Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Двусторонние неравенства для преобразований Лапласа, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 767–773

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:55:22

Доказательство теоремы следует схеме доказательства теорем 7.9.2 и 7.4.1 из [2] с использованием леммы 1 вместо преобразования Гирсанова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
2. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
3. Веретенников А. Ю. О больших отклонениях в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. 2. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1991, т. 55, № 4, с. 691–715.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
5. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.
6. Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах с усреднением. — Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 2, с. 273–276.
7. Фрейдлин М. И. Принцип усреднения и теоремы о больших отклонениях. — Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 5, с. 107–160.
8. Priouret P. Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour. — Lect. Notes Math., 1974, v. 390.

Поступила в редакцию
15.VI.1998

© 1998 г.

ЗУБКОВ А. М.*

ДВУСТОРОННИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА¹⁾

В заметке получены двусторонние неравенства для преобразований Лапласа неотрицательных случайных величин и случайных векторов с неотрицательными координатами, выраженные в терминах моментов (т.е. в терминах производных преобразований Лапласа в 0). Доказательства используют связь между преобразованиями Лапласа и производящими функциями, вероятностями объединения событий, а также неравенства для таких вероятностей.

Ключевые слова и фразы: неотрицательные случайные величины, преобразование Лапласа.

Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, и $\psi(z) = E \exp(-z\xi)$ ($z \geq 0$) — ее преобразование Лапласа. В настоящей работе получены двусторонние оценки для $\psi(z)$, имеющие вид рациональных функций от z и моментов случайной величины ξ . Аналогичные результаты получены для преобразований Лапласа случайных векторов с неотрицательными компонентами.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00531 и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект 96-15-96092.

Вывод этих неравенств основан на сведении оценивания преобразования Лапласа к оцениванию вероятности того, что некоторая целочисленная неотрицательная случайная величина равна 0, и использованию неравенств из работы автора [4].

По неотрицательной случайной величине ξ с функцией распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ и по числу $\lambda \geq 0$ построим целочисленную случайную величину $\nu = \nu(F, \lambda)$, распределение которой определяется формулой

$$P\{\nu = k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dP\{\xi \leq x\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Случайную величину ν можно интерпретировать как число событий в пуассоновском ординарном потоке с интенсивностью λ , происходящих на интервале $[0, \xi]$, где ξ не зависит от пуассоновского потока.

Теорема 1. *Справедливы соотношения*

$$\psi(\lambda) = P\{\nu(F, \lambda) = 0\}, \quad (2)$$

$$E \nu^{[r]}(F, \lambda) = \lambda^r E \xi^r,$$

$$E \nu^r(F, \lambda) = \sum_{k=0}^r S(r, k) \lambda^k E \xi^k, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $S(r, k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Доказательство. Пусть $\psi(z) = E \exp(-z\xi)$ — преобразование Лапласа распределения неотрицательной случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$, а $f_\lambda(s) = E s^{\nu(F, \lambda)}$ — производящая функция распределения случайной величины $\nu(F, \lambda)$. В силу (1)

$$\begin{aligned} f_\lambda(s) &= E s^{\nu(F, \lambda)} = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda s x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dP\{\xi \leq x\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-s)x} dP\{\xi \leq x\} = E e^{-\lambda(1-s)\xi} = \psi(\lambda(1-s)). \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая в (4) $s = 0$ и учитывая, что $f_\lambda(0) = P\{\nu(F, \lambda) = 0\}$, получаем равенство (2).

Дифференцируя r раз тождество (4) по s при $s = 1$, находим связь между факториальными моментами $E \nu^{[r]} = E \nu(\nu - 1) \dots (\nu - r + 1)$ случайной величины $\nu(F, \lambda)$ и степенными моментами случайной величины ξ :

$$\begin{aligned} E \nu^{[r]}(F, \lambda) &= \left. \frac{d^r}{ds^r} f_\lambda(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d^r}{ds^r} \psi(\lambda(1-s)) \right|_{s=1} \\ &= (-\lambda)^r \left. \frac{d^r}{dz^r} \psi(z) \right|_{z=0} = \lambda^r E \xi^r. \end{aligned}$$

По определению чисел Стирлинга второго рода $S(r, k)$ (см., например, [1])

$$x^r = \sum_{k=0}^r S(r, k) x^{[k]}, \quad (5)$$

где $S(0, 0) = S(r, r) = S(r, 1) = 1$, $S(r+1, k) = S(r, k-1) + kS(r, k)$ при $r \geq 0$, $2 \leq k \leq r$.

