Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ш. Шарипов, Ограниченный закон повторного логарифма для слабозависимых случайных величин со значениями в банаховых пространствах типа 2, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 522–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:57:56

© 2004 г.

ШАРИПОВ О. Ш.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СЛАБОЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА 2¹⁾

В статье рассматривается последовательность одинаково распределенных случайных величин с ψ -перемешиванием и со значениями в банаховом пространстве типа 2, норма которого удовлетворяет определенным условиям. Для этой последовательности при оптимальных моментных условиях доказывается ограниченный закон повторного логарифма.

Ключевые слова и фразы: ограниченный закон повторного логарифма, ψ -перемешивание, банахово пространство типа 2.

1. Введение и формулировка результата. Закон повторного логарифма в различных постановках изучался многими авторами (см. [1]–[17]). В настоящей работе мы рассмотрим ограниченный закон повторного логарифма (ОЗПЛ). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность центрированных случайных величин (с.в.), принимающих значения в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$. Мы будем говорить, что $\{X_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет ОЗПЛ, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_1 + \dots + X_n\|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} < \infty \quad \text{п.н.} \quad (1)$$

Мы не будем делать обзор результатов и методов упомянутых выше работ, но кратко скажем о работах, непосредственно относящихся к настоящей статье. Для последовательностей независимых одинаково распределенных B -значных с.в. необходимые и достаточные условия для ОЗПЛ получены в [1]–[3]. В работах [5]–[6] ОЗПЛ доказан для последовательностей, удовлетворяющих некоторым условиям перемешивания. В этих работах предполагается выполнение условия $\mathbf{E}\|X_k\|^{2+\delta} < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, для некоторого $\delta > 0$. Из результатов работы [9] можно получить ОЗПЛ при условии $\mathbf{E}\|X_1\|^2 < \infty$ для стационарной последовательности $\mathbf{R}^k$ -значных с.в., удовлетворяющих определенным условиям перемешивания. В [17] получено необходимое и достаточное моментное

* Институт математики им. В.И. Романовского АН УЗ, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700125 Ташкент, Узбекистан; e-mail: mathinst@uzsci.net

условие для стационарной последовательности гильбертовозначных с.в., удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания. Необходимые и достаточные условия выполнимости ОЗПЛ для стационарной в узком смысле последовательности m -зависимых с.в. со значениями в B получены в [18].

В настоящей работе мы приведем аналогичный результат для случая банаховых пространств типа 2, норма которых удовлетворяют определенным условиям. Напомним, что B имеет тип 2, если для любого набора независимых B -значных с.в. $X_1, \dots, X_n$ с $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}\|X_k\|^2 < \infty$, $k = 1, \dots, n$, выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^n X_k\right\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\|X_k\|^2, \quad (\text{A})$$

где константа C зависит только от пространства B .

В дальнейшем B будет означать банахово пространство типа 2, вторая производная (по направлению) нормы D_x^2 которого удовлетворяет 1) условию $\sup_{\|x\|=1} \|D_x^2\|_* < \infty$, где $\|\cdot\|_*$ означает норму второй производной, и 2) условию Гёльдера со степенью α вне точки 0.

Здесь и в дальнейшем нулевые элементы рассматриваемых пространств также будем обозначать через 0.

Определение производной по направлению и примеры пространств, норма которых удовлетворяет приведенным выше условиям, можно найти в [19]. Отметим, что пространства L_p , $p \geq 2$, удовлетворяют этим условиям.

Для последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$ определим коэффициент ψ -перемешивания:

$$\psi(n) = \sup_{k, A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty} \frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)},$$

где $\mathcal{F}_k^n$ — σ -алгебра, порожденная с.в. $X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$.

Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, B^* — сопряженное пространство (норму которого также обозначим $\|\cdot\|$), $Lx = \max(1, \ln x)$, $\alpha_n = \sqrt{2n \ln \ln n}$, $n \geq 3$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных с.в. со значениями в B , для которой выполнены следующие условия:

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}f^2(X_1) < \infty \quad \text{для всех } f \in B^* \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}f^2(S_n)}{n} = \sigma_f < \infty \quad \text{для всех } f \in B^* \quad (4)$$

Тогда для того, чтобы имело место (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{E} \frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} < \infty. \quad (5)$$

Заметим, что для независимых одинаково распределенных с.в. со значениями в банаховом пространстве типа 2 необходимым и достаточным условием ОЗПЛ являются (2) и (5) (см. [3]).

Если $\{X_n, n \geq 1\}$ стационарна в узком смысле, то условие (4) излишне (см. [20, теорема 4.1]). Также заметим, что теорема остается верной и для $\{X_n, n \geq 1\}$ с равномерно сильным перемешиванием, если для таковых выполнено неравенство (А), так как все остальные используемые при доказательстве факты имеют место и для последовательности с равномерно сильным перемешиванием. ОЗПЛ и компактный закон повторного логарифма для последовательностей гильбертовозначных с.в. с равномерно сильным перемешиванием доказаны в [21], [22].

