). \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. По определению

$$Q(t; s_1, s_2) = 1 - \mathbf{E}s_1^{Z_1(t)} s_2^{Z_2(t)} \geq 1 - \mathbf{E}s_1^{Z_1(t)} = Q(t; s_1, 1) = q(t; s_1).$$

Из последнего соотношения и равенства (13) заключаем, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(t; s_1, s_2) - Q(t; s_1, 1) = Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1) = (1 - s_2)(1 - P(t)) \\ &\quad + \alpha \int_0^t (h(q(t - u; s_1)) - h(Q(t - u; s_1, s_2))) P(u) du \\ &\leq (1 - s_2)(1 - P(t)), \end{aligned}$$

что доказывает (14).

Для доказательства второй части леммы 2 воспользуемся определением функции $Q(t; s_1, s_2)$, согласно которому

$$\begin{aligned} &(Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - q(t; 0)) \\ &= \mathbf{E}[(1 - s_2^{Z_2(t)}) s_1^{Z_1(t)}] - \mathbf{E}[(1 - s_2^{Z_2}) 0^{Z_1(t)}] \\ &= \mathbf{E}[(1 - s_2^{Z_2(t)})(s_1^{Z_1(t)} - 0^{Z_1(t)})] \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$s_1(t) = s_1(t; \lambda_1) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\frac{\lambda_1 q(t)}{P(t)} \right\} = \exp \left\{ -\frac{\lambda_1}{\mathbf{E}[\zeta(t) | \zeta(t) > 0]} \right\}, \quad (16)$$

$$s_2(t) = s_2(t; \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\frac{\lambda_2}{c_p \sqrt{t}} \right\}, \quad (17)$$

$$\Delta_1(u, t; \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} Q(u; 0, s_2(t)) - q(u; 0), \quad (18)$$

$$\Delta_1(t; \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_1(t, t; \lambda_2), \quad (19)$$

$$\Delta_2(u, t; \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} Q(u; s_1(t), s_2(t)) - q(u; s_1(t)), \quad (20)$$

$$\Delta_2(t; \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_2(t, t; \lambda_1, \lambda_2). \quad (21)$$

Отметим, что в силу (17) $s_2(t; \lambda_2) = s_2(t\lambda_2^{-2}; 1)$. Отсюда, учитывая обозначения (16) и (20) и определение функции $Q(t; s_1, s_2)$, получаем

$$\Delta_2(yt, t; \lambda_1, \lambda_2) = \Delta_2 \left(yt, yt; \lambda_1 \frac{q(t) P(yt)}{P(t) q(yt)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right). \quad (22)$$

Введем величины

$$\begin{aligned} \Delta(u, t; \lambda_1, \lambda_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta_2(u, t; \lambda_1, \lambda_2) - \Delta_1(u, t; \lambda_2) \\ &= q(u; 0) - q(u; s_1(t; \lambda_1)) \\ &\quad + \left(Q(u; s_1(t; \lambda_1), s_2(t; \lambda_2)) \right. \\ &\quad \left. - Q(u; 0, s_2(t; \lambda_2)) \right) \geq 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Delta(t; \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_2(t; \lambda_1, \lambda_2) - \Delta_1(t; \lambda_2) \geq 0, \quad (24)$$

неотрицательность которых следует из оценки (15).

Теперь мы можем наметить схему доказательства теоремы 3.

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} H_t(\lambda_1, \lambda_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \left[s_1^{Z_1(t)}(t) s_2^{Z_2(t)}(t) \mid Z_1(t) > 0 \right] \\ &= \frac{F(t; s_1(t), s_2(t)) - F(t; 0, s_2(t))}{P(Z_1(t) > 0)} \\ &= \frac{Q(t; 0, s_2(t)) - Q(t; s_1(t), s_2(t))}{q(t)} = \Theta_t(\lambda_1) - \Psi_t(\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\Theta_t(\lambda_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q(t) - q(t; s_1(t))}{q(t)}, \quad \Psi_t(\lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta(t; \lambda_1, \lambda_2)}{q(t)}.$$

Отметим, что ввиду (24) и (25) $0 \leq \Psi_t(\lambda_1, \lambda_2) \leq 1$ при $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и, кроме того, справедливо представление

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(ty, t; \lambda_1, \lambda_2)}{q(ty)} &= [q(ty)]^{-1} \Delta(ty; \lambda_1 \frac{q(t) P(ty)}{q(ty) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y}) \\ &= \Psi_{ty} \left(\lambda_1 \frac{q(t) P(ty)}{q(ty) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

По теореме 2 в силу совпадения распределений в (10)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta_t(\lambda_1) = \frac{1}{1 + \lambda_1}. \quad (27)$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно найти $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_t(\lambda_1, \lambda_2)$. Поиск этого предела — непростая задача, и в качестве первого шага на этом пути мы докажем в лемме 3 существование и единственность решения уравнения (4) в некоторой правой окрестности $0 \leq \lambda_2 \leq b < \infty$ на действительной оси.

Лемма 3. Уравнение (4) не может иметь более одного решения на полупрямой $\lambda_2 > 0$, причем на полуинтервале $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$, где $\rho = (2\alpha\pi\sigma^2)^{-1}$, оно имеет в точности одно решение.

Доказательство. Пусть $C[0, 2\rho)$ обозначает совокупность всех непрерывных функций на $[0, 2\rho)$. Для функций $T(\cdot) \in C[0, 2\rho)$ введем оператор $\mathcal{L}: C[0, 2\rho) \mapsto C[0, 2\rho)$, задаваемый равенством

$$\mathcal{L}T(\lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 \frac{T(\lambda_2\sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y) dy}{\sqrt{y(1-y)}}.$$

Для $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$ положим $T^0(\lambda_2) \equiv 1$ и $T^{n+1}(\lambda_2) = \mathcal{L}T^n(\lambda_2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Используя неравенство $0 \leq \varphi(\lambda) \leq 1$, следующее из определения (3), и равенство

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \pi, \quad (28)$$

получаем, что при $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$

$$1 \geq T^1(\lambda_2) = 1 - \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y) dy}{\sqrt{y(1-y)}} \geq 1 - \alpha\pi\sigma^2\lambda_2 \geq 0$$

