Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Расширенная версия теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 503–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:55:03

© 2004 г.

РОХЛИН Д. Б.*

РАСШИРЕННАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ ДАЛАНГА–МОРТОНА–ВИЛЛИНДЖЕРА ПРИ ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОРТФЕЛЬ

Рассмотрено обобщение теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера (первой фундаментальной теоремы финансовой математики) при наличии случайных выпуклых ограничений на портфели активов. Безарбитражность рынка охарактеризована как в терминах естественного обобщения понятия мартингальной меры, так и в терминах носителей условных распределений приращений цен. Предлагаемый подход опирается на известные результаты, относящиеся к случаю идеального рынка, и связан с теорией измеримых многозначных отображений.

Ключевые слова и фразы: арбитраж, бесплатный ленч, измеримые многозначные отображения, носитель условного распределения, мартингальные меры, разложение Дуба.

Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{n=0}^N, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ и $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ — d -мерная стохастическая последовательность, согласованная с данной фильтрацией. Случайные векторы S_n служат для описания цен активов в моменты времени n . Относительно S_n не делается никаких предположений, кроме $\mathcal{F}_n$ -измеримости. Будем считать, что мера $\mathbf{P}$ продолжена на пополнение $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ σ -алгебры $\mathcal{F}$.

Для описания ограничений на портфели активов введем последовательность определенных на Ω многозначных отображений $\omega \mapsto B_n(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, $n = 1, \dots, N$. Случайные векторы, удовлетворяющие условию $\gamma_n(\omega) \in B_n(\omega)$ при почти всех ω и являющиеся $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми, будем называть допустимыми портфелями в момент времени n . Далее предполагается, что портфели $\gamma_n = 0$ допустимы. Дополнительные условия (измеримость и выпуклость) накладываются на B_n в п. 2.

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим обычное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Пусть капитал инвестора X^γ представляет собой суммарный выигрыш при ставках γ на приращения случайного процесса S :

$$X_n^\gamma = \sum_{k=1}^n \langle \gamma_k, \Delta S_k \rangle, \quad \Delta S_k = S_k - S_{k-1}.$$

* Ростовский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Зорге, 5, 344090 Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

Условие отсутствия арбитража NA (No Arbitrage) состоит в том, что ни при какой системе ставок нельзя получить прибыль без риска:

$$X_N \geq 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \implies X_N = 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Ставшая уже классической теорема Даланга–Мортон–Виллинджера (DMW) [1] утверждает, что для безарбитражности идеального рынка ($B_n = \mathbf{R}^d$) необходимо и достаточно существования эквивалентной $\mathbf{P}$ вероятностной меры $\mathbf{Q}$, относительно которой процесс цен активов S является мартингалом. Эквивалентным образом, можно требовать, чтобы капитал X^γ был локальным (или, что то же самое, обобщенным) $\mathbf{Q}$ -мартингалом при любой стратегии γ и $S \in L^1(\mathbf{Q})$. Данная теорема называется также первой фундаментальной теоремой теории расчетов финансовых активов [2]. Она доказана разными методами в работах [1], [3]–[7].

Обобщения теоремы DMW при наличии нетривиальных ограничений B_n на портфели активов рассматривались в работах [8]–[13]. Естественная постановка задачи здесь состоит в том, чтобы искать такие вероятностные меры $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, относительно которых капитал X^γ является локальным супермартингалом при любой стратегии γ и $S \in L^1(\mathbf{Q})$. В работе [13] указано, что при соответствующих требованиях измеримости многозначных отображений B_n это означает, что случайные векторы $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})$ при почти всех ω должны принадлежать полюсу конуса, порожденного множеством ограничений B_n . Аналогичные условия использовались в работах [8], [10]–[12]. В диссертации [9] рассматривались ограничения более абстрактного вида, чем $\gamma_n \in B_n$.

Было выяснено, что для того, чтобы из безарбитражности рынка вытекало существование меры $\mathbf{Q}$ с описанными свойствами (если B_n не являются полиэдрами, как в [8], [12]), требуется ввести дополнительные условия. Как будет показано ниже, наиболее точные условия такого рода носят чисто геометрический характер и касаются конусов, порожденных множествами ограничений и носителей $K_n(\omega)$ условных распределений приращений цен ΔS_n относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$.

Весьма схожие результаты независимым образом были получены в работе [13]. Хотя в ней также используется техника, связанная с измеримыми многозначными отображениями, методы [13] существенно другие. При этом указанная работа ориентирована не только на анализ портфельных ограничений, но и на конструкцию мер специального вида, которая является новой и в случае $B_n = \mathbf{R}^d$. Условия [13] рассматриваются в п. 3.

В настоящей статье предлагается подход, который существенно опирается на известные результаты, относящиеся к случаю идеального рынка. Его основная идея состоит в том, что из процесса цен S вычитается предсказуемый процесс A , приращения которого принимают значения в полюсе конуса, порожденного множеством ограничений. При

этом A подбирается так, чтобы выпуклые оболочки носителей условных распределений приращений процесса $M = S - A$ содержали начало координат в качестве относительно внутренней точки. Согласно расширенной версии теоремы DMW [6] (см. ниже теорему 1), отсюда вытекает существование эквивалентной мартингальной меры $\mathbf{Q}$ для M . Представление $S = A + M$ оказывается тогда разложением Дуба относительно меры $\mathbf{Q}$, а данная мера — искомой.

Основные результаты работы содержатся в п. 3. В п. 4 предлагаемый подход применяется для исследования задачи с ограничениями, зависящими от капитала [11].

В связи с тем, что результаты [13] учитывались при переработке статьи, отметим, что ключевой результат настоящей работы (теорема 2) анонсирован в сообщении [14] до появления работы [13].

1. Основные обозначения и вспомогательные результаты.

Пусть пространство L^0 всех (классов эквивалентностей) $\mathcal{F}$ -измеримых случайных величин с конусом неотрицательных элементов L_+^0 наделено топологией сходимости по вероятности. Замыкание множества $A \subset L^0$ в данной топологии обозначим $\text{cl}_0(A)$. Замыкание множества в банаховом пространстве $L^p = L^p(\mathbf{P})$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим $\text{cl}_p(A)$.

Через C_N обозначим множество случайных величин y , для которых существуют такие допустимые портфели $\gamma_n \in B_n$ $\mathbf{P}$ -п.н., что $X_N^\gamma \geq y$ $\mathbf{P}$ -п.н. Наряду с уже рассмотренным условием NA: $C_N \cap L_+^0 = \{0\}$, введем также условие отсутствия бесплатного ленча NFL (No Free Lunch): $\text{cl}_0(C_N) \cap L_+^0 = \{0\}$. Как и NA, данное условие инвариантно относительно замены меры $\mathbf{P}$ на эквивалентную. Еще одно условие NFL_p: $\text{cl}_p(C_N \cap L^p) \cap L_+^0 = \{0\}$, $1 \leq p \leq \infty$, запрещает бесплатный ленч в L^p .

Далее через ri , conv , lin , cone , aff обозначаются относительная внутренность, выпуклая, линейная, коническая и аффинная оболочки множества соответственно (см. [15]). Если A — конус, то A° , A^* — полярный и сопряженный конусы: $-A^* = A^\circ = \{y \in \mathbf{R}^d: \langle y, x \rangle \leq 0, x \in A\}$. Через $A \pm B = \{z = x \pm y, x \in A, y \in B\}$ обозначим векторные сумму и разность множеств. Положим также $\text{gauf } A = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda A$. Для выпуклого множества A его коническая оболочка совпадает с $\text{gauf } A$.