Следовательно,

$$E \nu^r(F, \lambda) = \sum_{k=0}^r S(r, k) \lambda^k E \xi^k, \quad r = 1, 2, \dots$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Аналогичные утверждения верны и для многомерных распределений. Каждому распределению $F_n(\cdot)$ n -мерного случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}_+^n$ и набору $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}_+^n$ сопоставим распределение вектора $\bar{\nu} = \nu(F_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами, определяемое соотношением

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{(\nu_1, \dots, \nu_n) = (k_1, \dots, k_n)\} \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{j=1}^n \frac{(\lambda_j x_j)^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda_j x_j} F_n(dx_1 \dots dx_n), \quad k_1, \dots, k_n \in \{0, 1, \dots\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как и в одномерном случае, распределение случайного вектора $(\nu_1, \dots, \nu_n) = \nu(F_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ можно интерпретировать как совместное распределение чисел событий в n независимых пуассоновских потоках с интенсивностями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на отрезках с длинами $\xi_1, \dots, \xi_n$, если вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и пуассоновские процессы независимы.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{P}\{\nu(F_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)\} = \mathbf{P}\{\nu_1 + \dots + \nu_n = 0\}, \quad (7)$$

и для любых целых неотрицательных $r, r_1, \dots, r_n$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \nu_1^{[r_1]} \dots \nu_n^{[r_n]} = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_n^{r_n} \mathbf{E} \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n}, \\ & \mathbf{E} (\nu_1 + \dots + \nu_n)^{[r]} = \mathbf{E} (\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)^r, \\ & \mathbf{E} \nu_1^{r_1} \dots \nu_n^{r_n} = \sum_{v_1=0}^{r_1} \dots \sum_{v_n=0}^{r_n} x_1^{[v_1]} \dots x_n^{[v_n]} \prod_{j=1}^n S(r_j, v_j), \end{aligned} \quad (8)$$

где $S(r, v)$ — числа Стирлинга второго рода.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. В силу (6)

$$\begin{aligned} f_\lambda(s_1, \dots, s_n) &= \mathbf{E} s_1^{\nu_1} \dots s_n^{\nu_n} \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^\infty \prod_{j=1}^n \frac{(\lambda_j x_j s_j)^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda_j x_j} F_n(dx_1 \dots dx_n) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\left(-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j (1 - s_j)\right) F_n(dx_1 \dots dx_n) \\ &= \mathbf{E} \exp\left\{-\left(\lambda_1(1 - s_1)\xi_1 + \dots + \lambda_n(1 - s_n)\xi_n\right)\right\} \\ &= \psi(\lambda_1(1 - s_1), \dots, \lambda_n(1 - s_n)). \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в (9) $s_1 = \dots = s_n = 0$ и учитывая, что $f_\lambda(0, \dots, 0) = \mathbf{P}\{\nu_1 = \dots = \nu_n = 0\}$, получаем равенство (7).

Дифференцируя тождество (9) r_1 раз по $s_1, \dots, r_n$ раз по s_n , находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \nu_1^{[r_1]} \dots \nu_n^{[r_n]} &= \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n}}{\partial s_1^{r_1} \dots \partial s_n^{r_n}} f_\lambda(s_1, \dots, s_n) \Big|_{s_1 = \dots = s_n = 1} \\ &= (-\lambda_1)^{r_1} \dots (-\lambda_n)^{r_n} \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n}}{\partial z_1^{r_1} \dots \partial z_n^{r_n}} \psi(z_1, \dots, z_n) \Big|_{z_1 = \dots = z_n = 0} \\ &= \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_n^{r_n} \mathbf{E} \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь следующие из (5) соотношения

$$\prod_{j=1}^n x_j^{r_j} = \sum_{v_1=0}^{r_1} \dots \sum_{v_n=0}^{r_n} x_1^{[v_1]} \dots x_n^{[v_n]} \prod_{j=1}^n S(r_j, v_j)$$

вместе с (10) показывают, что

$$\mathbb{E} \nu_1^{r_1} \dots \nu_n^{r_n} = \sum_{v_1=0}^{r_1} \dots \sum_{v_n=0}^{r_n} x_1^{[v_1]} \dots x_n^{[v_n]} \prod_{j=1}^n S(r_j, v_j).$$

Наконец, выражение для $\mathbb{E}(\nu_1 + \dots + \nu_n)^{[r]}$ следует из равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{E} s^{\nu_1 + \dots + \nu_n} &= f_\lambda(s, \dots, s) = \psi(\lambda_1(1-s), \dots, \lambda_n(1-s)) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(-(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)(1-s)\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\nu_1 + \dots + \nu_n)^{[r]} &= \left. \frac{d^r}{ds^r} f_\lambda(s, \dots, s) \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d^r}{ds^r} \mathbb{E} \exp\left(-(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)(1-s)\right) \right|_{s=1} \\ &= \mathbb{E}(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)^r. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 2 доказана полностью.