Разумеется, (4) выполняется не только для стационарных в узком смысле последовательностей. Например, (4) имеет место для слабо стационарных последовательностей (см. [5], [6]), но при более ограничительных условиях на коэффициенты перемешивания.

2. Доказательство теоремы. Достаточность. Всюду в дальнейшем буквой C будем обозначать абсолютные и не абсолютные константы, возможно разные даже в одной цепочке неравенств. C может зависеть от разных параметров, но не зависит от индексов суммирования и от числа слагаемых (не зависит от n, p, q, m, r, k, i, j и т.д.). Необходимые утверждения мы будем формулировать в виде лемм. Ради удобства они приводятся непосредственно перед их применением.

Пусть $\beta > 1$. Введем следующие обозначения:

$$n_r = [\beta^r], \quad I(r) = \{n_r + 1, \dots, n_{r+1}\}, \quad \tau_r = 2n_{r+1}LLn_{r+1} = \alpha_{n_{r+1}}^2,$$

$[k]$ — целая часть k . Запись $a_n \sim b_n$ означает существование абсолютных констант $c_1 > 0, c_2 > 0$ таких, что $c_1 < a_n/b_n < c_2, n = 1, 2, \dots$.

Лемма 1 (см. [1]). Пусть μ — вероятностная мера на B с ковариационной функцией $T(f, g)$. Рассмотрим отображение $S: B^* \rightarrow B$, определенное следующим образом:

$$Sf = \int_B xf(x) d\mu.$$

Здесь интеграл понимается в смысле Петтиса. Обозначим через H_μ замыкание образа S и в H_μ введем норму с помощью следующего скалярного произведения:

$$\langle Sf, Sg \rangle = \int_B f(x) g(x) d\mu.$$

Тогда, если K — единичный шар H_μ , то K будет замкнутым, симметричным, выпуклым множеством в B и для всех $f \in B^*$

$$\sup_{x \in K} f(x) = \left(\int_B f^2(y) d\mu \right)^{1/2}.$$

Существование

$$T(f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} f(S_n) g(S_n)}{n}$$

следует из (4).

Произведем срезку следующим образом;

$$u_j = X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) - \mathbf{E} X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r), \quad j \in I(r),$$

$$w_j = X_j I(\|X_j\|^2 > \tau_r) - \mathbf{E} X_j I(\|X_j\|^2 > \tau_r), \quad j \in I(r),$$

$$U_n = \sum_{j=1}^n u_j, \quad W_n = \sum_{j=1}^n w_j.$$

В определениях u_j и w_j $I(A)$ есть индикатор события A .

Положим $\Gamma = \sup_{x \in K} \|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} T^{1/2}(f, f)$.

Заметим, что достаточно доказать утверждение теоремы в предположении $\Gamma > 0$. В случае $\Gamma = 0$ утверждение теоремы доказывается точно так же, как в [18, с. 712] (см. также [21]). По этой причине в дальнейшем предполагается, что $\Gamma > 0$.

Нам надо доказать, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|U_n\|}{\alpha_n} \leq \Gamma + \varepsilon \quad \text{п.н.}, \quad (6)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|W_n\|}{\alpha_n} = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (7)$$

откуда в силу произвольности ε будет следовать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\alpha_n} \leq \Gamma \quad \text{п.н.}$$

Лемма 2. Если выполнено (5), то имеет место (7).

Эта лемма доказана А. де Акостой и Дж. Куэлбсом в [2] для независимого случая, но без использования свойств независимости. Поэтому в нашем случае доказательство сохраняется (см. также [21]).

Докажем (6). Покажем, что существует достаточно близкое к единице $\beta > 1$ такое, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_n}{\alpha_n} \right\| \leq \Gamma + \varepsilon \quad \text{п.н.} \quad (8)$$

В силу возрастания α_n имеет место следующее неравенство:

$$\max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_n}{\alpha_n} \right\| \leq \frac{\alpha_{n_{r+1}}}{\alpha_{n_r}} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_n}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| \quad \text{п.н.} \quad (9)$$

Из (9) и соотношения $\alpha_{n_{r+1}}/\alpha_{n_r} \sim \sqrt{\beta}$ имеем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \frac{\|U_n\|}{\alpha_n} \leq \sqrt{\beta} \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \frac{\|U_n\|}{\alpha_{n_{r+1}}} \quad \text{п.н.}$$

Так как мы можем выбрать β сколь угодно близким к 1, то для доказательства (8) достаточно показать, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \frac{\|U_n\|}{\alpha_{n_{r+1}}} \leq \Gamma + \varepsilon \quad \text{п.н.} \quad (10)$$