и, по индукции, что при всех $n \geq 1$

$$1 \geq T^{n+1}(\lambda_2) = 1 - \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 \frac{T^n(\lambda_2\sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y) dy}{\sqrt{y(1-y)}} \geq 1 - \alpha\pi\sigma^2\lambda_2 \geq 0. \quad (29)$$

С помощью (29) несложно показать по индукции, что для $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$

$$\begin{aligned} |T^{n+1}(\lambda_2) - T^n(\lambda_2)| &\leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 |T^n(\lambda_2\sqrt{y}) - T^{n-1}(\lambda_2\sqrt{y})| \frac{\varphi(\lambda_2^2 y) dy}{\sqrt{y(1-y)}} \\ &\leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \sup_{0 \leq z \leq \lambda_2} |T^n(z) - T^{n-1}(z)| \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y) dy}{\sqrt{y(1-y)}} \\ &\leq \frac{\lambda_2}{2\rho} \sup_{0 \leq z \leq \lambda_2} |T^n(z) - T^{n-1}(z)| \leq \left(\frac{\lambda_2}{2\rho}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность функций $\{T^n(\lambda_2)\}_{n \geq 1}$ фундаментальна на множестве $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$. Следовательно, уравнение (4) имеет по крайней мере одно решение на этом множестве. Предположим, что существует два различных решения $T^*(\lambda_2)$ и $T^{**}(\lambda_2)$ уравнения (4) на

полуинтервале $0 \leq \lambda_2 < 2\rho$. Ясно, что

$$\begin{aligned} |T^*(\lambda_2) - T^{**}(\lambda_2)| &\leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 |T^*(\lambda_2\sqrt{y}) - T^{**}(\lambda_2\sqrt{y})| \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ &\leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \sup_{0 \leq z \leq \lambda_2} |T^*(z) - T^{**}(z)| \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ &\leq \frac{\lambda_2}{2\rho} \sup_{0 \leq z \leq \lambda_2} |T^*(z) - T^{**}(z)|, \end{aligned}$$

что в силу принципа сжимающих отображений означает существование на полуинтервале $0 \leq \lambda_2 < 2\rho$ не более одного решения уравнения (4). Полученное противоречие показывает, что уравнение (4) имеет в указанной области ровно одно решение.

Вторая часть леммы 3 доказана, а для доказательства первой нам необходимо следующее утверждение.

Лемма 4. На положительной полуоси $\lambda_2 > 0$ уравнение

$$\psi(\lambda_2) = \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 \psi(\lambda_2\sqrt{y}) \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \quad (30)$$

имеет единственное ограниченное решение: $\psi(\lambda_2) \equiv 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если обозначить разность $T^*(\lambda_2) - T^{**}(\lambda_2)$ через $\psi(\lambda_2)$, то только что приведенное в лемме 3 доказательство единственности решения уравнения (4) на полуинтервале $\lambda_2 \in [0, 2\rho)$ означает, что на данном полуинтервале любое решение $\psi(\lambda_2) \equiv 0$. Ясно также, что $\psi(\lambda_2) \equiv 0$ является решением нашего уравнения.

Допустим теперь, что есть ненулевое ограниченное решение $\psi(\lambda_2)$ интересующего нас уравнения. При этом предположении параметр $\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\lambda: \psi(x) = 0, \forall x < \lambda\}$ конечен и уравнение (30) принимает вид

$$\psi(\lambda_2) = \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_{\rho_0/\lambda_2}^1 \psi(\lambda_2\sqrt{y}) \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy.$$

По аналогии с доказательством единственности из предшествующей леммы, учитывая неравенства $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при $x \geq 0$ и $\sqrt{y(1-y)} \geq \sqrt{a}\sqrt{1-y}$ при $y \in [a, 1]$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\rho_0 \leq z \leq \lambda_2} |\psi(z)| &\leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \sup_{\rho_0 \leq z \leq \lambda_2} |\psi(z)| \sqrt{\frac{\lambda_2}{\rho_0}} \int_{\rho_0/\lambda_2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy \\ &= 2\alpha\sigma^2\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \rho_0}{\rho_0}} \sup_{\rho_0 \leq z \leq \lambda_2} |\psi(z)|. \end{aligned}$$

Очевидно, что существуют $\lambda_2 > \rho_0$, достаточно близкие к ρ_0 , такие, что $2\alpha\sigma^2\lambda_2\sqrt{(\lambda_2 - \rho_0)/\rho_0} < 1$. Это в силу предшествующих неравенств влечет $\sup_{\rho_0 \leq z \leq \lambda_2} \psi(z) = 0$, что противоречит определению параметра ρ_0 , если допустить, что он конечен.

Доказательство леммы 4 завершено.

Лемма 4 позволяет нам завершить доказательство леммы 3. В самом деле, если допустить существование двух различных решений уравнения (4) $D_1(\lambda_2) \neq D_2(\lambda_2)$, то их разность $\psi(\lambda_2) = D_1(\lambda_2) - D_2(\lambda_2)$ является решением уравнения из леммы 4, которое, как мы знаем, обязано быть тождественным нулем.

Лемма 3 доказана.

Положим

$$I(t; s_1, s_2) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \int_0^t (h(Q(t-u; s_1, s_2)) - h(q(t-u; s_1))) P(u) du.$$

Из представления (13) и определений (18)–(21) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(t; \lambda_2) &= (1 - P(t))(1 - s_2(t)) - I(t; 0, s_2(t)), \\ \Delta_2(t; \lambda_1, \lambda_2) &= (1 - P(t))(1 - s_2(t)) - I(t; s_1(t), s_2(t)) \end{aligned}$$

и

$$\Delta(t; \lambda_1, \lambda_2) = I(t; 0, s_2(t)) - I(t; s_1(t), s_2(t)). \quad (31)$$

Таким образом, изучение асимптотического поведения $\Delta(t; \lambda_1, \lambda_2)$ сводится к исследованию свойств $I(t; s_1, s_2)$ при подходящем выборе s_1 и s_2 . Положим $y = Q(t-u; s_1, s_2)$ и $x = q(t-u; s_1) = Q(t-u; s_1, 1)$, а затем применим формулу Тейлора

$$h(y) - h(x) = h'(x)(y - x) + h''(\theta) \frac{(y - x)^2}{2},$$

где $\theta = \theta(x, y) \in [x, y]$, а $h''(x) \sim \sigma^2$ при $x \rightarrow +0$ в силу условия (5). В результате мы получаем представление

$$I(t; s_1, s_2) = I_1(t; s_1, s_2) + I_2(t; s_1, s_2), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(t; s_1, s_2) \\ \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \int_0^t h'(q(t-u; s_1))(Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1)) P(u) du, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} I_2(t; s_1, s_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{2} \int_0^t h''(\theta(t-u; s_1, s_2)) \\ &\quad \times (Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1))^2 P(u) du, \end{aligned} \quad (34)$$