При $\alpha \neq 0$ элемент $\alpha \in \mathbf{R}^d$ определяет гиперплоскость $H^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^d: \langle \alpha, x \rangle = 0\}$ и полупространство $H_\geq^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^d: \langle \alpha, x \rangle \geq 0\}$. При $\alpha = 0$ имеем $H^\alpha = H_\geq^\alpha = \mathbf{R}^d$. Норму элемента $x \in \mathbf{R}^d$ обозначим через $|x|$.

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ — σ -алгебра борелевских множеств $\mathbf{R}^d$. Введем регулярные условные вероятности приращений цен

$$\mu_n(\omega, G) = \mathbf{P}(\Delta S_n \in G \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega), \quad G \in \mathcal{B},$$

и носители мер $\mu_n(\omega, \cdot)$:

$$K_n(\omega) = \text{supp } \mu_n(\omega, \cdot) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: \mu_n(\omega, \{y: |y - x| \leq \varepsilon\}) > 0 \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

Рассмотрим множество эквивалентных $\mathbf{P}$ вероятностных мер $\mathbf{Q}$ таких, что $S \in L^1(\mathbf{Q})$, и выпишем соответствующие разложения Дуба относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$:

$$S_n = A_n^{\mathbf{Q}} + M_n^{\mathbf{Q}}. \quad (1.1)$$

Здесь $A_n^{\mathbf{Q}}$ — предсказуемая последовательность, причем $A_0^{\mathbf{Q}} = 0$, $\Delta A_n^{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})$, $n \geq 1$, и $M_n^{\mathbf{Q}}$ — $\mathbf{Q}$ -мартингал.

Предполагая, что производные Радона–Никодима $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ равномерно ограничены, введем следующее множество вероятностных мер:

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) = \left\{ \mathbf{Q} \sim \mathbf{P}: \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty, S \in L^1(\mathbf{Q}), \Delta A_n^{\mathbf{Q}} \in (\text{cone } B_n)^\circ \text{ } \mathbf{P}\text{-п.н.} \right\}.$$

Рассматриваемый рынок ценных бумаг обозначим через $\mathcal{M}(S, B)$. Ясно, что в случае идеального рынка $\mathcal{M}(S, \mathbf{R}^d)$ множество $\mathcal{P}(\mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ состоит из эквивалентных $\mathbf{P}$ мартингалльных мер. Сформулируем в этих обозначениях расширенную версию теоремы DMW (см. [6], [2, с. 544]).

Теорема 1. Пусть $B_n = \mathbf{R}^d$, тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) выполнено условие NA;
- (b) $\mathcal{P}(\mathbf{P}; \mathbf{R}^d) \neq \emptyset$;
- (c) $0 \in \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega))$ $\mathbf{P}$ -п.н., $n = 1, \dots, N$.

Предлагаемый ниже метод позволяет при рассмотрении задачи с ограничениями на портфель свести значительную часть трудностей к доказательству импликации (c) $\implies$ (b) теоремы 1 (см. доказательство леммы 8). Отметим, что получение аналога условия (c) при наличии ограничений на портфель представляет самостоятельный интерес.

Для решения поставленной задачи нам потребуются сведения из теории измеримых многозначных отображений. Пусть F — многозначное отображение Ω в $\mathbf{R}^d$, относящее каждому ω некоторое множество $F(\omega) \subset \mathbf{R}^d$. График и эффективное множество F определяются следующим образом:

$$\text{gr } F = \{(\omega, x): x \in F(\omega)\}, \quad \text{dom } F = \{\omega: F(\omega) \neq \emptyset\}.$$

Функция $\xi: \Omega \mapsto \mathbf{R}^d$ называется селектором F , если $\xi(\omega) \in F(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } F$. Отображение F называется замкнутым (выпуклым), если множества $F(\omega)$ замкнуты (выпуклы).

Рассмотрим некоторую σ -алгебру $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Отображение F называется $\mathcal{H}$ -измеримым, если $\{\omega: F(\omega) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{H}$ для любого открытого множества $G \subset \mathbf{R}^d$. Очевидно, что в этом случае $\text{dom } F \in \mathcal{H}$.

Предложение 1. Для $\mathcal{H}$ -измеримости замкнутого многозначного отображения F необходимо и достаточно, чтобы существовало такое счетное множество $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ $\mathcal{H}$ -измеримых селекторов F , что множества $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $F(\omega)$ при каждом $\omega \in \text{dom } F$.

Доказательство предложения 1 имеется, например, в [16, теорема 5.6], [17, с. 331]. Семейство селекторов $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ будем называть представлением Кастэна (Castaing) для F .

Предложение 2. Пусть $\text{gr } F \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$, тогда существует $\mathcal{H}$ -измеримая функция $\xi: \Omega \mapsto \mathbf{R}^d$ такая, что $\xi(\omega) \in F(\omega)$ для почти всех $\omega \in \text{dom } F$.

Очень близкие результаты использовались в работах [1], [6], [13]. Утверждение о существовании $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримого селектора ξ' отображения F хорошо известно: см., например, [18, теорема 1]. Искомая $\mathcal{H}$ -измеримая функция ξ получается путем изменения ξ' на пренебрежимом множестве (см. [19, с. 136]).

Предложение 3. Справедливы следующие утверждения.

(a) Многозначное отображение F является $\mathcal{H}$ -измеримым тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ -измеримо $\text{cl } F$.

(b) Если F — $\mathcal{H}$ -измеримо, то $\text{gr } (\text{cl } F) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$.

(c) Если $\text{gr } F \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$, то F — $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримо.

Все утверждения предложения 3 имеют в [16]. Первое из них очевидно, а второе и третье содержатся в теоремах 3.3 и 3.4.

Лемма 1. Справедливы следующие утверждения.

(a) Если многозначное отображение F является $\mathcal{H}$ -измеримым, то отображения $\text{conv } F$, $\text{cone } F$, $\text{lin } F$, $\text{aff } F$ также являются $\mathcal{H}$ -измеримыми.

(b) Если $\text{gr } F \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$, то $\text{gr } (\text{cone } F)^\circ \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$.

(c) Если F — $\mathcal{H}$ -измеримо и выпукло, то $\text{gr } (\text{ri } F) \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$.

Доказательство. (a) Приводимое ниже доказательство измеримости $\text{conv } F$ является небольшой модификацией рассуждений [16, теорема 9.1], где рассматривались замкнутые отображения. Измеримость $\text{cone } F$, $\text{lin } F$, $\text{aff } F$ доказывается аналогично.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\text{cl } F$. Рассмотрим множество R последовательностей $(q_1, \dots, q_n, \dots)$ неотрицательных рациональных чисел таких, что лишь конечное число элементов q_i отличны от нуля и $\sum_{i=1}^\infty q_i = 1$. Множество R счетно и семейство

$$\left\{ \sum_{i=1}^\infty q_i \xi_i: (q_1, \dots, q_n, \dots) \in R \right\} \subset \text{conv } (\text{cl } F)$$

является представлением Кастэна для отображения $\text{cl } (\text{conv } (\text{cl } F))$, совпадающего с $\text{cl } (\text{conv } F)$, поскольку

$$\text{cl } (\text{conv } F) = \text{conv } (\text{cl } (\text{conv } F)) \supset \text{conv } (\text{cl } F).$$

Согласно предложению 1 и предложению 3(a), отсюда вытекает $\mathcal{H}$ -измеримость $\text{conv } F$.