Произведем секционирование следующим образом. Зафиксировав $n \in I(r)$, положим

$$\xi_i = \sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} u_j, \quad \eta_i = \sum_{j=(p+q)i-q+1}^{(p+q)i} u_j.$$

Для $n \in I(r)$ имеем

$$U_n = \sum_{i=1}^m \xi_i + \sum_{i=1}^k \eta_i + U_0,$$

где U_0 есть «остаток», остающийся после секционирования $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ до тех пор пока для очередного ξ или η не будет достаточного количества X_i . Заметим, что $m = m(n)$, $k = k(n)$, $|m - k| \leq 1$. Выбираем

$$p = \left\lceil \frac{\beta^r}{r^\gamma} \right\rceil, \quad \gamma > \max \left(1, \frac{2}{\alpha} \right), \quad q = [\beta^{\alpha_0 r}], \quad 0 < \alpha_0 < 1. \quad (11)$$

Тогда $m \sim k \sim r^\gamma$.

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_n}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{\sum_{i=1}^m \xi_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| \\ &+ \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{\sum_{i=1}^k \eta_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| + \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_0}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что два последних слагаемых в правой части неравенства (12) п.н. равны нулю. Приведем лемму, которую будем часто использовать.

Лемма 3 (см. [23]). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность центрированных B -значных с.в., удовлетворяющая условию (3). Тогда для $t \geq 2$ имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{E} \max_{1 \leq k \leq n} \|S_k\|^t \leq C \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \|X_k\|^t + (\mathbf{E} \|S_n\|^2)^{t/2} \right).$$

В силу теоремы 1 из [24], где при условии (3) доказано неравенство

$$\mathbf{E}\|S_n\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\|X_k\|^2,$$

имеем

$$\mathbf{E} \max_{1 \leq k \leq n} \|S_k\|^t \leq C \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\|X_k\|^t + \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\|X_k\|^2 \right)^{t/2} \right). \quad (13)$$

Применяя (13) и следующее простое неравенство:

$$\mathbf{E}\|X_1 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) - \mathbf{E}X_1 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)\|^2 \leq 4\mathbf{E}\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r),$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{U_0}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} \max_{n \in I(r)} \|U_0\|^2}{\varepsilon^2 \alpha_{n_{r+1}}^2} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Cp \mathbf{E}(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r))}{\varepsilon^2 \alpha_{n_{r+1}}^2} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Cp}{\varepsilon^2 \beta^r} \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r} \right), \\ \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{n \in I(r)} \left\| \frac{\sum_{i=1}^k \eta_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} \max_{n \in I(r)} \left\| \sum_{i=1}^k \eta_i \right\|^2}{\varepsilon^2 \alpha_{n_{r+1}}^2} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Ckq}{\varepsilon^2 \alpha_{n_{r+1}}^2} \mathbf{E}(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)) \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Ckq}{\varepsilon^2 \beta^r} \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r} \right). \end{aligned}$$

Из (11) вытекает сходимость двух последних рядов, следовательно, по лемме Бореля–Кантелли два последних слагаемых в правой части (12) п.н. равны нулю.

Для того чтобы оценить первое слагаемое в правой части неравенства (12), сначала получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in I(r)} \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m(n)} \xi_i - \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \alpha_{n_{r+1}} \right\} \\ \leq \sup_{n \in I(r)} \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{i=m(n)+1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \alpha_{n_{r+1}} \right\} \\ \leq C \frac{([\beta^{r+1}/p] - [\beta^r/p])^{1/2}}{\alpha_{n_{r+1}}} \sup_{n \in I(r)} \max_{m(n) < i \leq m([\beta^{r+1}])} (\mathbf{E}\|\xi_i\|^2)^{1/2} \\ \leq C \frac{r^{7/2} p^{1/2}}{\alpha_{n_{r+1}}} \left(\mathbf{E}\|X_1 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) - \mathbf{E}X_1 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \frac{\beta^{r/2} LL\tau_r}{\alpha_{n_{r+1}}} \left\{ \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r} \right) \right\}^{1/2} \\
&\leq C \left\{ \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r} \right) \right\}^{1/2}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Последняя величина при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Теперь используем следующую лемму.

Лемма 4 (см. [25]). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность с.в. со значениями в B , для которой

$$\min_{1 \leq j \leq n} \mathbf{P}\{\|S_n - S_j\| \leq a\} - \psi(1) > 0$$

для некоторого $a > 0$.

Тогда для всех x имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \|S_k\| > x\right\} \leq \left(\min_{1 \leq j \leq n} \mathbf{P}\{\|S_n - S_j\| \leq a\} - \psi(1)\right)^{-1} \mathbf{P}\{\|S_n\| > x - a\}.$$

Лемма 4 доказана для одномерных с.в., но доказательство сохраняется и в случае банаховых пространств.