причем

$$\theta(v; s_1, s_2) \in [q(v; s_1), Q(v; s_1, s_2)]. \quad (35)$$

Наша следующая цель — изучить свойства $I_i(t; s_1, s_2)$, $i = 1, 2$. В дальнейшем символы $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$ будут использоваться для обозначения любых фиксированных отрезков $[0, b]$, $0 < b < \infty$, символы $\mathcal{X}_\varepsilon$, $\mathcal{X}_{\varepsilon,1}$ — для обозначения отделенных от нуля фиксированных отрезков $[\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b < \infty$, а символ $\mathcal{X}^2$ — для обозначения ограниченных фиксированных прямоугольников $[0, b_1] \times [0, b_2]$ из первого квадранта плоскости.

Лемма 5. Если выполнены условия (2), то для любого $\varepsilon \in (0, 1]$

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \left[1 + (1 - s_1(t; \lambda)) \frac{P(v)}{q(v)} \right] \frac{q(v; s_1(t; \lambda))}{P(v)(1 - s_1(t; \lambda))} \longrightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $t \geq v \geq t^\varepsilon$ и $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

З а м е ч а н и е 1. Асимптотическое представление (9) и определение (16) позволяют переписать утверждение леммы 5 в виде

$$\begin{aligned} q(v; s_1(t; \lambda)) &\sim \frac{P(v)(1 - s_1(t; \lambda))}{1 + (1 - s_1(t; \lambda))(P(v)/q(v))} \\ &\sim \frac{P(v) \lambda}{c^* \ln t (1 + \lambda(\ln v)/\ln t)} \end{aligned} \quad (36)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq v \geq t^\varepsilon$ и $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 5. В соответствии с (27), при всех $\lambda \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t; s_1(t; \lambda))}{q(t)} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}. \quad (37)$$

Так как выражение, стоящее под знаком предела в (37), монотонно по λ и предельная функция ограничена, монотонна, равномерно непрерывна по $\lambda \in [0, \infty)$ и стремится к 1 при $\lambda \rightarrow \infty$, то сходимость в (37) равномерна по $\lambda \in [0, \infty)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon} \left| \frac{(\lambda + 1) q(t; s_1(t; \lambda))}{\lambda q(t)} - 1 \right| \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Заметим, что

$$s_1(t; \lambda) = \exp \left\{ -\lambda \frac{q(v)}{P(v)} \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \right\} = s_1 \left(v; \lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \right)$$

и при $t \geq v \geq t^\varepsilon \rightarrow \infty$

$$\lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \sim \lambda \frac{\ln v}{\ln t} \geq C \lambda \frac{\ln v}{\ln t} \geq C \lambda \varepsilon.$$

Следовательно, при $t > 2$ параметр $\lambda_1 = \lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)}$ содержится в некотором отрезке $\mathcal{K}_{\varepsilon_1, 1}$, если $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Этот факт и равномерность оценки (38) влекут

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon} \left| \frac{\left[\frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \lambda + 1 \right] q \left(v; s_1 \left(v; \lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \right) \right)}{\lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} q(v)} - 1 \right| \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Определение (16) и асимптотическое представление (9) дают $1 - s_1(t, \lambda) \sim \lambda q(t)/P(t)$, $t \rightarrow \infty$, равномерно по $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Из двух последних асимптотических соотношений вытекает, что

$$R \sim \frac{\left[1 + \lambda \frac{q(t)}{P(t)} \frac{P(v)}{q(v)} \right] q(v; s_1(t; \lambda)) P(t)}{\lambda q(v)} \frac{q(v)}{q(t) P(v)} \longrightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Отсюда, учитывая (9), заключаем, что

$$q(v; s(t; \lambda)) \sim \frac{(1 - s_1(t; \lambda)) P(v)}{1 + (1 - s_1(t; \lambda)) (P(v)/q(v))} \sim \frac{P(v)}{c^* \ln t [1 + \lambda (\ln v / \ln t)]}$$

при $t \geq v \geq t^\varepsilon \rightarrow \infty$ равномерно по $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

Доказательство леммы завершено.

Отметим, что, согласно теореме 1, соотношение (36) верно и при $s_1(t; \infty) = 0$.

В доказываемой ниже лемме условимся считать, что $\Delta_2(t; \lambda_1, 0)/(1 - s_2(t; 0)) = \Delta_1(t; 0)/(1 - s_2(t; 0)) = 1$.

Лемма 6. Пусть $\varphi(\lambda)$ — решение уравнения (3). Если выполнены условия (2), то

$$\frac{\Delta_2(t; \lambda_1, \lambda_2)}{1 - s_2(t; 1)} - \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2$ и

$$\frac{\Delta_1(t; \lambda_2)}{1 - s_2(t; 1)} - \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно $\lambda_2 \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы 1

$$q(t; s_1) \leq q(t; 0) = q(t) \leq C(t+1)^{-1/2} \ln^{-1}(t+2)$$

для некоторой постоянной $C > c_q$. Далее, для всех $0 \leq s_{1,0} \leq s_{1,1} \leq 1$

$$\begin{aligned} Q(t; s_{1,0}, s_2) - Q(t; s_{1,1}, s_2) &= \mathbf{E} \left[(s_{1,1}^{Z_1(t)} - s_{1,0}^{Z_1(t)}) s_2^{Z_2(t)} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[s_{1,1}^{Z_1(t)} - s_{1,0}^{Z_1(t)} \right] \leq q(t; 0). \end{aligned} \quad (39)$$

Из (17) и формулы Тейлора следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$1 - s_2(t; \lambda_2) \sim \lambda_2(1 - s_2(t; 1)) \sim \lambda_2 c_p^{-1} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (40)$$