(b) Из предложения 3 следует, что отображение $\text{cl } F$ является $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримым. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — представление Кастэна для $\text{cl } F$. Тогда

$$\text{gr}(\text{cone } F)^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{(\omega, x): \langle x, \xi_i(\omega) \rangle \leq 0\} \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}.$$

(c) Отображение $\text{ri } F = \text{ri}(\text{cl } F)$ может быть представлено следующим образом:

$$\text{ri } F = \text{cl } F \setminus (\text{cl } F \cap \text{cl } G), \quad G = (\text{aff}(\text{cl } F)) \setminus \text{cl } F.$$

Согласно [16, теорема 4.5], разность G замкнутых $\mathcal{H}$ -измеримых отображений $\text{aff}(\text{cl } F)$, $\text{cl } F$ является $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримой. Следовательно, в силу предложения 3(b), график $\text{cl } G$ является $\mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым. График $\text{ri } F$ получается путем применения операций пересечения и разности к $\mathcal{H}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым графикам $\text{cl } F$, $\text{cl } G$.

Лемма 2. Мнозначное отображение $\omega \mapsto K_n(\omega) = \text{supp } \mu_n(\omega, \cdot)$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримым.

Доказательство. Пусть G — открытое множество в $\mathbf{R}^d$. По определению условного распределения μ_n отображение $\omega \mapsto \mu_n(\omega, G)$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримым. Поэтому

$$\{\omega: K_n(\omega) \cap G \neq \emptyset\} = \{\omega: \mu_n(\omega, G) > 0\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Лемма 3. Пусть график многозначного отображения G является $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым, тогда

$$\mathbf{P}(\{\Delta S_n \in G\} \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega) = \mu_n(\omega, G(\omega)) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Доказательство следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\Delta S_n \in G\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(I_{\text{gr } G}(\omega, \Delta S_n(\omega)) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} I_{\text{gr } G}(\omega, x) \mu_n(\omega, dx) = \mu_n(\omega, G(\omega)) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Во втором равенстве использовано одно из свойств условного распределения [20, приложение II], [13, теорема AI.1].

Пусть $\Pi_n(\omega)$ — матрица ортопроектора на $\text{lin } K_n(\omega)$ в стандартном базисе $(e_i)_{i=1}^d$ в $\mathbf{R}^d$. В дальнейшем оператор Π_n и соответствующая матрица обозначаются одной буквой. Метод доказательства приводимой ниже леммы заимствован из [21].

Лемма 4. Матрица $\omega \mapsto \Pi_n(\omega)$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримой.

Доказательство. Рассмотрим для $\text{lin } K_n = \text{im } \Pi_n$ представление Кастэна $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ и применим процедуру ортогонализации Грама–Шмидта, т.е. введем случайные векторы

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} I_{\xi_1 \neq 0}, \quad \eta'_i = \xi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \xi_i, \eta_k \rangle \eta_k, \quad \eta_i = \frac{\eta'_i}{|\eta'_i|} I_{\eta'_i \neq 0}.$$

Поскольку множество $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотно в $\text{lin } K_n(\omega)$ и

$$\xi_i = |\eta'_i| \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} \langle \xi_i, \eta_k \rangle \eta_k,$$

то $\text{lin } \{\eta_1, \dots, \eta_i, \dots\} = \text{lin } K_n$ при всех ω . Далее, в силу конечномерности $\text{lin } K_n$, лишь конечное число элементов $\eta_i(\omega)$ отлично от нуля при фиксированном ω и эти элементы образуют в $\text{lin } K_n(\omega)$ ортонормированный базис. Таким образом, для элементов матрицы Π_n справедливо представление в виде суммы измеримых функций:

$$(\Pi_n)_{i,j} = \langle \Pi_n e_i, \Pi_n e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^\infty \langle e_i, \eta_k \rangle \eta_k, \sum_{l=1}^\infty \langle e_j, \eta_l \rangle \eta_l \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle e_i, \eta_k \rangle \langle e_j, \eta_k \rangle,$$

из которого вытекает утверждение леммы.

Лемма 5. Для любой $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримой функции $\gamma_n: \Omega \mapsto \mathbf{R}^d$ выполняются следующие соотношения:

- (а) $\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = \langle \Pi_n \gamma_n, \Delta S_n \rangle$ **Р-п.н.**;
- (б) если $\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = 0$ **Р-п.н.**, то $\Pi_n \gamma_n = 0$ **Р-п.н.**

Доказательство. Из леммы 3 и определения K_n следует, что

$$\mathbf{P}\{\Delta S_n \in K_n\} = \mathbf{E}_\mathbf{P} \mathbf{P}(\{\Delta S_n \in K_n\} | \mathcal{F}_{n-1}) = \int_\Omega \mu_n(\omega, K_n(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) = 1.$$

Следовательно, $\Pi_n \Delta S_n = \Delta S_n$ **Р-п.н.** и выполнено равенство (а).

Положим для краткости $\eta = \Pi_n \gamma_n$. Из соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = 0\} &= \mathbf{P}\{\langle \Pi_n \gamma_n, \Delta S_n \rangle = 0\} = \mathbf{P}\{\Delta S_n(\omega) \in H^{\eta(\omega)}\} \\ &= \int_\Omega \mu_n(\omega, H^{\eta(\omega)}) d\mathbf{P}(\omega) = 1, \end{aligned}$$

вытекающего из условия утверждения (б) и леммы 3, следует, что $\mu_n(\omega, H^{\eta(\omega)}) = 1$ при почти всех ω . Поэтому $K_n(\omega) \subset H^{\eta(\omega)}$ и

$$\eta(\omega) \in \text{lin } K_n(\omega) \subset H^{\eta(\omega)} \quad \mathbf{Р-п.н.}$$

Значит, $\Pi_n \gamma_n = \eta = 0$ **Р-п.н.** Лемма доказана.

В различных формах проектор Π_n использовался в работах [3], [5], [9] и неопубликованном препринте Делбаена (Delbaen F., The Dalang–Morton–Willinger theorem, 1999).

Нам также потребуется следующая многошаговая версия леммы Шахермайера [3], [9], [7].

Лемма 6. Если на идеальном рынке $(B_n = \mathbf{R}^d)$ выполнено условие NA , то соответствующее множество C_N замкнуто в L^0 .

2. Ключевые леммы. Далее, при необходимости, на многозначные отображения B_n , описывающие ограничения на портфель, накладываются следующие условия выпуклости и измеримости.

(C) Множества $B_n(\omega)$ выпуклы и $0 \in B_n(\omega)$ при почти всех ω .

(M) $\text{gr } B_n \in \mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$, $\text{gr } (\text{ray } B_n) \in \mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$.

Основные результаты работы выводятся из следующих трех лемм.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) \neq \emptyset$, тогда выполнено условие NFL .

Доказательство. Пусть $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathbf{P}; B)$. Поскольку $\gamma_n \in B_n \subset \text{cone } B_n$ $\mathbf{P}$ -п.н., то при почти всех ω верно неравенство

$$\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = \langle \gamma_n, \Delta A_n^{\mathbf{Q}} \rangle + \langle \gamma_n, \Delta M_n^{\mathbf{Q}} \rangle \leq \langle \gamma_n, \Delta M_n^{\mathbf{Q}} \rangle.$$

Отсюда следует, что множество C_N , соответствующее рынку $\mathcal{M}(S, B)$, содержится в множестве $\tilde{C}_N$, построенном для искусственного рынка $\mathcal{M}(M^{\mathbf{Q}}, \mathbf{R}^d)$. Но $M^{\mathbf{Q}}$ является $\mathbf{Q}$ -мартингалом, поэтому на рынке $\mathcal{M}(M^{\mathbf{Q}}, \mathbf{R}^d)$ нет арбитража: $\tilde{C}_N \cap L_+^0 = \{0\}$ (согласно импликации (b) $\Rightarrow$ (a) теоремы 1). По лемме 6 отсюда вытекает, что множество $\tilde{C}_N$ замкнуто в L^0 . Таким образом, $\text{cl}_0(C_N) \subset \tilde{C}_N$ и на рынке $\mathcal{M}(S, B)$ нет бесплатного ленча.