Заметим, что (14) влечет выполнение условия леммы 4 (с $a = \varepsilon \alpha_{n_{r+1}}/2$), так как для достаточно больших n справедливо неравенство $\psi(q) < 1$. Используя лемму 4, получим

$$\mathbf{P}\left\{\max_{n \in I(r)} \left\|\sum_{i=1}^{m(n)} \xi_i\right\| > (\Gamma + \varepsilon) \alpha_{n_{r+1}}\right\} \leq C \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \alpha_{n_{r+1}}\right\}.$$

Дальнейшая наша цель — показать, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \alpha_{n_{r+1}}\right\} < \infty.$$

По теореме Беркеша–Филиппа [7] существует последовательность независимых с.в. $\{y_i\}$ в B таких, что y_i и ξ_i одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\|\xi_i - y_i\| > 6\psi(q)\} \leq 6\psi(q), \quad i = 1, 2, \dots$$

Так как из (3) и (12) вытекает, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} (\xi_i - y_i)\right\| > \frac{\varepsilon}{4} \alpha_{n_{r+1}}\right\} \leq \sum_{r=1}^{\infty} C m([\beta^{r+1}]) \psi(q) < \infty,$$

то нам остается доказать, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} y_i\right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{4}\right) \alpha_{n_{r+1}}\right\} < \infty. \quad (15)$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5 (см. [2]). Пусть $\{Z_i\}$ — последовательность независимых предгауссовских с.в. со значениями в B . Тогда имеет место неравенство

$$\left| \mathbf{E}g\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) - \mathbf{E}g\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \right| < C(\delta, \Lambda, \alpha) \sum_{i=1}^n \|Z_i\|^{2+\alpha},$$

где $\{G_i\}$ — последовательность независимых гауссовских с.в. в B таких, что G_i имеет тот же ковариационный оператор, что и Z_i ,

$$g(x) = \Phi(\|x\|),$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \Lambda, \\ \text{возрастает}, & \Lambda \leq t \leq \Lambda + \delta, \\ 1, & t \geq \Lambda + \delta, \end{cases} \quad \Lambda > 0, \quad \delta > 0,$$

$C(\delta, \Lambda, \alpha)$ — константа, зависящая только от δ, Λ, α и не зависящая от $\{Z_i\}$ и $\{G_i\}$.

Напомним, что случайный элемент Z называется предгауссовским, если существует гауссовский элемент с таким же ковариационным оператором, что и у Z .

Так как $\{y_i\}$ удовлетворяет условиям леммы 5, то, выбирая $\Lambda = \Gamma + \varepsilon/8$, $\delta = \varepsilon/8$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} y_i\right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{4}\right) \alpha_{n_{r+1}}\right\} &\leq \mathbf{E}g\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{y_i}{\alpha_{n_{r+1}}}\right) \\ &\leq \mathbf{E}g\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}}\right) + C \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{\mathbf{E}\|y_i\|^{2+\alpha}}{\alpha_{n_{r+1}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в ряд (15), оценим второе слагаемое с помощью (13):

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{\mathbf{E}\|y_i\|^{2+\alpha}}{\alpha_{n_{r+1}}} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{\mathbf{E}\|\xi_i\|^{2+\alpha}}{\alpha_{n_{r+1}}} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{C}{\alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} \mathbf{E}\|X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right\|^{2+\alpha} \\ &\quad + \left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} \mathbf{E}\|X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right\|^2 \right)^{(2+\alpha)/2} \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Имеем:

$$\begin{aligned}
 II &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{C}{\alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} \mathbf{E} \left\| X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbf{E} X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right\|^2 \right)^{(2+\alpha)/2} \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{C}{\alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} p^{(2+\alpha)/2} \left(\mathbf{E}(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)) \right)^{(2+\alpha)/2} \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C \beta^{r+1} p^{(2+\alpha)/2}}{p \alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \left(\mathbf{E}(\|X_1 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)\|) \right)^{(2+\alpha)/2} \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{C \beta^{r+1} p^{\alpha/2} (LL \tau_r)^{(2+\alpha)/2}}{\beta^{(r+1)(r+\alpha)/2} (LL \beta^{r+1})^{(2+\alpha)/2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL \|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL \|X_1\|}{LL \tau_r} \right) \right)^{(2+\alpha)/2} \right] \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C}{r^{\gamma \alpha/2}} \left(\mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL \|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL \|X_1\|}{LL \tau_r} \right) \right)^{(2+\alpha)/2}
 \end{aligned}$$

Из (11) вытекает сходимость последнего ряда.

Теперь оценим I (везде ниже $\phi(x) = \log_{\beta} x$):

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{C}{\alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} \mathbf{E} \left\| X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{E} X_j I(\|X_j\|^2 \leq \tau_r) \right\|^{2+\alpha} \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C \beta^{r+1} p}{p \alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \mathbf{E}(\|X_1\|^{2+\alpha} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)) \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C \beta^{r+1}}{\alpha_{n_{r+1}}^{2+\alpha}} \mathbf{E}(\|X_1\|^{2+\alpha} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)) \\
 &\leq C \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\alpha_{n_{r+1}}} \frac{k^{(2+\alpha)/2} \mathbf{P}\{k-1 \leq \|X_1\|^2 \leq k\}}{\beta^{r \alpha/2} (LL \beta^r)^{(2+\alpha)/2}} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r \geq \phi(k/4LLk)-1} \frac{k^{(2+\alpha)/2} \mathbf{P}\{k-1 \leq \|X_1\|^2 \leq k\}}{\beta^{r \alpha/2} (LL \beta^r)^{(2+\alpha)/2}} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(2+\alpha)/2} \mathbf{P}\{k-1 \leq \|X_1\|^2 \leq k\}}{(k/(LLk))^{\alpha/2} (LL(k/(LLk)))^{(2+\alpha)/2}} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{LLk} \mathbf{P}\{k-1 \leq \|X_1\|^2 \leq k\} \leq C \mathbf{E} \frac{\|X_1\|^2}{LL \|X_1\|} < \infty.
 \end{aligned}$$

Нам остается доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} g \left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right) < \infty. \quad (17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} g \left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right) &\leq \mathbf{E} I \left(\left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right) \\ &= \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right\}. \quad (18)$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6 (см. [2]). Пусть G — гауссовская с.в. в B с нулевым средним и

$$\Gamma_G = \sup_{x \in K_G} \|x\|,$$

где K_G получено также, как в лемме 1, по распределению с.в. G . Для фиксированных $t_0 > 0$, $\alpha > 0$ обозначим

$$\lambda(G) = \lambda_{t_0, \alpha}(G) = \inf \left\{ \lambda > 0: \mathbf{P} \left\{ \frac{\|G\|}{\lambda} < t_0 \right\} \geq F(\alpha) \right\},$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du.$$

Тогда для всех $t \geq t_0$ и $\rho > \lambda(G)$

$$\mathbf{P} \{ \|G\| \geq \rho t \} \leq 1 - F(\alpha + \Gamma_G^{-1} \rho(t - t_0)).$$

Положим

$$G = \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}}, \quad \Gamma_G = \Gamma_r$$

и покажем, что $\mathbf{E} \|G\|^2 = o(LLn_{r+1})$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\alpha_{n_{r+1}}} \right\|^2 &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_{n_{r+1}}^2} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E} \|G_i\|^2 \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_{n_{r+1}}^2} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E} \|\xi_i\|^2 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{C\beta^{r+1}p}{p\alpha_{n_{r+1}}^2} \mathbf{E} \|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \\ &\leq C \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r)}{LLn_{r+1}} \right) \\ &\leq C \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \leq \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LLn_{r+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Выше мы использовали следующий факт о сходимости вторых моментов в центральной предельной теореме (см. [26]):

$$\mathbf{E}\|G_i\|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}\|n^{-1/2}(y_{i1} + \dots + y_{in})\|^2 = \mathbf{E}\|y_{i1}\|^2 = \mathbf{E}\|\xi_i\|^2,$$

где $\{y_{ik}; k \geq 1\}$ — независимые копии y_i . Из соотношения $\mathbf{E}\|G\|^2 = o(LLn_{r+1})$ и неравенства Чебышева следует, что для фиксированных $t_0 > 0, \alpha > 0$

$$\lambda(G) = o\left((LLn_{r+1})^{1/2}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для любого $\theta > 0$ и достаточно больших r

$$\lambda(G) = \theta(LLn_{r+1})^{1/2} \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right).$$

Используя лемму 6, для любого фиксированного θ и $r \geq r_0(\theta)$ при $t > t_0$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\frac{\|G\|}{\theta(LLn_{r+1})^{1/2}(\Gamma + \varepsilon/8)} > t\right\} \\ & \leq 1 - F\left(\alpha + \Gamma_r^{-1}\theta(LLn_{r+1})^{1/2}\left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right)(t - t_0)\right). \end{aligned}$$

Покажем, что $\Gamma_r \rightarrow \Gamma$ при $r \rightarrow \infty$. Напомним, что

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= \left(\sup_{\|f\| \leq 1} \mathbf{E}f^2(G)\right)^{1/2} = \sup_{\|f\| \leq 1} \left(\mathbf{E}f^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\sqrt{n_{r+1}}}\right)\right)^{1/2}, \\ \Gamma &= \sup_{\|f\| \leq 1} (T(f, f))^{1/2} = \sup_{\|f\| \leq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{E}f^2(S_n)}{n}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Докажем следующее соотношение:

$$\left|\mathbf{E}f^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\sqrt{n_{r+1}}}\right) - \frac{\mathbf{E}f^2(S_{n_{r+1}})}{n_{r+1}}\right| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (19)$$

В силу независимости $\{G_i\}$ и того факта, что G_i и y_i имеют одинаковый ковариационный оператор, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\sqrt{n_{r+1}}}\right) &= \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E}f^2(G_i) = \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E}f^2(y_i) \\ &= \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E}f^2(\xi_i). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь докажем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\left|\frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \mathbf{E}f^2(\xi_i) - \frac{1}{n_{r+1}} \mathbf{E}f^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right)\right| \rightarrow 0. \quad (21)$$

Используем следующую лемму.