Теоремы 1 и 2 показывают, что оценки для преобразования Лапласа $\psi(\lambda)$ распределения F неотрицательной случайной величины ξ (или преобразования Лапласа $\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ распределения F_n случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ с неотрицательными координатами) эквивалентны оценкам вероятностей того, что определенная формулой (1) случайная величина $\nu(F, \lambda)$ (соответственно, сумма $\nu^{(n)} = \nu_1 + \dots + \nu_n$ координат определенного формулой (6) случайного вектора $\nu(F_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$) равна 0. Любую целочисленную случайную неотрицательную величину ν можно интерпретировать как сумму индикаторов зависимых событий; тогда вероятность равенства случайной величины нулю становится вероятностью дополнения к объединению этих событий, и ее можно оценивать, например, с помощью неравенств Бонферрони (см. [2, гл. IV])

$$\sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k \frac{\mathbb{E} \nu^{[k]}}{k!} \leq \mathbb{P}\{\nu = 0\} \leq \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{\mathbb{E} \nu^{[k]}}{k!}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

или их уточнений (см., например, [3]). В силу (3) и (8) классические неравенства Бонферрони (11) при этом дают в качестве верхних и нижних оценок для преобразований Лапласа отрезки их тейлоровских разложений в 0:

$$\sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k \frac{\lambda^k \mathbb{E} \xi^k}{k!} \leq \psi(\lambda) = \mathbb{E} e^{-\lambda \xi} \leq \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{\lambda^k \mathbb{E} \xi^k}{k!}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k \frac{\mathbb{E}(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)^k}{k!} &\leq \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbb{E} e^{-(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{\mathbb{E}(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)^k}{k!}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Менее тривиальный вид имеют оценки, основанные на результатах [4] (при быстром росте моментов случайных величин ν и $\nu^{(n)}$ неравенства из [4] оказываются лучше неравенств Бонферрони, см. пример 5 в [4]). Для полноты изложения приведем формулировку и простое доказательство теоремы 1 из [4].

Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ — действительные числа; положим

$$\begin{aligned} M(a_0, a_1, \dots, a_{2r}) &= \|a_{i+j}\|_{i,j=0}^r, \\ D(a_0, a_1, \dots, a_{2r}) &= \det M(a_0, a_1, \dots, a_{2r}), \\ \Delta a_i &= a_i - a_{i-1}. \end{aligned}$$

Теорема 3 ([4, теорема 1]). Если случайная величина η , $P\{\eta \geq 0\} = 1$, такова, что $E\eta^k = m_k < \infty$, $k = 1, 2, \dots, 2r$, и $D(m_2, m_3, \dots, m_{2r}) \neq 0$, то

$$P\{\eta > 0\} \geq -\frac{D(0, m_1, \dots, m_{2r})}{D(m_2, m_3, \dots, m_{2r})} \geq 0, \quad r \geq 1, \quad (13)$$

а если, кроме того, $E\eta^{2r+1} = m_{2r+1} < \infty$, $P\{0 < \eta < 1\} = 0$ и $D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1}) \neq 0$, то

$$P\{\eta \geq 1\} \leq m_1 + \frac{D(0, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})}{D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1})}, \quad r \geq 1. \quad (14)$$

Доказательство основано на равенствах $m_k = E\eta^k \chi\{\eta > 0\}$ ($k = 1, 2, \dots$), $m_0 = E\chi\{\eta > 0\} = P\{\eta > 0\}$ и введении неотрицательно определенных квадратичных форм

$$\begin{aligned} E\chi\{\eta > 0\} (z_0 + z_1\eta + \dots + z_r\eta^r)^2 &= \sum_{i,j=0}^r z_i z_j m_{i+j}, \\ E\chi\{\eta > 0\} (\eta - 1) (z_0 + z_1\eta + \dots + z_r\eta^r)^2 &= \sum_{i,j=0}^r z_i z_j (m_{i+j+1} - m_{i+j}). \end{aligned} \quad (15)$$

Матрицами этих квадратичных форм являются соответственно $M(P\{\eta > 0\}, m_1, \dots, m_{2r})$ и $M(m_1 - P\{\eta \geq 1\}, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})$. В силу неотрицательной определенности квадратичных форм (15) их определители и определители их главных миноров неотрицательны:

$$\begin{aligned} D(P\{\eta > 0\}, m_1, \dots, m_{2r}) &= P\{\eta > 0\} D(m_2, m_3, \dots, m_{2r}) + D(0, m_1, \dots, m_{2r}) \geq 0, \\ D(m_1 - P\{\eta \geq 1\}, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1}) &= \\ &= (m_1 - P\{\eta \geq 1\}) D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1}) + \\ &+ D(0, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Решение этих линейных неравенств дает оценки (13) и (14).