равномерно по $\lambda_2 \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

Полагая $\hat{Q}(t; s) \stackrel{\text{def}}{=} Q(t; s, s)$, несложно проверить, опираясь на оценки (39), определения (18)–(21) и теорему 1, что

$$\begin{aligned} \Delta_2(t; \lambda_1, \lambda_2) &= \hat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2)) + O((t+1)^{-1/2} \ln^{-1}(t+2)), \\ \Delta_1(t; \lambda_2) &= \hat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2)) + O((t+1)^{-1/2} \ln^{-1}(t+2)). \end{aligned}$$

Отсюда и из асимптотического соотношения (40) вытекает, что для завершения доказательства леммы достаточно показать, что

$$c_p \sqrt{t} \hat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2)) - \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (41)$$

равномерно по $\lambda_2 \in \mathcal{K}$. Ввиду (13)

$$\widehat{Q}(t; s) = 1 - s - \alpha \int_0^t h(\widehat{Q}(t - u; s)) P(u) du. \quad (42)$$

Следовательно,

$$\frac{\widehat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2))}{1 - s_2(t; 1)} \leq \frac{1 - s_2(t; \lambda_2)}{1 - s_2(t; 1)} \leq C\lambda_2, \quad t \geq 1. \quad (43)$$

С другой стороны, функция $\varphi(\lambda_2)$ ограничена и непрерывна на полуоси $[0, \infty)$ и, в частности, $\lambda_2 \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0$ при $\lambda_2 \rightarrow 0$. Объединяя это утверждение с (43), мы видим, что левая часть в (41) пренебрежимо мала при малых λ_2 , и нам осталось показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\widehat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2))}{1 - s_2(t; 1)} - \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\lambda_2 \in \mathcal{K}_\varepsilon$. В силу (41) и (40) достаточно установить, что

$$\frac{\widehat{Q}(t; s_2(t; \lambda_2))}{1 - s_2(t; \lambda_2)} - \varphi(\lambda_2^2) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\lambda_2 \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Чтобы проверить этот факт, положим

$$\varphi(t; \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{Q}(t; s_2(t; \sqrt{\theta}))}{1 - s_2(t; \sqrt{\theta})} = \frac{\widehat{Q}(t; s_2(t\theta^{-1}; 1))}{1 - s_2(t\theta^{-1}; 1)}, \quad \theta > 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\widehat{Q}(t(1 - y); s_2(t\theta^{-1}; 1))}{1 - s_2(t\theta^{-1}; 1)} = \varphi(t(1 - y); \theta(1 - y))$$

и, в силу (5) и критичности нашего процесса, верно представление

$$h(x) = \frac{\sigma^2}{2} x^2 + o\left(\frac{x^2}{|\ln x|}\right), \quad x \rightarrow +0.$$

Отсюда, отталкиваясь от равенства (42) и используя аргументы, применявшиеся при доказательстве леммы 9 из [3], можно вывести, что

$$\varphi(t; \theta) = 1 + \gamma(t; \theta) - \frac{\alpha \sigma^2 t}{2} \left[1 - s_2\left(\frac{t}{\theta}; 1\right) \right] \int_0^1 \varphi^2(t(1 - y); \theta(1 - y)) P(ty) dy,$$

где $\gamma(t; \theta) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по значениям θ , принадлежащим произвольному отрезку $[\Theta_0, \Theta_1] \subset (0, \infty)$.

Вспоминая асимптотическое соотношение (40) и лемму 1, получаем

$$\varphi(t; \theta) = 1 + \gamma_1(t, \theta) - \alpha \sigma^2 \theta^{1/2} \int_0^1 \varphi^2(t(1 - y); \theta(1 - y)) dy^{1/2}, \quad (44)$$

где $\gamma_1(t, \theta) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [\Theta_0, \Theta_1]$.

Уравнение (44) совпадает (с точностью до обозначений) с уравнением (46) из [3], и, следовательно, так же как и в [3],

$$\varphi(t; \theta) \rightarrow \varphi(\theta), \quad t \rightarrow \infty,$$

для любого $\theta > 0$ и, кроме того, функция $\varphi(\theta)$ имеет единственное аналитическое продолжение на область $\operatorname{Re} \theta > 0$.

Осталось показать, что доказанная сходимостъ равномерна по $\theta \in \mathcal{K}$. Однако это очевидно, так как отношение $\hat{Q}(t; s)/(1 - s)$ монотонно возрастает при $s \uparrow 1$ и не превосходит единицы и, следовательно, отношение $\varphi(t; \theta) = Q(t; 1, s_2(t; \sqrt{\theta}))/ (1 - s_2(t; \sqrt{\theta}))$ монотонно убывает при $\theta \rightarrow \infty$ и, кроме того, ограничено на любом отрезке $\mathcal{K}$, поскольку предельная функция $\varphi(\theta)$ равномерно непрерывна на любом конечном интервале.

Для завершения доказательства леммы 6 достаточно положить $\theta = \lambda_2^2$.

Обозначим через $\mathcal{U}_t$ множество всех ограниченных функций $\gamma(t; \lambda_1, \lambda_2)$, $\gamma_1(t; \lambda_1, \lambda_2), \dots$ (с нижним индексом или без него), стремящихся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2$. Функции с совпадающими индексами могут быть различны в различных формулах. Для удобства мы также используем запись $\gamma(t) \in \mathcal{U}_t$ для функций $\gamma(t)$, которые не зависят от (λ_1, λ_2) и стремятся к нулю на бесконечности.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\Delta_i^*(u, t; \lambda_1, \lambda_2)$ совпадает с $\Delta_1(u, t; \lambda_2)$ при $i = 1$ и совпадает с $\Delta_2(u, t; \lambda_1, \lambda_2)$ при $i = 2$. В силу (39), (40) и (22) утверждение леммы 6 в новых обозначениях можно записать в виде

$$\begin{aligned} & (1 - s_2(t; 1))^{-1} \Delta_i^*(yt, t; \lambda_1, \lambda_2) \\ &= \frac{1 - s_2(ty; 1)}{1 - s_2(t; 1)} (1 - s_2(ty; 1))^{-1} \Delta_i^* \left(yt, yt; \lambda_1 \frac{q(t) P(yt)}{P(t) q(yt)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right) \\ &= \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y) (1 + \gamma_1(yt; \lambda_1, \lambda_2)) + \gamma_2(yt; \lambda_1, \lambda_2) \\ &= \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y) + \gamma_3(yt; \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (45)$$

где $\gamma_i(t; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{U}_t$, $i = 1, 2, 3$, причем последнее равенство верно, так как $0 \leq \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y) \leq \Lambda$, если $\lambda_2 \in [0, \Lambda]$.