Лемма 7 (см. [23]). Для центрированной последовательности с.в. $\{X_i, i \geq 1\}$ со значениями в гильбертовом пространстве имеет место следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i,j=1, |i-j|>1}^n \mathbf{E} \langle X_i, X_j \rangle \right| \leq C \exp \left(2 \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \psi^{1/2}(2^{j/3}) \right) \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \psi^{1/2}(2^{j/3}) \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \|X_j\|^2.$$

Здесь C — абсолютная константа, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Используя эту лемму для одномерных с.в. $f(\xi_i)$, а также лемму 3 и имея в виду (3), получим:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \mathbf{E} f^2(\xi_i) - \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i,j=1, |i-j|>1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \mathbf{E} f(\xi_i) f(\xi_j) \right| \\ &\leq \frac{1}{n_{r+1}} \exp \left(2C \frac{\log_2 r}{r^2} \right) \frac{\log_2 r}{r^2} \sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \mathbf{E} f^2(\xi_i) \\ &\leq \frac{C \exp(2C(\log_2 r)/r^2) \log_2 r}{\beta^2 r^2} \sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} u_j \right) \\ &\leq \frac{C \exp(2C(\log_2 r)/r^2) \log_2 r}{\beta^2 r^2} r^\gamma p \mathbf{E} f^2(u_{(p+q)(m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)-1)+p}) \\ &\leq \frac{C \log_2 r}{\beta^2 r^2} \mathbf{E} f^2(u_{(p+q)(m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)-1)+p}) \longrightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n_{r+1}} \left| \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) - \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} u_i \right) \right| \longrightarrow 0. \quad (22)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) - \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} u_i \right) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) - \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i + \sum_{i=1}^k \eta_i + U_0 \right) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) + \mathbf{E} f^2(U_0) + 2\mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) f \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^{m(\lfloor \beta^{r+1} \rfloor)} \xi_i \right) f(U_0) + 2\mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) f(U_0) \right) \right|. \end{aligned}$$

Сходимость последнего выражения к нулю при $r \rightarrow \infty$ вытекает из следующих пяти соотношений:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) &\leq \frac{Ckq}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(u_{(p+q)k}) \\
 &\leq \frac{Cr^\gamma \beta^{\alpha_0 r}}{\beta^{r+1}} \mathbf{E} f^2(u_{(p+q)k}) \rightarrow 0; \\
 \frac{1}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(U_0) &\leq \frac{Cp}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(u_{n_{r+1}}) \\
 &\leq \frac{C \frac{\beta^r}{r^\gamma}}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(u_{n_{r+1}}) \rightarrow 0; \\
 \left| \frac{2}{n_{r+1}} \mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i \right) f \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \right| &\leq \frac{2}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i \right) \right)^{1/2} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{C \sqrt{m([\beta^{r+1}])} p \sqrt{kq}}{n_{r+1}} \leq \frac{C \sqrt{r^\gamma (\beta^r / r^\gamma)} r^\gamma \beta^{r\alpha_0}}{\beta^{r+1}} \\
 &\leq \frac{C \beta^{(1/2 + \alpha_0/2)r}}{\beta^r} \rightarrow 0; \\
 \left| \frac{2}{n_{r+1}} \mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i \right) f(U_0) \right| &\leq \frac{2}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^k \xi_i \right) \right)^{1/2} (\mathbf{E} f^2(U_0))^{1/2} \\
 &\leq \frac{C \sqrt{r^\gamma (\beta^r / r^\gamma)} \sqrt{\beta^r / r^\gamma}}{\beta^r} \leq \frac{C}{r^{\gamma/2}} \rightarrow 0; \\
 \left| \frac{2}{n_{r+1}} \mathbf{E} f \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) f(U_0) \right| &\leq \frac{2}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \right)^{1/2} (\mathbf{E} f^2(U_0))^{1/2} \\
 &\leq \frac{C \sqrt{r^\gamma \beta^{\alpha_0 r}} \sqrt{\beta^r / r^\gamma}}{\beta^r} \leq \frac{C \beta^{(\alpha_0/2 + 1/2)r}}{\beta^r} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, остается доказать, что при $r \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} \eta_i \right) - \mathbf{E} f^2(S_{n_{r+1}}) \right) \right| \rightarrow 0. \quad (23)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} \eta_i \right) - \mathbf{E} f^2(S_{n_{r+1}}) \right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(\mathbf{E} f^2 \left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} \eta_i \right) - \mathbf{E} f^2(U_{n_{r+1}} + W_{n_{r+1}}) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{n_{r+1}} \left| \mathbf{E} f^2(W_{n_{r+1}}) + \mathbf{E} f(U_{n_{r+1}}) f(W_i) \right|.
 \end{aligned}$$