Лемма 8. Пусть выполнено условие (M) и

$$(\text{cone } B_n(\omega))^\circ \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) \neq \emptyset \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad n = 1, \dots, N,$$

тогда $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) \neq \emptyset$.

Доказательство. По лемме 1(b) график $(\text{cone } B_n)^\circ$ измерим относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$. Из лемм 2 и 1 вытекает, что тем же свойством обладает график $\text{ri}(\text{conv } K_n)$. Таким образом, график многозначного отображения

$$G_n = (\text{cone } B_n)^\circ \cap \text{ri}(\text{conv } K_n)$$

является $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым.

Рассмотрим $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримые функции $a_n = a_n(\omega)$, $n \geq 1$, удовлетворяющие условиям $a_n(\omega) \in G_n(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. Такие функции существуют в силу предложения 2, поскольку $\mathbf{P}(\text{dom } G_n) = 1$. Положим $a_0 = 0$,

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad M_n = S_n - A_n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Введем регулярные условные распределения приращений ΔM_n :

$$\hat{\mu}_n(\omega, G) = \mathbf{P}(\Delta M_n \in G \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega), \quad G \in \mathcal{B},$$

и пусть $\widehat{K}_n(\omega)$ — носители мер $\widehat{\mu}_n(\omega, \cdot)$. По лемме 3

$$\widehat{\mu}_n(\omega, G) = \mathbf{P}(\Delta S_n \in (G + \Delta A_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mu_n(\omega, G + a_n(\omega)) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Следовательно, $\widehat{K}_n(\omega) = K_n(\omega) - a_n(\omega)$ при почти всех ω .

Далее, поскольку $a_n(\omega) \in \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega))$, то

$$0 \in \text{ri}(\text{conv } K_n - a_n) = \text{ri}(\text{conv } (K_n - a_n)) = \text{ri}(\text{conv } \widehat{K}_n) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Согласно импликации (с) $\implies$ (b) теоремы 1, отсюда вытекает существование эквивалентной $\mathbf{P}$ вероятностной меры $\mathbf{Q}$ такой, что $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$ и M является $\mathbf{Q}$ -мартингалом.

Если $S \in L^1(\mathbf{P})$, то $S \in L^1(\mathbf{Q})$ и представление $S_n = A_n + M_n$ является разложением Дуба относительно $\mathbf{Q}$: $A_n = A_n^{\mathbf{Q}}$, $M_n = M_n^{\mathbf{Q}}$. Поскольку, кроме того, $\Delta A_n = a_n \in (\text{cone } B_n)^\circ$ $\mathbf{P}$ -п.н., то $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathbf{P}; B) \neq \emptyset$.

Если $S \notin L^1(\mathbf{P})$, то, следуя [2, с. 545], перейдем к эквивалентной $\mathbf{P}$ вероятностной мере $\overline{\mathbf{P}}$, для которой $S \in L^1(\overline{\mathbf{P}})$, $d\overline{\mathbf{P}}/d\mathbf{P} \in L^\infty$. Переход к эквивалентной мере не меняет носителя мер $\mu_n(\omega, \cdot)$ при почти всех ω . По доказанному отсюда следует, что $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{P}}; B) \neq \emptyset$. Остается заметить, что $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{P}}; B) \subset \mathcal{P}(\mathbf{P}; B)$, так как $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = d\mathbf{Q}/d\overline{\mathbf{P}} \cdot d\overline{\mathbf{P}}/d\mathbf{P}$. Лемма доказана.

Положим $U_n = \Pi_n(\text{ray } B_n)$. Если график $\text{ray } B_n$ измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$, то многозначное отображение $\text{ray } B_n$ является $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ -измеримым. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\text{cl}(\text{ray } B_n)$. Используя следующее свойство (см. [15, с. 64]):

$$\text{cl}(\Pi_n(\text{ray } B_n)) \supset \Pi_n(\text{cl}(\text{ray } B_n)),$$

заключаем, что семейство $\{\Pi_n \xi_i\}_{i=1}^\infty$ будет представлением Кастэна для $\text{cl}(\Pi_n(\text{ray } B_n))$ и отображение $\text{cl } U_n$ является $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ -измеримым.

Лемма 9. Пусть выполнены условия (C) и (M) и

$$(\text{cone } B_n(\omega))^\circ \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) = \emptyset$$

на множестве $A \in \mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ положительной меры при некотором n . Тогда существует такой $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримый случайный вектор $\xi(\omega) \in \text{cl } U_n(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н., что

$$|\xi(\omega)| \leq 1, \quad \langle \xi, \Delta S_n \rangle \geq 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad \mathbf{P}\{\langle \xi, \Delta S_n \rangle > 0\} > 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Поскольку

$$(\text{cone } B_n)^\circ \cap \text{ri}(\text{conv } K_n) = U_n^\circ \cap \text{ri}(\text{conv } K_n) = \emptyset, \quad \omega \in A,$$

то из теорем отделимости (см. [15, теоремы 11.3 и 11.7]) вытекает, что существует проходящая через 0 гиперплоскость, разделяющая конус U_n° и множество $\text{ri}(\text{conv } K_n)$ (а значит, $\text{cone } K_n$), если $\omega \in A$. Следовательно,

найдется элемент $x^* \neq 0$, ортогональный этой гиперплоскости, принадлежащий конусу

$$U_n^{\circ} \cap (\text{cone } K_n)^* = (\text{cl } U_n) \cap (\text{cone } K_n)^* \neq \{0\}, \quad \omega \in A'.$$

Здесь $\mathbf{P}(A') = \mathbf{P}(A)$ и использовано условие (C).

Пусть $\mathbf{B}_1$ — единичный шар в $\mathbf{R}^d$. Из леммы 1 и предложения 3 следует, что отображение $(\text{cone } K_n)^* = (-\text{cl } (\text{cone } K_n))^{\circ}$ является $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ -измеримым. Тем же свойством обладает замкнутое отображение $(\text{cl } U_n) \cap (\text{cone } K_n)^* \cap \mathbf{B}_1$, эффективное множество которого совпадает с Ω . Из предложения 1 вытекает, что хотя бы один из $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ -измеримых селекторов ξ' данного отображения отличен от нуля на множестве $A'' \subset A'$ положительной меры. Изменив функцию ξ' на пренебрежимом множестве (см. [19, с. 136]), получим $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримую функцию ξ , удовлетворяющую условиям $\xi \in \text{cl } U_n$, $|\xi| \leq 1$ при почти всех ω и отличную от нуля на множестве положительной меры.

Проверим, что ξ является искомой. По лемме 3 находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\langle \xi, \Delta S_n \rangle \geq 0\} &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \mathbf{P}\{\Delta S_n \in H_{\geq}^{\xi} \mid \mathcal{F}_{n-1}\} = \int_{\Omega} \mu_n(\omega, H_{\geq}^{\xi(\omega)}) d\mathbf{P}(\omega) \\ &\geq \int_{\Omega} \mu_n(\omega, K_n(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) = 1, \end{aligned}$$

поскольку из определения ξ вытекает, что $K_n(\omega) \subset H_{\geq}^{\xi(\omega)}$ $\mathbf{P}$ -п.н.