Приступим к изучению асимптотического поведения интегралов (33) и (34) при $t \rightarrow \infty$.

Лемма 7. В условиях теоремы 3 при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{I_1(t; 0, s_2(t))}{q(t)} \rightarrow \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy, \quad (46)$$

$$\frac{I_1(t; s_1(t), s_2(t))}{q(t)} \rightarrow \alpha \sigma^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_1} \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \quad (47)$$

равномерно по $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2$.

Доказательство. Из определений (33) и (18) следует, что $I_1(t; 0, s_2(t)) = \alpha \int_0^t h'(q(t-u; 0)) \Delta_1(t-u, t; \lambda_2) P(u) du$. Согласно формуле Тейлора, $h'(x) \leq \sigma^2 x$ и $h'(x) \sim \sigma^2 x$ при $x \rightarrow +0$. Последние оценки, теорема 1 и леммы 1 и 2 позволяют записать при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{t(1-\varepsilon)}^t h'(q(t-u; 0)) \Delta_1(t-u, t; \lambda_2) P(u) du \\ & \leq \frac{C_1}{\sqrt{t+1}} (1-s_2(t)) \int_{t(1-\varepsilon)}^t q(t-u; 0) du \leq \frac{C_2}{t+1} \int_0^{\varepsilon t} q(u; 0) du \\ & \leq \frac{C_3 \sqrt{\varepsilon t}}{(t+1) \ln(\varepsilon t + 2)} \leq \frac{C \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t\varepsilon} h'(q(t-u; 0)) \Delta_1(t-u, t; \lambda_2) P(u) du \\ & \leq \frac{C_1}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)} (1-s_2(t)) \int_0^{t\varepsilon} P(u) du \\ & \leq \frac{C_2}{(t+1) \ln(t+2)} \sqrt{\varepsilon t} \leq \frac{C \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Следовательно, при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$

$$I_1(t; 0, s_2(t)) = I_{\varepsilon,1}(t) + \sqrt{\varepsilon} O\left(\frac{1}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)}\right), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,1}(t) & \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \int_{t\varepsilon}^{t(1-\varepsilon)} h'(q(t-u; 0)) \Delta_1(t-u, t; \lambda_2) P(u) du \\ & = \alpha \sigma^2 \int_{t\varepsilon}^{t(1-\varepsilon)} (1+\gamma(u)) q(u; 0) \Delta_1(u, t; \lambda_2) P(t-u) du \\ & = \alpha \sigma^2 t \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1+\gamma(yt)) q(yt; 0) \Delta_1(yt, t; \lambda_2) P((1-y)t) dy, \end{aligned}$$

а $\gamma(t) \in \mathcal{U}_t$. В силу теоремы 1 и леммы 1, при $t \rightarrow \infty$ $q(yt; 0)/q(t; 0) \rightarrow 1/\sqrt{y}$ и $P((1-y)t)/P(t) \rightarrow 1/\sqrt{1-y}$ равномерно по $y \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Отсюда, учитывая еще раз теорему 1, лемму 1, представление (22) с $\lambda_1 = 0$, сходимость интеграла в (28) и то, что отношение u/t отделено от нуля и не превосходит единицы, а также вспоминая соотношение (45), получаем

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,1}(t) & = (1+\gamma_1(t; \lambda_2)) \alpha \sigma^2 t (1-s_2(t; 1)) q(t) P(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ & \quad + \gamma_2(t; \lambda_2) \alpha \sigma^2 (1-s_2(t; 1)) t q(t) P(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ & = (1+\gamma_3(t; \lambda_2)) \alpha \sigma^2 \lambda_2 q(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + \gamma_4(t; \lambda_2) q(t), \end{aligned}$$

где $\gamma_j(t; \lambda) \in \mathcal{U}_t$, $j = 1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$$\frac{I_{\varepsilon,1}(t)}{q(t)} \longrightarrow \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\lambda_2 \in \mathcal{K}$. Последнее совместно с (50) доказывает (46).

Доказательство соотношения (47) проводится по такой же схеме. Мы отметим лишь основные изменения, которые необходимо внести по сравнению с доказательством соотношения (46).

Ввиду оценки $q(u; s_1) \leq q(u; 0)$ неравенства (48) и (49) остаются справедливыми при замене $q(u; s_1(t))$ на $q(u; 0)$. Далее, по лемме 5 для любых фиксированных $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и $y \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$

$$q\left(yt, \exp\left\{-\frac{\lambda_1 q(t)}{P(t)}\right\}\right) = q(yt) \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} (1 + \gamma(t; y)), \quad (51)$$

где $\gamma(t; y) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Отсюда, повторяя аргументы, использованные при изучении свойств интеграла $I_{\varepsilon,1}(t)$, и применяя (51) вместо теоремы 1, мы последовательно получаем

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,2}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha t \int_{\varepsilon}^{(1-\varepsilon)} h'(q((1-y)t; s_1(t; \lambda_1))) \Delta_2((1-y)t, t; \lambda_1, \lambda_2) P(yt) dy \\ &= (1 + \gamma_1(t; \lambda_1, \lambda_2)) \frac{1 - s_2(t; 1)}{1 + \lambda_2} \alpha \sigma^2 t \lambda_1 q(t) P(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ &\quad + \gamma_2(t; \lambda_1, \lambda_2) \alpha \sigma^2 (1 - s_2(t; 1)) t q(t) P(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ &= \alpha \sigma^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_2} (1 + \gamma_3(t; \lambda_1, \lambda_2)) q(t) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\ &\quad + \gamma_4(t; \lambda_1, \lambda_2) q(t), \end{aligned}$$

где $\gamma_j(t; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{U}_t$, $j = 1, 2, 3, 4$, и

$$\frac{I_{\varepsilon,2}(t)}{q(t)} \longrightarrow \alpha \sigma^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_1} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2$. Последнее в сочетании с определением $I_1(t; s_1(t), s_2(t))$ убеждает нас в справедливости соотношения (47).

Лемма доказана.

Лемма 8. В условиях теоремы 3 для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$

$$\Psi_{ty}\left(\lambda_1 \frac{q(t) P(ty)}{q(ty) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y}\right) - \Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $y \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2$.