Далее, из леммы 3 получаем

$$\frac{1}{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(W_{n_{r+1}}) \leq C \frac{\sum_{i=1}^{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(w_i)}{n_{r+1}}.$$

Из соотношения $\mathbf{E} f^2(w_{n_{r+1}}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и известной леммы Тёплица вытекает, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{r+1}} \mathbf{E} f^2(w_{n_{r+1}})}{n_{r+1}} \rightarrow 0.$$

при $r \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{r+1}} |\mathbf{E} f(U_{n_{r+1}}) f(W_{n_{r+1}})| &\leq \frac{1}{n_{r+1}} (\mathbf{E} f^2(U_{n_{r+1}}))^{1/2} (\mathbf{E} f^2(W_{n_{r+1}}))^{1/2} \\ &\leq \frac{C \sqrt{n_{r+1}} (\mathbf{E} f^2(W_{n_{r+1}}))^{1/2}}{n_{r+1}} \leq C \left(\frac{\mathbf{E} f^2(W_{n_{r+1}})}{n_{r+1}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Сходимость к нулю последнего выражения была уже нами доказана.

Остается выбрать такое достаточно малое $\theta > 0$, чтобы $t = \theta^{-1}$ было больше t_0 и для достаточно больших r выполнялось неравенство

$$\Gamma_r^{-1} \theta \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right) \left(\frac{1}{\theta} - t_0 \right) > 1 + \delta \quad \text{для некоторого } \delta > 0.$$

При таком выборе θ и $t = \theta^{-1}$ для достаточно больших r имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \|G\| > (LLn_{r+1})^{1/2} \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right) \right\} &\leq 1 - F((1 + \delta)(LLn_{r+1})^{1/2}) \\ &\leq \exp \left\{ - \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) LLn_{r+1} \right\}, \end{aligned}$$

откуда в свою очередь следует (18). Таким образом, мы доказали (15). Доказательство достаточности закончено.

Н е о б х о д и м о с т ь. Сначала приведем закон «0 или 1» для последовательности с.в. с сильным перемешиванием.

Напомним, что коэффициент сильного перемешивания для последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$ определяется следующим образом:

$$\alpha(k) = \sup \left\{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| : A \in \mathcal{F}_1^n, B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty, n \in \mathbf{N} \right\},$$

где $\mathcal{F}_k^n$ — σ -алгебра, порожденная с.в. $X_k, \dots, X_n$.

Лемма 8. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ последовательность с.в. со значениями в любом сепарабельном баназовом пространстве, которая удовлетворяет следующему условию: $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = 0$. Тогда «хвостовая» σ -алгебра $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n^\infty$ тривиальна, т.е. для любого $A \in \mathcal{F}$ имеем $\mathbf{P}(A) = 0$ или $\mathbf{P}(A) = 1$.

Для полноты изложения приведем доказательство леммы 8 (см. также [27]). Мы будем следовать доказательству теоремы 1 из [28, с. 368]. Там доказано, что для любого $A \in \mathcal{F}$ существуют множества $A_n \in \mathcal{F}_1^n$,

$n \geq 1$, такие, что $\mathbf{P}(A_n A) \rightarrow \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A_n) \rightarrow \mathbf{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$, что доказано в [28, с. 368] (см. доказательство теоремы 1).

Так как $A \in \mathcal{F}$ то $A \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty$ для любого $k \geq 1$. Из определения коэффициента перемешивания получим

$$|\mathbf{P}(A_n A) - \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}(A)| \leq \alpha(k) \quad \text{для любого } k \geq 1,$$

что вместе с условием леммы 8 влечет $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}^2(A)$. Откуда и следует утверждение леммы 8.

Лемма 8 и соотношение (1) влекут существование постоянной с такой, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|S_n\|/\alpha_n) = c$ п.н., откуда вытекает существование константы K такой, что

$$\mathbf{P}\left\{\left\|\frac{X_n}{\alpha_n}\right\| > K \text{ бесконечно часто}\right\} = 0. \quad (24)$$

Используем следующую лемму, которую сформулируем в нужной нам форме.

Лемма 9 (см. [29]). *Для последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$ с.в., удовлетворяющих условию ψ -перемешивания и принимающих значения в B , условия (24) достаточно для того, чтобы $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{\|X_n/\alpha_n\| > K\} < \infty$.*

Отсюда получаем, что

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\left\{\left\|\frac{X_n}{\alpha_n}\right\| > K\right\} = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{\|X_1\| > K\alpha_n\} < \infty.$$

Сходимость последнего ряда эквивалентна условию (5).