Используя оценки теоремы 3, а также теорему 1, получаем двусторонние оценки для преобразований Лапласа распределений неотрицательных случайных величин.

Теорема 4. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина и $\psi(\lambda) = E \exp(-\xi\lambda)$. Если $E\xi^{2r} < \infty$ и $D(m_2(\lambda), m_3(\lambda), \dots, m_{2r}(\lambda)) \neq 0$, то

$$\psi(\lambda) \leq 1 + \frac{D(0, m_1(\lambda), \dots, m_{2r}(\lambda))}{D(m_2(\lambda), m_3(\lambda), \dots, m_{2r}(\lambda))}, \quad (16)$$

а если $Ee^{2r+1} < \infty$ и $D(\Delta m_3(\lambda), \Delta m_4(\lambda), \dots, \Delta m_{2r+1}(\lambda)) \neq 0$, то

$$\psi(\lambda) \geq 1 - \lambda E \xi - \frac{D(0, \Delta m_2(\lambda), \Delta m_3(\lambda), \dots, \Delta m_{2r+1}(\lambda))}{D(\Delta m_3(\lambda), \Delta m_4(\lambda), \dots, \Delta m_{2r+1}(\lambda))}, \quad (17)$$

где при $k = 1, 2, \dots$ $m_k(\lambda) = \sum_{j=0}^k S(k, j) \lambda^j E \xi^j$, $\Delta m_k(\lambda) = m_k(\lambda) - m_{k-1}(\lambda)$, а $S(k, j)$ — числа Стирлинга второго рода.

В частных случаях $r = 1$ и $r = 2$ общие формулы (16), (17) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda E \xi + \frac{\lambda^2 (E \xi^2)^2}{\lambda E \xi^3 + 2 E \xi^2} &\leq \psi(\lambda) \leq 1 - \frac{\lambda (E \xi)^2}{\lambda E \xi^2 + E \xi}, \\ 1 - \lambda E \xi + \frac{\lambda^2 (E \xi^2)^2}{\lambda E \xi^3 + 2 E \xi^2} + \lambda^2 &\left| \begin{array}{cc} E \xi^2 & \lambda E \xi^3 \\ \lambda E \xi^3 & \lambda^2 E \xi^4 + \lambda E \xi^3 \end{array} \right|^2 (\lambda E \xi^3 + 2 E \xi^2)^{-1} \\ &\times \left| \begin{array}{cc} \lambda E \xi^3 + 2 E \xi^2 & \lambda^2 E \xi^4 + 5 \lambda E \xi^3 + 4 E \xi^2 \\ \lambda^2 E \xi^4 + 5 \lambda E \xi^3 + 4 E \xi^2 & \lambda^3 E \xi^5 + 9 \lambda^2 E \xi^4 + 19 \lambda E \xi^3 + 8 E \xi^2 \end{array} \right|^{-1} \\ &\leq \psi(\lambda) \leq 1 - \frac{\lambda (E \xi)^2}{\lambda E \xi^2 + E \xi} - \lambda \left| \begin{array}{cc} E \xi & \lambda E \xi^2 \\ \lambda E \xi^2 & \lambda^2 E \xi^3 + \lambda E \xi^2 \end{array} \right|^2 (\lambda E \xi^2 + E \xi)^{-1} \\ &\times \left| \begin{array}{cc} \lambda E \xi^2 + E \xi & \lambda^2 E \xi^3 + 3 \lambda E \xi^2 + E \xi \\ \lambda^2 E \xi^3 + 3 \lambda E \xi^2 + E \xi & \lambda^3 E \xi^4 + 6 \lambda^2 E \xi^3 + 7 \lambda E \xi^2 + E \xi \end{array} \right|^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

При переходе от оценок (16), (17) к оценкам вида (18) использовано тождество

$$-\frac{D(0, a_1, \dots, a_{2r})}{D(a_2, \dots, a_{2r})} = \frac{a_1^2}{a_2} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(D(a_1, a_2, \dots, a_{2j+1}))^2}{D(a_2, \dots, a_{2j}) D(a_2, \dots, a_{2(j+1)})}.$$

Его доказательство для случаев, когда $\{a_j\}$ — последовательность моментов, проведено в [5], где метод теоремы 1 использован при выводе двусторонних оценок для математического ожидания и дисперсии отношения ξ/η положительных случайных величин ξ и η . Содержащееся в [5] доказательство непосредственно переносится на общий случай.