Остается заметить, что если $\langle \xi, \Delta S_n \rangle = 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., то $\xi = \Pi_n \xi = 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. (в силу леммы 5(b)) и получаем противоречие, так как $\xi \neq 0$ на множестве положительной меры.

3. Основные результаты. Далее, если не оговорено противное, условия (C) и (M) предполагаются выполненными. Рассмотрим сначала случай конических ограничений.

Теорема 2. Пусть $B_n = \text{ray } B_n$, тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) выполнено условие NFL;
- (b) $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) \neq \emptyset$;
- (c) $B_n^{\circ}(\omega) \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) \neq \emptyset$ $\mathbf{P}$ -п.н., $n = 1, \dots, N$.

Если конусы $U_n = \Pi_n B_n$ замкнуты $\mathbf{P}$ -п.н., то условия NFL и NA эквивалентны.

Доказательство. Импликации (b) $\implies$ (a) и (c) $\implies$ (b) установлены в леммах 7 и 8. Пусть не выполнено условие (c) и ξ — элемент, указанный в лемме 9. Рассмотрим многозначное отображение

$$G_{\varepsilon}(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: |x - \xi(\omega)| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

с $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым графиком. Уже отмечалось, что отображение $\text{cl } U_n$ является $\mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ -измеримым. По лемме 1(c) отсюда следует,

что $\text{gr}(\text{ri } U_n) \in \mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}} \otimes \mathcal{B}$. Далее, поскольку $\mathbf{P}(\text{dom}(G_\varepsilon \cap \text{ri } U_n)) = 1$, то, согласно предложению 2, существует $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримая функция $\eta^\varepsilon \in G_\varepsilon \cap \text{ri } U_n$ $\mathbf{P}$ -п.н.

Введем $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримое многозначное отображение

$$F_n^\varepsilon(\omega) = \eta^\varepsilon(\omega) + (I - \Pi_n(\omega))\mathbf{R}^d = \{x \in \mathbf{R}^d: \Pi_n(\omega)x = \eta^\varepsilon(\omega)\}.$$

Значения F_n^ε представляют собой множества элементов, Π_n -проекциями которых являются векторы $\eta^\varepsilon(\omega)$.

Из определения η^ε следует, что $F_n^\varepsilon(\omega) \cap B_n(\omega) \neq \emptyset$ $\mathbf{P}$ -п.н. Снова воспользовавшись предложением 2, построим $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримую функцию $\gamma_n^\varepsilon \in F_n^\varepsilon \cap B_n$ $\mathbf{P}$ -п.н. Поскольку при почти всех ω имеют место соотношения $|\eta^\varepsilon(\omega) - \xi(\omega)| \leq \varepsilon$ и $\eta^\varepsilon = \Pi_n \gamma_n^\varepsilon$, то, устремляя ε к нулю, находим

$$\langle \gamma_n^\varepsilon, \Delta S_n \rangle = \langle \eta^\varepsilon, \Delta S_n \rangle \rightarrow \langle \xi, \Delta S_n \rangle \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Тем более, имеет место сходимость по вероятности. Поскольку портфель $\gamma^\varepsilon = (0, \dots, \gamma_n^\varepsilon, \dots, 0)$ является допустимым, то из определения ξ вытекает, что условие NFL нарушается.

Остается вывести (с) из NA при условии замкнутости конусов U_n . Пусть условие (с) нарушается. Рассмотрим многозначное отображение $F_n(\omega) = \xi(\omega) + (I - \Pi_n(\omega))\mathbf{R}^d$, где ξ — указанный выше элемент. Из замкнутости U_n вытекает, что многозначное отображение $F_n \cap B_n$ принимает непустые значения $\mathbf{P}$ -п.н. Построим такую $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримую функцию γ_n , что $\gamma_n(\omega) \in F_n(\omega) \cap B_n(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н. (предложение 2). Элемент γ_n является допустимым в момент времени n портфелем и удовлетворяет условию $\Pi_n \gamma_n = \xi$. Поэтому

$$\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = \langle \xi, \Delta S_n \rangle \in L_0^+ \setminus \{0\}$$

и условие NA нарушается. Теорема доказана.

Приведем пример, демонстрирующий существенность условия замкнутости U_n для эквивалентности NFL и NA.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1$ порождается одноточечными множествами. Рассмотрим одношаговую биномиальную модель с тремя активами ($N = 1$, $d = 3$), цены которых имеют следующие приращения:

$$\Delta S_1(\omega_1) = (1, 0, 0), \quad \Delta S_1(\omega_2) = (0, 1, 0).$$

Пусть выпуклое компактное множество $F \in \mathbf{R}^3$ является пересечением плоскости и двух круговых цилиндров:

$$F = \{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\} \cap \{x_3 = 1\}. \quad (3.1)$$

Положим $B_1 = \text{cone } F$. Поскольку $0 \notin F$, то B_1 — замкнутый конус [15].

Множество $\text{conv } K_1$ представляет собой отрезок, соединяющий точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Ортогональной проекцией F на плоскость $\text{lin } K_1$ будет пересечение двух кругов:

$$\Pi_1 F = \{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\} \cap \{x_3 = 0\},$$

а проекцией B_1 — незамкнутый конус

$$\Pi_1 B_1 = \{x_1 < 0\} \cap \{x_2 > 0\} \cap \{x_3 = 0\} \cup \{x = 0\}.$$

Имеем

$$X_1^\gamma(\omega_i) = \langle \gamma_1, \Delta S_1 \rangle(\omega_i) = \gamma_1^i, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку $(\gamma_1^1, \gamma_1^2) \in \Pi_1 B_1$, то условие NA выполнено. С другой стороны, замыкание множества $\Pi_1 B_1$ содержит точки первого квадранта, отличные от начала координат, и условие NFL нарушается.

Возвращаясь к доказательству первой части теоремы 2, заметим, что если $\alpha_n \Delta S_n \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, для некоторой $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримой случайной величины $\alpha_n > 0$, то из определения γ_n^ε вытекает следующее неравенство:

$$\|\langle \alpha_n \gamma_n^\varepsilon, \Delta S_n \rangle - \langle \alpha_n \xi, \Delta S_n \rangle\|_p = \|\langle \Pi_n \gamma_n^\varepsilon - \xi, \alpha_n \Delta S_n \rangle\|_p \leq \sum_{i=1}^d \varepsilon \|\alpha_n \Delta S_n^i\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма в L^p . Поскольку $\alpha_n \gamma_n^\varepsilon \in B_n$ — допустимый в момент времени n портфель, ε произвольно и

$$\langle \alpha_n \gamma_n^\varepsilon, \Delta S_n \rangle = \langle \Pi_n \gamma_n^\varepsilon, \alpha_n \Delta S_n \rangle \in L^p, \quad \langle \xi, \alpha_n \Delta S_n \rangle \in L_+^p \setminus \{0\},$$

то отсюда следует, что при нарушении условия (с) теоремы 1 имеется бесплатный ленч не только в L^0 , но и в L^p . С другой стороны, очевидно, что $\text{NFL} \implies \text{NFL}_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть существует такой предсказуемый случайный процесс $(\alpha_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n=1}^N$, $\alpha_n > 0$, что $\alpha_n \Delta S_n \in L^p$, $n \geq 1$, для некоторого $p \in [1, \infty]$. Тогда условия NLF_p и NFL эквивалентны.

Условие замкнутости конусов U_n и условие (с) теоремы 2 введены в [14]. В этом же сообщении анонсированы теоремы 2 и 3 (при дополнительном несущественном условии замкнутости B_n).