Таким образом, доказательство теоремы закончено.

Автор приносит свою благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения, способствовавшие улучшению первоначального варианта статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goodman V., Kuelbs J., Zinn J. Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 5, p. 713–752.
2. de Acosta A., Kuelbs J. Some results on the cluster sets $C(\{S_n/a_n\})$ and the LIL. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 1, p. 102–122.
3. Ledoux M., Talagrand M. Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 3, p. 1242–1264.
4. Kuelbs J. A strong convergence theorem for Banach space valued random variables. — Ann. Probab., 1976, v. 4, № 5, p. 744–771.
5. Kuelbs J., Philipp W. Almost sure invariance principles for partial sums of mixing B -valued random variables. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 6, p. 1003–1036.
6. Dehling H., Philipp W. Almost sure invariance principles for weakly dependent vector-valued random variables. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 3, p. 689–701.
7. Berkes I., Philipp W. Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 1, p. 29–54.

8. *Phillipp W.* Almost sure invariance principles for sums of B -valued random variables. — *Lecture Notes in Math.*, 1979, v. 709, p. 171–193.
9. *Berger E.* An almost sure invariance principles for stationary ergodic sequences of Banach space valued random variables. — *Probab. Theory Related. Fields*, 1990, v. 84, p. 161–201.
10. *Einmahl U.* Stability results and strong invariance principles for partial sums of Banach space valued random variables. — *Ann. Probab.*, 1989, v. 17, № 1, p. 333–352.
11. *Li D. L., Rao M. B., Wang X. C.* The law of the iterated logarithm for independent random variables with multidimensional indices. — *Ann. Probab.*, 1992, v. 20, № 2, p. 660–674.
12. *Chen X.* On the law of the iterated logarithm for independent Banach space valued random variables. — *Ann. Probab.*, 1993, v. 21, № 4, p. 1991–2011.
13. *Einmahl U.* Toward a general law of the iterated logarithm in Banach space. — *Ann. Probab.*, 1993, v. 21, № 4, p. 2012–2045.
14. *Chen X.* On Strassen's law of the iterated logarithm in Banach space. — *Ann. Probab.*, 1994, v. 22, № 2, p. 1026–1043.
15. *Einmahl U.* On the cluster set problem for the generalized law of the iterated logarithm in Euclidean space. — *Ann. Probab.*, 1995, v. 23, № 2, p. 817–851.
16. *Li D., Tomkins R. J.* Compact laws of the iterated logarithm for B -valued random variables with two dimensional indices. — *J. Theoret. Probab.*, 1998, v. 11, № 2, p. 443–459.
17. *Шарипов О. Ш.* Предельные теоремы для слабозависимых случайных величин со значениями в пространстве l_p . Автореферат дисс. . . канд. физ.-матем. наук, 1993, Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент, 16 с.
18. *Chen X.* The law of the iterated logarithm for m -dependent Banach space valued random variables. — *J. Theoret. Probab.*, 1997, v. 10, № 3, p. 695–732.
19. *Kuelbs J.* An inequality for the distribution of a sum of certain Banach space valued random variables. — *Studia Math.*, 1974, v. 52, p. 69–87.
20. *Peligrad M.* Invariance principles for mixing sequences of random variables. — *Ann. Probab.*, 1982, v. 10, № 4, p. 968–981.
21. *Шарипов О. Ш.* Закон повторного логарифма для слабо зависимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. — *Сиб. матем. журнал*, 2003, т. 44, № 6, с. 1407–1424.
22. *Sharipov O. Sh.* Strong limit theorems for mixing random variables with values in Hilbert space and their applications. — *Progress in Probability*. Ed. by M. Marcus and J. Wellner. Birkhauser-Verlag-Basel: Switzerland, 2003, v. 55, p. 153–174.
23. *Утев С. А.* Суммы случайных величин с ϕ -перемешиванием. — *Труды Ин-та Математики СО АН РАН*, 1989, т. 13, с. 78–100.
24. *Шарипов О. Ш.* О вероятностной характеристизации банаховых пространств слабозависимыми случайными элементами. — *Узб. матем. журн.*, 1998, № 2, с. 86–91.
25. *Iosifescu M., Theodorescu R.* *Random Processes and Learning*. New York: Springer-Verlag, 1969, 304 p.
26. *de Acosta A., Giné E.* Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorem in Banach spaces. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 1979, v. 48, № 2, p. 213–231.
27. *Bradley R. C.* Introduction to strong mixing conditions, v. I. Technical report, Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington. Custom Publishing of I. U., Bloomington, March, 2002, 528 p.
28. *Ширяев А. Н.* *Вероятность*. М.: Наука, 1980, 576 с.
29. *Cohn H.* On a class of dependent random variables. — *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1965, v. 10, p. 1593–1606.

Поступила в редакцию
16.X.2001