Доказательство. Используя определение $\Delta(u, t; \lambda_1, \lambda_2)$, данное в (23), и представление (26), имеем

$$\begin{aligned} & \Psi_{ty} \left(\lambda_1 \frac{q(t) P(ty)}{q(ty) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right) - \Psi_{ty} (\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \\ &= [q(ty)]^{-1} \frac{\Delta_2 \left(ty; \lambda_1 \frac{q(t) P(ty)}{q(ty) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right) - \Delta_2 (ty; \lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y})}{\Delta_2 (ty; \lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y})} \end{aligned}$$

Так как

$$\Delta_2(u; \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda_1 Z_1(u) \frac{q(u)}{P(u)} \right\} \left(1 - \exp \left\{ -Z_2(u) \frac{\lambda_2}{\sqrt{u}} \right\} \right) \right],$$

то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} J &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \Delta_2 \left(ty; \lambda_1 \frac{q(t) P(u)}{q(u) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right) - \Delta_2 (ty; \lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \right| \\ &\leq \mathbf{E} \left[\left| \exp \left\{ -\lambda_1 Z_1(ty) \frac{q(ty)}{P(ty)} \right\} - \exp \left\{ -\lambda_1 Z_1(ty) \frac{q(t)}{P(t)} \right\} \right|; Z_1(ty) > 0 \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что, согласно теореме 1 и лемме 1,

$$\frac{q(ty)}{P(ty)} = \frac{q(t)}{P(t)} (1 + \gamma(t; y)),$$

где $\gamma(t; y) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, равномерно по $y \in (\varepsilon, 1]$ для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$, и существует функция $\gamma(t) \in \mathcal{U}_t$ такая, что

$$r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in (\varepsilon, 1]} \frac{q(ty)}{P(ty)} = \frac{q(t)}{P(t)} (1 + \gamma(t)).$$

В силу неравенства треугольника для любых $a > 0$ и $y \in (\varepsilon, 1]$

$$\begin{aligned} \left| \exp \left\{ -a \frac{q(ty)}{P(ty)} \right\} - \exp \left\{ -a \frac{q(t)}{P(t)} \right\} \right| &\leq \exp \left\{ -a \frac{q(ty)}{P(ty)} \right\} - \exp \{ -ar(t) \} \\ &\quad + \exp \left\{ -a \frac{q(t)}{P(t)} \right\} - \exp \{ -ar(t) \}. \end{aligned}$$

Временно будем использовать символ $r^*(t)$ для обозначения любой из функций $r(t)$, $\frac{q(t)}{P(t)}$ или $\frac{q(ty)}{P(ty)}$. Очевидно, что эти три функции асимптотически эквивалентны. Как следует из теоремы 2, при $t \rightarrow \infty$ величина

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\exp \{ -\lambda_1 Z_1(ty) r^*(t) \}; Z_1(ty) > 0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \{ -\lambda_1 Z_1(ty) r^*(t) \} \mid Z_1(ty) > 0 \right] q(ty) \end{aligned}$$

эквивалентна дроби $q(ty)/(1 + \lambda_1)$ равномерно по $\lambda_1 \in \mathcal{K}$ и равномерно по $y \in (\varepsilon, 1]$. Последнее влечет соотношение $J = o(q(ty))$, $t \rightarrow \infty$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 9. При выполнении условий теоремы 3

$$\frac{I_2(t; 0, s_2(t)) - I_2(t; s_1(t), s_2(t))}{q(t)} = -\alpha\sigma^2\lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2\sqrt{y}) \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + r_{\varepsilon}(t; \lambda_1, \lambda_2),$$

где

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2} |r_{\varepsilon}(t; \lambda_1, \lambda_2)| = 0.$$

Доказательство. Определения (34), (18) и (20) позволяют записать

$$\begin{aligned} & I_2(t; 0, s_2(t)) - I_2(t; s_1(t), s_2(t)) \\ &= \frac{\alpha\sigma^2}{2} \int_0^t (\Delta_1^2(t-u, t; \lambda_2) - \Delta_2^2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2)) P(u) du \\ &+ \alpha \int_0^t \frac{\sigma^2 - h''(\theta(t-u; s_1(t), s_2(t)))}{2} \Delta_2^2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) P(u) du \\ &- \alpha \int_0^t \frac{\sigma^2 - h''(\theta(t-u; 0, s_2(t)))}{2} \Delta_1^2(t-u, t; \lambda_2) P(u) du \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha\sigma^2}{2} I_3 + \alpha I_{3,1} - \alpha I_{3,2}. \end{aligned} \quad (52)$$

В силу (14), теоремы 1 и свойств промежуточного значения $\theta(\ast)$ из (35)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max \left\{ \theta(u; s_1(t), s_2(t)), \theta(u, 0, s_2(t)) \right\} \leq Q(u; 0, s_2(t)) \\ &\leq q(u) + 1 - s_2(t) \leq C_1(u+1)^{-1/2} \ln^{-1}(u+2) + C_2(t+1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (5), несложно заключить, что

$$0 \leq \sigma^2 - h''(\theta(u; s_1(t), s_2(t))) = l_1(u) \ln^{-1}(u+2)$$

и

$$0 \leq \sigma^2 - h''(\theta(u; 0, s_2(t))) = l_2(u) \ln^{-1}(u+2),$$

где $l_i(u) \in \mathcal{U}_t$, $i = 1, 2$. Последние оценки и леммы 1 и 2 влекут при любом $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_{3,i} \leq \int_0^t l_i(t-u) \ln^{-1}(t-u+2)(1-s_2(t))^2 P(u) du \\ &\leq \frac{C_1}{(t+1)\sqrt{t+1} \ln(t+2)} \int_{t\varepsilon}^{t(1-\varepsilon)} l_i(t-u) du \\ &+ \frac{C_2}{(t+1)\sqrt{t+1}} \int_{t(1-\varepsilon)}^t \frac{du}{\ln(t-u+2)} + \frac{C_3}{(t+1) \ln(t+2)} \int_0^{t\varepsilon} P(u) du \\ &= o\left(\frac{1}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)}\right) + O(1) \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t+1} \ln(t+2)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \ln t \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty)} (I_{3,1} + I_{3,2}) = 0. \quad (53)$$

Интеграл I_3 в (52) можно записать в виде

$$I_3 = - \int_0^t \Delta(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) (\Delta_1(t-u, t; \lambda_2) + \Delta_2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2)) P(u) du.$$

Проведем исследование асимптотического поведения данного интеграла при $t \rightarrow \infty$ отдельно в каждом из трех промежутков: $[0, t\varepsilon)$, $[t\varepsilon, t(1-\varepsilon))$ и $[t(1-\varepsilon), t]$, где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ произвольное фиксированное.