Ранее весьма близкие к теореме 2 (без условия (с)) результаты другими методами были получены в работе [10]. При этом вместо условия замкнутости конусов U_n использовалось предположение об обратимости матрицы условных ковариаций S_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$. Как указано в [11], [22], можно ослабить данное предположение и использовать следующее условие невырожденности:

$$(\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle = 0, \gamma_n \in B_n) \implies \gamma_n = 0 \quad (3.2)$$

при почти всех ω . В силу леммы 5 данное условие можно сформулировать следующим образом:

$$\gamma_n \in (\ker \Pi_n) \cap B_n \implies \gamma_n = 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.},$$

что, в свою очередь, эквивалентно условию $(\ker \Pi_n) \cap B_n = \{0\}$ $\mathbf{P}$ -п.н., из которого вытекает замкнутость конусов $U_n = \Pi_n B_n$ [15].

Условие замкнутости U_n будет выполнено и в том случае, если конусы B_n полиэдральны, как в работах [8], [12]. Отметим также, что в более абстрактной форме подобные условия замкнутости рассматривались в [9].

Анализ условий работы [13], где были получены наиболее точные результаты, приводится после следующей теоремы, в которой рассматриваются выпуклые ограничения, необязательно обладающие конической структурой. Напомним, что $U_n = \Pi_n(\text{ray } B_n)$.

Теорема 4. Пусть конусы U_n замкнуты $\mathbf{P}$ -п.н., тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) выполнено условие NA;
- (б) $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) \neq \emptyset$;
- (в) $(\text{cone } B_n)^\circ(\omega) \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) \neq \emptyset$ $\mathbf{P}$ -п.н., $n = 1, \dots, N$.

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что теорема 4 верна для рынка $\mathcal{M}(S, \text{ray } B)$. Поэтому достаточно доказать, что условия NA на рынках $\mathcal{M}(S, B)$ и $\mathcal{M}(S, \text{ray } B)$ выполняются одновременно. Далее, поскольку $B_n \subset \text{ray } B_n$, то остается проверить, что при нарушении условия NA на рынке $\mathcal{M}(S, \text{ray } B)$ арбитражная возможность существует и на рынке $\mathcal{M}(S, B)$.

Пусть γ_n — $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримая функция, построенная в заключительной части доказательства теоремы 2 и удовлетворяющая условиям $\gamma_n \in \text{ray } B_n$ $\mathbf{P}$ -п.н., $\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle \in L_+^0 \setminus \{0\}$. Многозначное отображение

$$G_n = (\text{cone } \gamma_n) \cap (B_n \setminus \{0\})$$

имеет $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$ -измеримый график. Согласно предложению 2, существует $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримая функция η_n , удовлетворяющая условию $\eta_n(\omega) \in G_n(\omega)$ при почти всех ω из множества $\text{dom } G_n \in \mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$, совпадающего, с точностью до множества нулевой меры, с $\{\omega: \gamma_n(\omega) \neq 0\}$.

Пусть $A \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\text{dom } G_n)$. Элемент $\zeta_n = \eta_n I_A$ является допустимым в момент времени n портфелем на рынке $\mathcal{M}(S, B)$, и векторы ζ_n , γ_n сонаправлены и отличны от нуля при почти всех $\omega \in A$. Поэтому условие NA на рынке $\mathcal{M}(S, B)$ не выполнено: $\langle \zeta_n, \Delta S_n \rangle \in L_+^0 \setminus \{0\}$. Теорема доказана.

Заметим, что при нарушении условия NA всегда имеются одношаговые арбитражные возможности.

По аналогии с теоремой 2 можно было бы ожидать, что теорема 4 останется справедливой, если заменить условие NA на NFL и снять условие замкнутости U_n . Однако это неверно, даже если конусы гау B_n замкнуты. Чтобы в этом убедиться, достаточно в рамках рассмотренного выше примера 1 положить $B_1 = \text{conv} \{0, F\}$, где F — множество (3.1). При этом будет выполнено условие NFL, но не условие (с).

Просмотр приведенных выше доказательств показывает, что они не претерпят изменений, если требование выпуклости B_n заменить более слабым условием выпуклости U_n . Зафиксируем этот результат.

Предложение 4. *Утверждения теорем 2–4 остаются в силе, если в условии (C) вместо выпуклости B_n требовать выпуклости U_n .*

Перейдем к анализу условий, введенных в работе [13]. Прежде всего следует отметить, в данной работе ограничения B_n не предполагались выпуклыми (однако предполагалось, что обозначенные через H_n множества гау B_n замкнуты). Поэтому сейчас будем считать, что выполнена лишь вторая часть условия (C): $0 \in B_n(\omega)$.

Положим $P_n^\omega(G) = \mu_n(\omega, G)$, $G \in \mathcal{B}$. Далее, следуя [13], для каждого ω введем множества

$$Y_n(\omega) = \left\{ v_a(\cdot) \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}, P_n^\omega) : v_a(b) = \langle a, b \rangle \text{ } P_n^\omega\text{-п.н., } a \in \text{гау } B_n(\omega) \right\}.$$

Условия [13] состоят в следующем.

(X.1) Множество $Y_n(\omega)$ замкнуто в $L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}, P_n^\omega)$ относительно сходимости по мере.

(X.2) Множество $Y_n(\omega) - L_+^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}, P_n^\omega)$ выпукло.

Данные условия предполагаются выполненными при всех n и всех $\omega \in \Omega_n$, где $\Omega_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ и $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Условие (X.1) эквивалентно замкнутости множеств U_n . Действительно, нетрудно проверить, что отображение $a \mapsto v_a(\cdot)$ является линейным гомеоморфизмом конечномерных подпространств $\text{lin } K_n(\omega)$ и $\{v_a \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}, P_n^\omega) : a \in \text{lin } K_n\}$, а множество $Y_n(\omega)$ является образом $U_n \subset \text{lin } K_n$ при этом отображении, поскольку

$$\langle \Pi_n a, b \rangle = \langle a, b \rangle \text{ } P_n^\omega\text{-п.н.} \quad (3.3)$$

Из приведенных рассуждений ясно также, что условия выпуклости U_n и Y_n эквивалентны. Условие (X.2) является более общим и означает, что любая выпуклая комбинация элементов $a_i \in \text{гау } B_n(\omega)$, $i = 1, \dots, k$, доминируется элементом $a \in \text{гау } B_n(\omega)$ в следующем смысле:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \langle a_i, b \rangle \leq \langle a, b \rangle \text{ } P_n^\omega\text{-п.н.,} \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1. \quad (3.4)$$

В силу равенства (3.3) данное условие не изменится, если считать, что элементы a_i и a принадлежат U_n . Отметим, что выпуклость U_n

играла существенную роль в лемме 9, где использовалось соотношение $U_n^{\circ\circ} = \text{cl } U_n$. Если же множества U_n невыпуклы (но замкнуты), то в данной лемме можно лишь рассчитывать на существование $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримого элемента $\xi \in \text{conv } U_n$ $\mathbf{P}$ -п.н., удовлетворяющего (2.1). Свойство доминирования (3.4) указывает на то, что при этом должен существовать элемент $\xi \in U_n$ $\mathbf{P}$ -п.н. с теми же свойствами. Однако этот результат не вытекает из приведенных рассуждений, так как нужно еще обосновать возможность $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримого выбора ξ .

4. Ограничения, зависящие от капитала. Введем семейство $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримых многозначных отображений

$$\omega \mapsto \bigcup_{j=1}^m B_n^j(\omega) \varphi_n^j(x) \subset \mathbf{R}^d,$$

зависящих от параметра $x \in \mathbf{R}$. Здесь B_n^j — многозначные отображения, удовлетворяющие условиям (C) и (M), $\varphi_n^j: \mathbf{R} \mapsto [0, +\infty)$ — не равные тождественно нулю борелевские функции такие, что при фиксированных x и n в точности одна из них отлична от нуля: $\varphi_n^i(x)\varphi_n^j(x) = 0$, $i \neq j$, и $\varphi_n^j(x) > 0$ для некоторого j .

Пусть x — начальный капитал инвестора,

$$X_n^{x,\gamma} = x + \sum_{k=1}^n \langle \gamma_k, \Delta S_k \rangle, \quad n = 1, \dots, N,$$

— его капитал в момент времени n и наложены следующие ограничения на портфели активов:

$$\gamma_n(\omega) \in \bigcup_{j=1}^m B_n^j(\omega) \varphi_n^j(X_{n-1}^{x,\gamma}(\omega)) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (4.1)$$

Условие отсутствия арбитража вводится следующим образом [11]:

$$X_N^{x,\gamma} \geq x \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \implies X_N^{x,\gamma} = x \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (4.2)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$ и всех предсказуемых случайных процессов γ , удовлетворяющих (4.1). Положим $U_n^j = \Pi_n(\text{ray } B_n^j)$.

Теорема 5. Пусть конусы U_n^j замкнуты $\mathbf{P}$ -п.н., тогда на рынке с ограничениями (4.1) следующие условия эквивалентны:

- (a) выполнено условие отсутствия арбитража (4.2);
- (b) $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B^j) \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, m$;
- (c) $(\text{cone } B_n^j)^\circ(\omega) \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) \neq \emptyset$ $\mathbf{P}$ -п.н., $n = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m$.

Доказательство. Эквивалентность условий (b) и (c) установлена в теореме 4. Далее, предположим, что условие (c) нарушается при некоторых j и n , и пусть $\zeta_n \in B_n^j$ $\mathbf{P}$ -п.н. — допустимый в момент

времени n арбитражный (для рынка $\mathcal{M}(S, B^j)$) портфель, построенный как при доказательстве теоремы 4. Если $\varphi_n^j(x) > 0$, то при начальном капитале x для портфеля

$$\gamma_n = \varphi_n^j(x)\zeta_n, \quad \gamma_i = 0, \quad i \neq n, \quad (4.3)$$

выполнены ограничения (4.1) и нарушается условие (4.2), т.е. (а).

Для завершения доказательства выведем (а) из условия (b). Пусть $\mathbf{Q}^j \in \mathcal{P}(\mathbf{P}; B^j)$ и $Z_n^j = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(d\mathbf{Q}^j/d\mathbf{P} | \mathcal{F}_n)$ — соответствующие процессы плотностей (см. [2, с. 556]). По формуле Байеса (см. [2, с. 560])

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^j}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n-1}^j} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Z_n^j \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}) \in (\text{cone } B_n^j)^\circ \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (4.4)$$

Зафиксируем $x \in \mathbf{R}$ и допустимый, т.е. удовлетворяющий (4.1), предсказуемый случайный процесс γ . Введем положительный мартингал

$$Z_n = \frac{Z_{n-1}}{\sum_{j=1}^m \varphi_n^j(X_{n-1}^{x, \gamma})} \sum_{j=1}^m \varphi_n^j(X_{n-1}^{x, \gamma}) \frac{Z_n^j}{Z_{n-1}^j}, \quad Z_0 = 1,$$

и эквивалентную $\mathbf{P}$ вероятностную меру $\mathbf{Q}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = Z_N$. В силу (4.4) и свойств функций φ_n^j предсказуемый процесс $\Delta A_n^{\mathbf{Q}}$ в соответствующем разложении Дуба (1.1) удовлетворяет условию

$$\Delta A_n^{\mathbf{Q}} = \frac{1}{Z_{n-1}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Z_n \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}) \in \bigcup_{j=1}^m (\text{cone } B_n^j)^\circ \varphi_n^j(X_{n-1}^{x, \gamma}) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Отсюда следует, что $\langle \gamma_n, \Delta A_n^{\mathbf{Q}} \rangle \leq 0$ и $\langle \gamma_n, \Delta S_n \rangle \leq \langle \gamma_n, \Delta M_n^{\mathbf{Q}} \rangle$ $\mathbf{P}$ -п.н.

Случайный процесс $R_n = \sum_{k=1}^n \langle \gamma_k, \Delta M_k^{\mathbf{Q}} \rangle$ является локальным мартингалом относительно меры $\mathbf{Q}$. Если предположить, что $X_N^{x, \gamma} \geq x$ $\mathbf{P}$ -п.н., то $R_N \geq 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. Как известно (см. [6]), отсюда следует, что $R_N = 0$ и $X_N^{x, \gamma} = x$ $\mathbf{P}$ -п.н., т.е. выполнено условие (а). Теорема доказана.

В работе [11] накладываются ограничения $C^\pm$ на доли капитала, инвестируемые в различные активы. Указанные ограничения можно представить в виде (4.1), если положить $m = 3$, $\varphi_n^1 = \max\{x, 0\}$, $\varphi_n^2 = \max\{-x, 0\}$, $\varphi_n^3 = I_{\{0\}}(x)$,

$$B_n^1 = (\text{diag } S_{n-1})^{-1} C^+, \quad B_n^2 = (\text{diag } S_{n-1})^{-1} (-C^-), \quad B_n^3 = \{0\},$$

где $\text{diag } S_{n-1}$ — диагональная матрица, i -й диагональный элемент которой равен S_{n-1}^i , и $C^\pm$ — неслучайные выпуклые множества. Таким образом, теорема 3.1 работы [11] вытекает из теоремы 5.

Как и ранее, отметим, что условие невырожденности (типа (3.2)), использованное в работе [11], является более жестким, чем условие замкнутости конусов U_n^j . Кроме того, условие замкнутости конусов $\text{cone } C^\pm$ излишне.

При доказательстве теоремы 5, фактически, было выяснено, что если условие (b) выполнено, то для любой допустимой стратегии (x, γ) существует вероятностная мера $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, относительно которой капитал $X^{x, \gamma}$ является локальным $\mathbf{Q}$ -супермартингалом. Если же существует $\mathbf{Q} \in \bigcap_{j=1}^m \mathcal{P}(\mathbf{P}; B^j)$, то легко видеть, что при любой допустимой стратегии капитал будет локальным $\mathbf{Q}$ -супермартингалом. В следующей теореме показано, что при дополнительном условии выпуклости конусов $U_n = \bigcup_{j=1}^m U_n^j$ данное условие эквивалентно условию безарбитражности.

Теорема 6. Пусть конусы $U_n = \bigcup_{j=1}^m U_n^j$ выпуклы и замкнуты $\mathbf{P}$ -п.н., тогда на рынке с ограничениями (4.1) следующие условия эквивалентны:

- (a) выполнено условие отсутствия арбитража (4.2);
- (b) $\bigcap_{j=1}^m \mathcal{P}(\mathbf{P}; B^j) \neq \emptyset$;
- (c) $\bigcap_{j=1}^n (\text{cone } B_n^j)^\circ(\omega) \cap \text{ri}(\text{conv } K_n(\omega)) \neq \emptyset$ $\mathbf{P}$ -п.н., $n = 1, \dots, N$.

Доказательство. Импликация (b) $\implies$ (a) очевидна ввиду теоремы 5. Пусть $B_n = \bigcup_{j=1}^m B_n^j$, тогда

$$(\text{cone } B_n)^\circ = \bigcap_{j=1}^n (\text{cone } B_n^j)^\circ.$$

Если выполнено условие (c), то из данного равенства и леммы 8 следует, что выполнено условие (b): $\mathcal{P}(\mathbf{P}; B) = \bigcap_{j=1}^m \mathcal{P}(\mathbf{P}; B^j) \neq \emptyset$.

Пусть теперь условие (c) не выполнено. Поскольку

$$U_n = \bigcup_{j=1}^n \Pi_n(\text{ray } B_n^j) = \Pi_n(\text{ray } B_n), \quad B_n = \bigcup_{j=1}^m B_n^j,$$

то из предложения 4 и теоремы 4 вытекает, что на рынке $\mathcal{M}(S, B)$ имеется арбитраж и существует такая $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримая функция $\delta_n(\omega) \in B_n(\omega)$ $\mathbf{P}$ -п.н., что $\langle \delta_n, \Delta S_n \rangle \in L_0^+ \setminus \{0\}$.

Положим $A = \{\omega: \langle \delta_n, \Delta S_n \rangle > 0\}$, $A^j = \{\omega: \delta_n \in B_n^j\}$. Заметим, что $A^j = \text{dom}(\delta_n \cap B_n^j) \in \mathcal{F}_{n-1}^{\mathbf{P}}$ согласно предложению 3(c). Поскольку $\mathbf{P}(A) > 0$ и

$$\{\omega: \delta_n \in B_n\} \cap A = \bigcup_{j=1}^m (A^j \cap A),$$

то существует такой номер j , что $\mathbf{P}(A^j \cap A) > 0$.

Пусть $A_*^j \subset A^j$ — такой элемент σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$, что $\mathbf{P}(A_*^j) = \mathbf{P}(A^j)$. Тогда $\zeta_n = I_{A_*^j} \delta_n$ — допустимый в момент времени n портфель на рынке $\mathcal{M}(S, B^j)$, реализующий арбитражную возможность:

$$\langle \zeta_n, \Delta S_n \rangle \in L_0^+ \setminus \{0\}, \quad \zeta_n \in B_n^j \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Вводя портфель γ по формуле (4.3), заключаем, что условие (a) не выполнено. Теорема доказана.

Для указанной выше модели [11] условие выпуклости U_n слабее условия выпуклости множества $(\text{cone } C^+) \cup (-\text{cone } C^-)$. По сравнению с эффективно проверяемыми условиями (3.1), (3.2) теоремы 3.2 работы [11] данное условие гораздо менее ограничительно. Следует, однако, отметить, что в работе [11] рассматривается и другое, менее конструктивное условие, идейно близкое к свойству доминирования (3.4).

В заключение приведем пример, указывающий на проблемы, которые могут встретиться при попытке рассмотреть более общие, по сравнению с (4.1), ограничения.

Пример 2. Пусть $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1]$, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, $N = 2$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, $d = 1$, а приращения цен и ограничения имеют следующий вид:

$$\Delta S_1(\omega) = -\omega, \quad \Delta S_2(\omega) = \omega,$$

$$B_1(\omega, x) = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 0, \\ [0, +\infty), & x = 0; \end{cases} \quad B_2(\omega, x) = \begin{cases} \{0\}, & \omega \neq -x, \\ \mathbf{R}, & \omega = -x. \end{cases}$$

При начальном капитале $\dot{x} = 0$ рассмотрим следующую стратегию: $\gamma_1 = 1 \in B_1(\omega, 0)$, $\gamma_2 = 2$. Поскольку $X_1^{\gamma, 0} = \gamma_1 \Delta S_1 = -\omega$, то

$$\gamma_2 \in B_2(\omega, X_1^{\gamma, 0}(\omega)) = B_2(\omega, -\omega) = \mathbf{R}$$

и условия (4.1) выполнены при всех ω . Данная стратегия реализует арбитражную возможность:

$$X_2^{\gamma, 0} = \gamma_1 \Delta S_1 + \gamma_2 \Delta S_2 = -\omega + 2\omega = \omega > 0, \quad \omega \neq 0.$$

Отметим, что в данном примере отсутствуют одношаговые арбитражные возможности, если инвестор начинает с неслучайного начального капитала в моменты времени $n = 0$ или $n = 1$. Кроме того, указанная арбитражная возможность исчезает при замене ограничений B_2 на «стохастически эквивалентные» ограничения $B'_2 = \{0\}$: $\mathbf{P}\{\omega: B_2(\omega, x) = B'_2(\omega, x)\} = 1$ для всех x .

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту за ряд весьма полезных замечаний и рекомендаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dalang R. C., Morton A., Willinger W. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. — *Stochastics* *Stochastics Rep.*, 1990, v. 29, № 2, p. 185–201.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998, 528 с.
3. Schachermayer W. A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. — *Insurance Math. Econom.*, 1992, v. 11, № 4, p. 249–257.

4. Кабанов Ю. М., Крамков Д. О. Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингальные меры: новое доказательство теоремы Харрисона–Плиски. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 3, с. 635–640.
5. Rogers L. C. G. Equivalent martingale measures and no-arbitrage. — Stochastics Stochastics Rep., 1995, v. 51, № 1–2, p. 41–49.
6. Jacod J., Shiryaev A. N. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. — Finance Stoch., 1998, v. 2, № 3, p. 259–273.
7. Kabanov Yu., Stricker C. A teacher's note on no-arbitrage criteria. — Lecture Notes in Math., 2001, v. 1755, p. 149–152.
8. Schürger K. On the existence of equivalent τ -measures in finite discrete time. — Stochastic Process. Appl., 1996, v. 61, № 1, p. 109–128.
9. Brannath W. No arbitrage and martingale measures in option pricing. Doct. Diss. Wien: Wien Universität, 1997.
10. Pham H., Touzi N. The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints. — J. Math. Econom., 1999, v. 31, № 2, p. 265–279.
11. Carassus L., Pham H., Touzi N. No arbitrage in discrete time under portfolio constraints. — Math. Finance, 2001, v. 11, № 3, p. 315–329.
12. Napp C. The Dalang–Morton–Willinger theorem under cone constraints. — J. Math. Econom., 2003, v. 39, № 1–2, p. 111–126.
13. Eustigneev I. V., Schürger K., Taksar M. I. On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria. — Discussion paper № 24/2002. Bonn: University of Bonn, 2002; Math. Finance, 2004, v. 14, № 2, p. 201–221.
14. Рохлин Д. Б. Расширенная версия первой фундаментальной теоремы финансовой математики при конических ограничениях на портфель. — Обзор. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 1, с. 131–132.
15. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
16. Himmelberg C. J. Measurable relations. — Fund. Math., 1975, v. 87, p. 53–72.
17. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985, 352 с.
18. Евстигнеев И. В. Теоремы измеримого выбора и вероятностные модели управления в общих топологических пространствах. — Матем. сб., 1986, т. 131, № 1, с. 27–39.
19. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544 с.
20. Arkin V. I., Eustigneev I. V. Stochastic Models of Control and Economic Dynamics. London: Academic Press, 1987, 208 p.
21. Taraldsen G. Random sets and spectra of unbounded linear operators. Report № 18. Djursholm: Mittag-Leffler Inst., 1992/93.
22. Pham H. Dynamic L^p -hedging in discrete time under cone constraints. — SIAM J. Control Optim., 2000, v. 38, № 3, p. 665–682.

Поступила в редакцию
24.VII.2002

Исправленный вариант
16.II.2004