Поскольку оценки (12) для преобразований Лапласа векторных случайных величин с неотрицательными координатами имеют ту же форму, что оценки для преобразований Лапласа скалярных случайных величин, постольку теорема 4 и неравенства (16), (17) непосредственно обобщаются и на векторный случай.

З а м е ч а н и е 1. При $\lambda \rightarrow \infty$ правые части неравенств (16) и (18) стремятся к оценке для $P\{\nu(F, \lambda) = 0\}$, соответствующей (13), что естественно, так как $\psi(\lambda) \rightarrow P\{\xi = 0\}$ и $P\{\nu(F, \lambda) = 0\} \rightarrow P\{\xi = 0\}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

С другой стороны, правая часть (17) при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} &-\lambda \left(E \xi + \frac{D(0, E \xi^2, E \xi^3, \dots, E \xi^{2r+1})}{D(E \xi^3, E \xi^4, \dots, E \xi^{2r+1})} \right) + O(1) \\ &= -\lambda \frac{D(E \xi, E \xi^2, \dots, E \xi^{2r+1})}{D(E \xi^3, E \xi^4, \dots, E \xi^{2r+1})}. \end{aligned}$$

Это выражение в силу (17) не может быть больше 1 ни при каком положительном λ , т.е. отношение определителей в правой части неотрицательно. В действительности каждый из них неотрицателен. Таким образом, нижние оценки (17) и (18) при больших λ , как правило, становятся отрицательными. Одна из причин этого — чисто аналитическая: преобразование Лапласа может убывать при $\lambda \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью, а нижние оценки, являясь рациональными функциями от λ , не могут при всех λ находиться между 0 и экспоненциально убывающей функцией.

З а м е ч а н и е 2. Если $\nu \geq 0$ — целочисленная случайная величина и $f(s) = \mathbf{E} s^\nu$ — ее производящая функция, а $\psi(\lambda) = \mathbf{E} e^{-\lambda \nu}$ — преобразование Лапласа, то $f(s) = \psi(-\ln s)$, и оценки для $f(s)$ можно получать из теоремы 4. В примере 3 в [4] оценки для $f(s)$ выводились непосредственно из приведенной выше теоремы 3 за счет рассмотрения вспомогательной целочисленной случайной величины μ с производящей функцией $\mathbf{E} u^\mu = f(s + (1-s)u)$ и моментами

$$\mathbf{E} \mu^{[k]} = \frac{d^k}{du^k} f(s + (1-s)u) |_{u=1} = (1-s)^k f^{(k)}(1) = (1-s)^k \mathbf{E} \nu^{[k]}.$$

При этом оценка $f(s)$ сводилась к оценке $\mathbf{P}\{\mu \geq 1\}$: $1-f(s) = 1-\mathbf{E} u^\mu |_{u=0} = 1-\mathbf{P}\{\mu = 0\} = \mathbf{P}\{\mu \geq 1\}$, а правая часть последнего равенства оценивалась с помощью (13) и (14). Аналогом (17) при этом оказывается неравенство

$$1 - z\mathbf{E} \nu + \frac{(z\mathbf{E} \nu^{[2]})^2}{z\mathbf{E} \nu^{[3]} + 2\mathbf{E} \nu^{[2]}} \leq f(1-z) \leq 1 - \frac{(z\mathbf{E} \nu)^2}{z\mathbf{E} \nu^{[2]} + \mathbf{E} \nu}.$$

Такой же прием использован в [4] и при оценивании производящих функций целочисленных случайных векторов с неотрицательными координатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963, 288 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
3. Galambos J., Simonelli I. Bonferroni-type inequalities with applications. New York e.a.: Springer-Verlag, 1996, ix+269 p.
4. Зубков А. М. Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. — Обзорение прикл. и промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1994, т. 1, в. 4, с. 638–666.
5. Зубков А. М. Неравенства для моментов отношения случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1996, т. 3, в. 4, с. 549–566.

Поступила в редакцию
2.II.1998

© 1998 г.

КАЛИНКИН А. В.*

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ И ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ

Предложенный в работах [6], [7] метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова применяется к модели эпидемии Вейса и ее обобщению. Получены интегральные представления для производящих функций финальных вероятностей.

*Московский государственный технический университет, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия.