Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колесников, О топологических свойствах пространства Скорохода, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 781–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:02:57

© 1998 г.

КОЛЕСНИКОВ А. В.*

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ
ПРОСТРАНСТВА СКОРОХОДА¹⁾

Установлено, что пространство Скорохода $D_1(X)$, где $X \subset E$ — некоторое коаналитическое множество в польском пространстве E — также является коаналитическим в польском пространстве $D_1(E)$. В то же время показано, что для суслинского $X \subset E$ пространство $D_1(X)$ может даже не быть универсально измеримым в $D_1(E)$.

Ключевые слова и фразы: пространство Скорохода, топология Скорохода, польское пространство, суслинское (аналитическое) множество, проективный класс, универсально измеримое множество, пространство замкнутых подмножеств топологического пространства.

В последнее время в теории случайных процессов все чаще возникают задачи, связанные с пространством Скорохода $D_1(E)$, где E — некоторое вполне регулярное пространство (см. [1]). Важность таких пространств проистекает из того, что многие типичные марковские процессы, пространство состояний которых — топологическое пространство E , имеют траектории из пространства Скорохода (см., например, [13], [5]). В связи с этим полезно было бы знать, какие топологические свойства, которыми обладает пространство E , сохраняются также для пространства $D_1(E)$. Отметим, что подобного рода вопросы возникают даже для числовых процессов, если в качестве фазового пространства брать не всю числовую ось R , а какие-либо борелевские или суслинские подмножества пространства R .

Пространство $D_1(R)$ ввел А. В. Скороход в [17] (см. также [18], [19]). А. Н. Колмогоровым в [12] было доказано, что $D_1(R)$ — польское пространство. Явный вид метрики, превращающей $D_1(R)$ в полное пространство был указан в [16] Ю. В. Прохоровым (см. также более компактные формулы в [2]). Известно, (см. [9]), что, если пространство E — польское, то таковым является и $D_1(E)$.

В этой заметке будет дан ответ на вопрос, всегда ли будет пространство $D_1(X) \subset D_1(E)$ суслинским подмножеством пространства $D_1(E)$ для суслинского $X \subset E$. Известно, что это так, если пространство $D_1(X)$ наделено топологией поточечной сходимости (см. [10]). Оказывается, что если $D_1(X)$ наделено топологией Скорохода, то это может быть неверно даже в весьма простых случаях, например, если в качестве X взять множество всех рациональных чисел из $[0, 1]$. При некоторых теоретико-множественных предположениях можно показать, что множество $D_1(X)$ может даже не быть универсально измеримым. В то же время, если X имеет суслинское дополнение, то пространство $D_1(X)$ тоже будет иметь суслинское дополнение.

1. Некоторые вспомогательные результаты. Различные свойства пространства Скорохода рассматривались в [14], [8], [3]. Мы используем обозначения из [8]. Пусть (E, τ) — вполне регулярное топологическое пространство, топология τ в котором описывается семейством псевдометрик ρ_α . Пространством Скорохода $D_1(E)$ называется пространство отображений $x: [0, 1] \rightarrow E$, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы для всех $t > 0$, с топологией, описываемой следую-

*Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 96-15-96865, 97-01-00932 и российско-германского гранта.

щим семейством псевдометрик:

$$\tilde{\rho}_\alpha(x, y) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists \lambda \in \Lambda[0, 1]: |t - \lambda(t)| \leq \varepsilon, \rho_\alpha(x(t), y(\lambda(t))) \leq \varepsilon \right\}, \quad (1)$$

где $\Lambda([0, 1])$ — множество гомеоморфизмов λ отрезка $[0, 1]$, причем $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$. Как показано в [8], эта топология не зависит от конкретного вида псевдометрик, задающих топологию в E . Там же приведена (см. предложение 1.1) следующая лемма:

Лемма 1.1. Пусть $x \in D_1(E)$. Замыкание K_x множества $\{x(t) \mid t \in [0, 1]\}$ — компакт в E . При этом:

$$K_x = \{x(t) \mid t \in [0, 1]\} \cup \{x(t-) \mid t \in (0, 1]\}. \quad (2)$$

Напомним, что подмножество $U \subset E$ топологического пространства E называется универсально измеримым, если для любой борелевской меры μ на E оно измеримо относительно лебеговского пополнения этой меры.

Лемма 1.2. i) Класс универсально измеримых множеств пространства $\{F, \tau \cap F\}$, где $F \subset E$ — борелевское подмножество пространства E , совпадает со следом $\{F \cap U \mid U \text{ универсально измеримо в } E\}$ универсально измеримых множеств пространства E .

ii) Пусть $f: E \mapsto X$ — борелевское отображение топологических пространств. Тогда, если $V \subset X$ универсально измеримо, то $f^{-1}(V)$ также универсально измеримо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Нетрудно доказать аналогичное утверждение для борелевских множеств. Утверждение леммы следует из того, что сужение на F любой борелевской меры на E есть борелевская мера, и любую борелевскую меру μ на F можно продолжить до борелевской меры на E , положив $\mu(B) = 0$, где $B \subset E \setminus F$, B — борелевское множество.

ii) Если μ — борелевская мера на E , то ее образ $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ тоже борелевская мера. Тогда, если $X_1 \subset V \subset X_2$, где X_1 и X_2 — борелевские в X , причем $\mu_f(X_1) = \mu_f(X_2)$, то $f^{-1}(X_1) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(X_2)$, и тогда $\mu(f^{-1}(X_1)) = \mu(f^{-1}(X_2))$. Очевидно $f^{-1}(V)$ измеримо относительно пополнения μ .

Обозначим через 2^E множество всех замкнутых подмножеств E . На 2^E можно ввести слабейшую топологию, в которой любое множество вида

$$2^X \equiv \{F \mid F \subset X, F = \overline{F}\} \subset 2^E, \quad X \subset E,$$

(множество замкнутых подмножеств пространства E , содержащихся в X) открыто для открытого X и замкнуто для замкнутого X (см. [11, т. 1, с. 168]). Эта топология называется экспоненциальной. Заметим, что точка $\{\emptyset\}$ является изолированной.

Доказательства следующих двух теорем можно найти в ([11, т. 1, с. 223, т. 2, с. 52–54, 65, 80]).

Теорема 1.1. Если E — метризуемый компакт с метрикой d , то 2^E — метризуемый компакт. Метрику можно ввести следующим образом:

$$\text{dist}(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right), \quad (3)$$

если $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Если $A = \emptyset \neq B$, то $\text{dist}(A, B) = \sup_{x, y \in E} d(x, y)$.

Теорема 1.2. Пусть X — метрический компакт, Y — топологическое пространство, $D \subset X \times Y$ замкнуто и $F(y) = \{x \mid (x, y) \in D\}$. Тогда $F: Y \mapsto 2^X$ — борелевское отображение.

Пусть E — польское пространство. Напомним, что польскими пространствами называют пространства, гомеоморфные полным сепарабельным метрическим пространствам.

Следуя терминологии, принятой в [11, т. 1, с. 464], будем называть первым проективным классом класс A суслинских множеств, которые, как известно, определяются как образы борелевских множеств при непрерывных отображениях $f: E \mapsto E$.

Класс CA , состоящий из множеств, дополнение которых — суслинское, назовем вторым проективным классом (множества этого класса называются также коаналитическими или косуслинскими), а класс PCA (непрерывные образы множеств из класса CA) — третьим. Аналогично определяем четвертый проективный класс $SRCA$.

Известно, что множества первых двух проективных классов универсально измеримы. Известно также, что существование на отрезке $[0, 1]$ неизмеримых по Лебегу множеств, принадлежащих третьему или четвертому проективному классу не противоречит аксиомам теории множеств. Это утверждение было без доказательства опубликовано К. Геделем (см. [6], [7]) и доказано П. С. Новиковым в [15].

2. Связь пространств $D_1(E)$ и 2^E . Будем считать в этом разделе, что E — польское пространство.

Теорема 2.1. Если $X \subset E$ — множество проективного класса CA , то и $D_1(X) \subset D_1(E)$ — множество класса CA в $D_1(E)$. В частности, если X — борелевское в E , то $D_1(X)$ — коаналитическое в $D_1(E)$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Gamma \subset E \times D_1(E) = \{(x, y) \mid x \in K_y\}$$

(см. (2)). Это множество замкнуто, так как если $x_0 \notin K_{y_0}$, то существуют такие ε_1 и ε_2 , что множество $U_1 = \{x \mid \rho(x_0, x) < \varepsilon_1\}$ не пересекается с множеством $U_2 = \{y \mid \rho(y, K_{y_0}) < \varepsilon_2\}$. Нетрудно видеть (см. (1)), что если $\tilde{\rho}(y_0, y) < \varepsilon_2$, то $K_y \subset U_2$. Но тогда

$$\{(x, y) \mid x \in U_1, \tilde{\rho}(y_0, y) < \varepsilon_2\} \cap \Gamma = \emptyset.$$

Из леммы 1.1 следует, что $y \in D_1(X) \iff K_y \subset X$. Тогда множество $D_1(X)^c$ есть проекция на ось $D_1(E)$ множества $(X^c \times D_1(E)) \cap \Gamma$. Утверждение теоремы следует из того, что суслинские множества устойчивы относительно взятия операций прямого произведения, пересечения и непрерывных отображений (см. [11, т. 1, с. 465–466]).

З а м е ч а н и е 2.1. i) Совершенно аналогично доказывается, что $D_1(X) \in SRCA$, если $X \in A$.

ii) Как сообщил автору А. Schied, предыдущую теорему можно вывести из теоремы III.11 в [4].

Имеется следующая связь между пространствами $D_1(E)$ и 2^E .

Предложение 2.1. i) Пусть E — метрический компакт. Существует такое непрерывное отображение $f: D_1(E) \mapsto 2^E$, что для любого подмножества $X \subset E$:

$$f(D_1(X)) = 2^X \setminus \{\emptyset\}, \quad f^{-1}(2^X) = D_1(X). \quad (4)$$

ii) Существует такое гомеоморфное вложение $g: 2^{[0,1]} \setminus \{\emptyset\} \mapsto D_1([0,1])$, что для любого подмножества $X \subset [0,1]$:

$$g^{-1}(D_1(X)) = 2^X \setminus \{\emptyset\}.$$

Доказательство. i) Положим $f(x) = K_x$. Второе равенство в (4) следует из леммы 1.1. Докажем непрерывность. Из определения экспоненциальной то-

пологий видно, что базу топологии составляют множества вида

$$B(G_0, G_1, \dots, G_n) \equiv 2^{G_0} \cap (2^E \setminus 2^{E \setminus G_1}) \cap \dots \cap (2^E \setminus 2^{E \setminus G_n}),$$

где все $G_i, i = 0, 1, \dots, n$, открыты. Но тогда

$$f^{-1}(B(G_0, G_1, \dots, G_n)) = D_1(G_0) \cap (D_1(E) \setminus D_1(G_1^c)) \cap \dots \cap (D_1(E) \setminus D_1(G_n^c)).$$

Открытость этого множества следует из того, что (см. [8, предложение 1.6]) $D_1(X)$ открыто (замкнуто) для открытых (замкнутых) X .

Докажем первую часть формулы (4). Достаточно доказать, что любой компакт имеет вид K_x для некоторого x . Сначала пусть $E = [0, 1]$. Тогда любой компакт $K \subset E$ имеет вид

$$K = [0, 1] \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \right\}, \quad (5)$$

где $J_i \subset [0, 1]$ — последовательность непересекающихся интервалов вида $J_i = (a_i, b_i)$ или $[0, b_i)$, $(a_i, 1]$ (возможно $a_i = b_i$). Определим функцию

$$g_K(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in K, \\ a_i, & \text{если } t \in (a_i, b_i) \text{ или } t \in (a_i, 1], \\ b_i, & \text{если } t \in [0, b_i). \end{cases}$$

Очевидно, функция g_K принадлежит $D_1([0, 1])$ и $K = K_{g_K}$. Утверждение предложения следует теперь из того, что любой метрический компакт является непрерывным образом канторова множества (см. [11, т. 2, с. 30]).

ii) Зададим отображение g посредством $g(K) = g_K$. По предыдущему пункту g^{-1} непрерывно, и выполнено нужное равенство. Осталось доказать непрерывность g . Пусть K^n — некоторая последовательность компактов. Покажем, что если $\text{dist}(K^n, K^0) \rightarrow 0$, то $\tilde{\rho}(g_{K^n}, g_{K^0}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Представим все компакты K^n в виде (5). По произвольному ε подберем N_ε так, что $b_i^0 - a_i^0 < \varepsilon$ при $i > N_\varepsilon$. Подберем N так, что $\text{dist}(K^n, K^0) < \varepsilon/2$ при $n > N$. Тогда для любого $n > N$ и для любого $i \leq N_\varepsilon$ существует такой интервал (a_i^n, b_i^n) , что $a_i^n \in K^n$, $b_i^n \in K^n$, $(a_i^n, b_i^n) \subset (K^n)^c$, причем $|a_i^0 - a_i^n| < \varepsilon$ и $|b_i^0 - b_i^n| < \varepsilon$.

Из построения следует, что $\delta = \sup_{n > N} (\sup_{i > N_\varepsilon} |b_i^n - a_i^n|) < 5\varepsilon$.

Присоединяя к K^0 и K^n все интервалы с номерами, большими N_ε , получаем компакты F^n , ($n = 0, N, N+1, \dots$), причем

$$\text{dist}(K^n, F^n) < \delta, \quad n = N, N+1, \dots$$

Тогда по определению функций вида g_K имеем

$$\tilde{\rho}(g_{K^n}, g_{F^n}) < \delta, \quad n = N, N+1, \dots$$

Аналогично получаем $\text{dist}(K^0, F^0) < \varepsilon$, $\tilde{\rho}(g_{K^0}, g_{F^0}) < \varepsilon$.

Заметим, что для всех $n > N$ имеем $\tilde{\rho}(g_{F^0}, g_{F^n}) < \varepsilon$. В качестве $\lambda_n \in \Lambda$ можно взять кусочно-линейную функцию, причем $\lambda_n(a_i^0) = a_i^n$, $\lambda_n(b_i^0) = b_i^n$. Остается воспользоваться неравенством треугольника: $\tilde{\rho}(g_{K^0}, g_{K^n}) < 2\delta + \varepsilon < 11\varepsilon$.

Теорема 2.2. *Предположим, что в классе СРСА отрезка $[0, 1]$ существует множество, не являющееся универсально измеримым (см. [15]). Тогда существует такое суслинское множество A , что 2^A не является универсально измеримым.*

Доказательство. Пусть $A \subset [0, 1]$ — суслинское множество, причем существует такое непрерывное отображение $f: A^c \mapsto [0, 1]$, что дополнение

к $B = f(A^c)$ не является универсально измеримым. В пространстве $[0, 1]^2$ рассмотрим замыкание $\bar{\Gamma}$ графика этого отображения $\{\Gamma = (x, y) \mid y = f(x)\}$. Отображение $F(y) = \{x \mid (x, y) \in \bar{\Gamma}\}$ — борелевское по теореме 1.2. Очевидно, $F^{-1}(2^A) \cap B = \emptyset$. Докажем теперь, что если $y \in B^c$, то $F(y) \in 2^A$. Действительно, если $x_0 \in F(y) \cap A^c \neq \emptyset$, то в силу замкнутости графика отображения f в пространстве $[0, 1] \times A^c$, получаем, что $y = f(x_0) \in B$. Поэтому $F^{-1}(2^A) = B^c$ не является универсально измеримым. Утверждение теоремы следует теперь из леммы 1.2 ii).

Следствие 2.5. *Предположим, что в классе СРСА отрезка $[0, 1]$ существует множество, не являющееся универсально измеримым. Тогда существует такое суслинское множество $A \subset [0, 1]$, что $D_1(A)$ не является универсально измеримым в $D_1[0, 1]$.*

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы, леммы 1.2 i) и предложения 2.1 ii).

Замечание 2.2. Отметим, что множество $D_1[Q]$, где Q — множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ не является суслинским в $D_1[0, 1]$ (без каких-либо дополнительных теоретико-множественных предположений).

Доказательство. То, что 2^Q не является борелевским, доказывается так же, как и в предыдущей теореме, с учетом того, что суслинские подмножества произвольного польского пространства есть в точности непрерывные образы пространства иррациональных чисел (см. [11, т. 1, с. 489]). Для пространства $2^{[0,1]}$ верна теорема, аналогичная теореме 2.1 (доказательство аналогично, см. также [11, т. 2, с. 57]). Из коаналитичности множества 2^Q получаем, что 2^Q не является суслинским, так как иначе оно бы было борелевским (см. [11, т. 1, с. 497]). Но по предложению 2.1 i) $2^Q \setminus \{\emptyset\}$ есть непрерывный образ множества $D_1[Q]$.

Автор благодарен В. И. Богачеву за постановку задачи и обсуждение результатов, а также М. Рёкнеру и Н. А. Толмачеву за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albeverio S., Ma Z. M., Röckner M. A remark on the support of cadlag processes. — BiBoS-Preprint Nr. 498/91.
2. Буллингли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
3. Богачев В. И. Меры на топологических пространствах. — Итоги науки и техн. ВИНТИ, 1996, т. 36.
4. Dellacherie C., Meyer P. A. Probabilities and potential. Amsterdam: North-Holland, 1988.
5. Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov processes. Characterization and convergence. New York: John Wiley and Sons, 1986.
6. Gödel K. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. — Proc. Nat. Acad. Sc., 1938, v. 24, p. 556–557.
7. Gödel K. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Princeton: Ann. Math. Studies, 1951, v. 3.
8. Jakubowski A. On the Skorokhod topology. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1986, v. 22, № 3, p. 263–285.
9. Pollard D. Convergence of stochastic processes. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1984.
10. Schwarz L. Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. London: Oxford Univ. Press, 1973.
11. Куратовский К. Топология. М.: Мир, тт. 1, 2, 1966, 1969.
12. Колмогоров А. Н. О сходимости Скорохода. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2, с. 239–247.
- 6 Теория вероятностей и ее применения, № 4

13. Ma Z. M., Röckner M. An introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms. Berlin: Springer, 1992.
14. Mitoma I. Tightness of probabilities on $C([0, 1]; \mathcal{S}')$ and $D([0, 1]; \mathcal{S}')$. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 4, p. 989–999.
15. Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 38, с. 279–316.
16. Прозоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2, с. 117–238.
17. Скороход А. В. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями. — ДАН СССР, 1955, т. 104, в. 3, с. 364–368.
18. Скороход А. В. О одном классе предельных теорем для цепей Маркова. — ДАН СССР, 1956, т. 106, в. 5, с. 781–784.
19. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 3, с. 289–319.

Поступила в редакцию
25.XI.1997

© 1998 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ¹⁾

Приводятся необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений обобщенных дважды стохастических пуассоновских процессов, в которых величины скачков имеют конечную дисперсию, а на управляющий процесс не накладываются никакие ограничения моментного характера. Указаны критерии сходимости распределений таких процессов к устойчивым законам.

Ключевые слова и фразы: дважды стохастический пуассоновский процесс (процесс Кокса), обобщенный процесс Кокса, строго устойчивое распределение.

1. Введение. Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, — однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, — независимый от $N_1(t)$ процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $P\{\Lambda(t) < \infty\} = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0.$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. Свойства процессов Кокса подробно описаны в [1].

*Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00273.