Заметим, что в силу (23), леммы 2 и теоремы 1

$$0 \leq \Delta(u, t; \lambda_1, \lambda_2) \leq q(u; 0) - q(u; s_1(t)) \leq q(u; 0) \leq \frac{C}{\sqrt{u+1} \ln(u+2)}.$$

Отсюда с помощью лемм 1 и 2 легко вывести, что

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,3}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t(1-\varepsilon)}^t \Delta(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad \times (\Delta_1(t-u, t; \lambda_2) + \Delta_2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2)) P(u) du \\ &\leq \frac{C_1}{\sqrt{t+1}} \int_0^{t\varepsilon} \Delta(u, t; \lambda_1, \lambda_2) (\Delta_1(u, t; \lambda_2) + \Delta_2(u, t; \lambda_1, \lambda_2)) du \\ &\leq \frac{C_2(1-s_2(t))}{\sqrt{t+1}} \int_0^{t\varepsilon} \frac{du}{\sqrt{u+1} \ln(u+2)} \leq \frac{C\lambda_2}{t+1} \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{\ln(\varepsilon t+2)} \end{aligned}$$

и, следовательно, для любого $\mathcal{K}^2$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \ln t \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2} I_{\varepsilon,3}(t) = 0. \quad (54)$$

Аналогичные аргументы показывают, что

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,4}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t\varepsilon} \Delta(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad \times (\Delta_1(t-u, t; \lambda_2) + \Delta_2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2)) P(u) du \\ &\leq \frac{C_1}{(t+1) \ln(t+2)} \int_0^{t\varepsilon} P(u) du \leq \frac{C}{(t+1) \ln(t+2)} \sqrt{\varepsilon t} \end{aligned}$$

и, следовательно, как и в (54),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \ln t \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2} I_{\varepsilon,4}(t) = 0. \quad (55)$$

При помощи аргументов, сходных с теми, которые были использованы ранее при доказательстве данной леммы, можно также показать,

привлекая леммы 6 и 8, ограниченность $\lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y)$, равенство (28) и замечание 2, что

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon,5}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t\varepsilon}^{t(1-\varepsilon)} \Delta(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) \Delta_1(t-u, t; \lambda_2) P(u) du \\
 &= t \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \Delta(ty, t; \lambda_1, \lambda_2) \Delta_1(ty, t; \lambda_2) P(t(1-y)) dy \\
 &= t \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} q(ty) \Psi_{ty} \left(\lambda_1 \frac{q(t) P(u)}{q(u) P(t)}, \lambda_2 \sqrt{y} \right) \Delta_1(ty, t; \lambda_2) P(t(1-y)) dy \\
 &= t(1-s_2(t; 1)) P(t) q(t) \\
 &\quad \times \left[\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \lambda_2 \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + \gamma_1(t; \lambda_1, \lambda_2) \right] \\
 &= \left[\lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + \gamma_2(t; \lambda_1, \lambda_2) \right] q(t),
 \end{aligned}$$

где $\gamma_i(t; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$, и, кроме того,

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon,6}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t\varepsilon}^{t(1-\varepsilon)} \Delta(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) \Delta_2(t-u, t; \lambda_1, \lambda_2) P(u) du \\
 &= t \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \Delta(ty, t; \lambda_1, \lambda_2) \Delta_2(ty, t; \lambda_1, \lambda_2) P(t(1-y)) dy \\
 &= \left[\lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + \gamma_1(t; \lambda_1, \lambda_2) \right] q(t),
 \end{aligned}$$

где $\gamma_1(t; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{U}_1$. Итак,

$$\frac{I_{\varepsilon,5} + I_{\varepsilon,6}}{q(t)} = 2\lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + \gamma(t; \lambda_1, \lambda_2), \quad (56)$$

где $\gamma(t; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{U}_t$.

Используя в представлении (52) оценки (53)–(56), несложно завершить доказательство леммы 9.

Из равенств (31) и (32) и лемм 7 и 9 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 3

$$\begin{aligned}
 \Psi_t(\lambda_1, \lambda_2) &= \alpha \sigma^2 \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_1} \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\
 &\quad - \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\Psi_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + r_{1,\varepsilon}(t; \lambda_1, \lambda_2),
 \end{aligned}$$

или, с учетом соотношений (25) и (27),

$$\begin{aligned}
 H_t(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{1 + \lambda_1} - \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{H_{ty}(\lambda_1, \lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy \\
 &\quad + r_{2,\varepsilon}(t; \lambda_1, \lambda_2), \quad (57)
 \end{aligned}$$

где

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2} |r_{i,\varepsilon}(t; \lambda_1, \lambda_2)| = 0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть, как и прежде, $\rho = (2\alpha\pi\sigma^2)^{-1}$.

Лемма 10. В условиях теоремы 3 при всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, \infty) \times [0, \rho]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_t(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{D(\lambda_2)}{1 + \lambda_1}.$$

Доказательство. Легко убедиться в том, что функция $H(\lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} D(\lambda_2)(1 + \lambda_1)^{-1}$ в интересующей нас области изменения параметров λ_1, λ_2 удовлетворяет соотношению

$$H(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{1 + \lambda_1} - \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_0^1 \frac{H(\lambda_1, \lambda_2\sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy. \quad (58)$$

Более того, применяя рассуждения, использованные в лемме 3 при доказательстве существования и единственности решения уравнения (4), можно показать, что не существует функции $H(\lambda_1, \lambda_2)$, отличной от $D(\lambda_2)(1 + \lambda_1)^{-1}$, которая удовлетворяла бы уравнению (58) на множестве $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, \infty) \times [0, \rho]$. Отсюда и из (57) нетрудно вывести, что при любом $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} & |H_t(\lambda_1, \lambda_2) - H(\lambda_1, \lambda_2)| \\ & \leq \alpha\sigma^2\lambda_2 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left| H_{ty}(\lambda_1, \lambda_2\sqrt{y}) - H(\lambda_1, \lambda_2\sqrt{y}) \right| \frac{\varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + r_\varepsilon(t; \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned}$$

где $\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{K}^2} |r_\varepsilon(t; \lambda_1, \lambda_2)| = 0$ для любого $\mathcal{K}^2 \subseteq [0, \infty) \times [0, \rho]$.

Полагая

$$M_t(\lambda_1; \lambda_2) = \sup_{0 \leq z \leq \lambda_2} |H_t(\lambda_1, z) - H(\lambda_1, z)|, \quad \mathcal{M}_T(\lambda_1; \rho) = \sup_{t \geq T} M_t(\lambda_1; \rho)$$

и вспоминая (28), легко убедиться в том, что для достаточно больших t и всех $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_2 \in [0, \rho]$

$$|H_t(\lambda_1, \lambda_2) - H(\lambda_1, \lambda_2)| \leq g(\varepsilon) + 2^{-1} \sup_{y \geq \varepsilon} M_{ty}(\lambda_1; \rho) = g(\varepsilon) + 2^{-1} \mathcal{M}_{t\varepsilon}(\lambda_1; \rho),$$

где функция $g(\varepsilon)$ такова, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} g(\varepsilon) = 0$. Следовательно, при $t \geq t_0(\varepsilon)$

$$M_t(\lambda_1; \lambda_2) \leq g(\varepsilon) + 2^{-1} \mathcal{M}_{t\varepsilon}(\lambda_1; \rho).$$

Поэтому для всех достаточно больших T

$$\mathcal{M}_T(\lambda_1; \rho) \leq g(\varepsilon) + 2^{-1} \mathcal{M}_{T\varepsilon}(\lambda_1; \rho).$$

Вводя обозначение $\mathcal{M}(\lambda_1; \rho) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{M}_T(\lambda_1; \rho)$, мы видим, что

$$\mathcal{M}(\lambda_1; \rho) \leq g(\varepsilon) + 2^{-1} \mathcal{M}(\lambda_1; \rho).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, это означает, что $\mathcal{M}(\lambda_1; \rho) = 0$.

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Лемма 10, соотношения (25) и (10) и теорема единственности для преобразований Лапласа позволяют сделать вывод о существовании функции $W(\lambda_1, \lambda_2)$, аналитической в области $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ и такой, что предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \exp \left\{ -\frac{\lambda_1 \zeta(t)}{\mathbf{E}[\zeta(t) \mid \zeta(t) > 0]} - \frac{\lambda_2 \mu(t)}{c_p \sqrt{t}} \right\} \mid \zeta(t) > 0 \right\} = W(\lambda_1, \lambda_2)$$

существует для всех λ_1, λ_2 , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Более того,

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = H(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{D(\lambda_2)}{1 + \lambda_1} \quad \text{при } \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty) \times [0, \rho].$$

Отсюда, полагая $\lambda_1 = 0$, заключаем, что существует и притом единственное аналитическое продолжение функции $D(\lambda_2)$ на область $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Мы сохраним для продолженной функции прежнее обозначение $D(\lambda_2)$. Ясно, что $D(\lambda_2)$ является на полупрямой $\lambda_2 > 0$ преобразованием Лапласа некоторого невырожденного распределения и, следовательно, не возрастает и положительна при $\lambda_2 > 0$. Этот факт в свою очередь означает, что

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} H_t(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{D(\lambda_2)}{1 + \lambda_1}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty) \times [0, \infty),$$

и для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что $D(\lambda_2)$ является решением уравнения (4) на всей полупрямой. Напомним, что единственность такого решения (если оно существует) была доказана в лемме 3. Оценка (15) и определение (25) влекут при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ соотношение $0 \leq H_t(\lambda_1, \lambda_2) \leq 1$, которое, ввиду неравенства $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $x \geq 0$, дает

$$0 \leq \frac{H_t(\lambda_1, \lambda_2) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} \leq \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \quad \text{при всех } y \in (0, 1), \lambda_2 \geq 0.$$

Применяя к представлению (57) теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем

$$D(\lambda_2) = 1 - \alpha \sigma^2 \lambda_2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{D(\lambda_2 \sqrt{y}) \varphi(\lambda_2^2 y)}{\sqrt{y(1-y)}} dy + r_{0,\varepsilon}(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{X}^2} |r_{0,\varepsilon}(\lambda_1, \lambda_2)| = 0$. Поскольку $0 \leq D(\lambda_2) \leq 1$ при любом $\lambda_2 > 0$, мы можем применить к последнему представлению теорему Лебега о мажорируемой сходимости при $\varepsilon \downarrow 0$ и получить, что $D(\lambda_2)$ является решением уравнения (4) на всей полупрямой.

Доказательство теоремы 3 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Topchii V. A., Vatutin V. A., Yarovaya E. B. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. — Theory Probab. Math. Statist., 2003, v. 69, p. 158–172.
2. Topchii V. A., Vatutin V. A. Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk. — Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. (electronic), 2003, v. 6, p. 325–332; <http://dmtcs.loria.fr/proceedings/html/dmAC0130.abs.html>
3. Ватутин В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, начинающиеся с большого числа частиц. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 4, p. 527–541.
4. Alberverio S., Bogachev L. V. Branching random walk in a catalytic medium. I: Basic equations. — Positivity, 2000, v. 4, № 1, p. 41–100.
5. Alberverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. C. R. Acad. Sci. Paris, 1998, v. 326, № 8, p. 975–980; Corrections: *ibid.*, v. 327, № 6, p. 585.
6. Богачев Л. В., Яровая Е. Б. Предельная теорема для надкритического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с одним источником. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, в. 5, с. 1086–1088.
7. Богачев Л. В., Яровая Е. Б. Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. — Докл. РАН, 1998, т. 363, № 4, с. 439–442.
8. Fleischmann K. Superprocesses in catalytic media. — Measure-valued Processes, Stochastic Partial Differential Equations, and Interacting Systems (Montréal, 1992). Ed. by D. A. Dawson et al., Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, p. 99–110. (CRM Proc. Lecture Notes, v. 5.)
9. Fleischmann K., Le Gall J.-F. A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. — Probab. Theory Related Fields, 1995, v. 102, № 1, p. 63–82.
10. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
11. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
12. Ватутин В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 503–514.
13. Vatutin V., Xiong J. Some limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks. — Acta Mathematica Sinica (в печати).

Поступила в редакцию
19.I.2004