Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Алешкявичене, В. Статулявичус, Аппроксимация сложным пуассоновским распределением, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 583–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:59:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2004 г. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ А. К. *, СТАТУЛЯВИЧУС В. А.

АППРОКСИМАЦИЯ СЛОЖНЫМ ПУАССОНОВСКИМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Рассматриваются уточнения сходимости распределений сумм независимых неотрицательных целочисленных случайных величин к сложному пуассоновскому закону. Доказаны теоремы о больших отклонениях и асимптотических разложениях при минимальных условиях.

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, предельное распределение, закон Пуассона, сложный пуассоновский закон, большие отклонения, асимптотические разложения.

Пусть имеется последовательность серий $X_{n1}, \dots, X_{nn}$, $n \rightarrow \infty$, независимых в каждой серии случайных величин, значениями которых являются целые числа из множества $D \subset \{0, 1, 2, \dots\}$, $0 \in D$. Обозначим $D_0 = D \setminus \{0\}$,

$$p_{nj}(k) = \mathbf{P}\{X_{nj} = k\}, \quad \theta_{nj} = 1 - p_{nj}(0), \quad \lambda_{nk} = \sum_{j=1}^n p_{nj}(k),$$

$$\Lambda_n = \sum_{k \in D_0} \lambda_{nk}, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_{nj}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\}.$$

Известно (см., например, [7]), что если

$$\Lambda_n \rightarrow \lambda > 0, \quad \lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех $k \in D_0$, то предельным распределением суммы S_n при $n \rightarrow \infty$ является сложное пуассоновское распределение G с параметром λ и дискретным вспомогательным распределением $H = \{a_k: k \in D'_0\}$, где $a_k = \lambda_k/\lambda$ и $D'_0 = \{k: \lambda_k > 0, k \in D_0\}$. Характеристическая функция распределения G имеет представление

$$g(t) = e^{-\lambda(1-h(t))}, \quad h(t) = \sum_{k \in D'_0} e^{itk} a_k,$$

а само G интерпретируется как распределение суммы $Y = Z_1 + \dots + Z_N$, где Z_i , $i = 1, \dots, N$, — независимые распределенные по закону H случайные величины, а N — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ :

$$\mathbf{P}\{N = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В последнее время появились работы, посвященные разным уточнениям упомянутой сходимости $\mathbf{P}\{S_n < x\} \rightarrow G(x)$. Например, в [2], [5], [6], [8] (см. также библиографию в этих работах) устанавливается скорость сходимости, в [3], [4] выделяется

* Институт математики и информатики, ул. Академийос, 4, 08669 Вильнюс, Литва; e-mail: stat@ktl.mii.lt

поправочный член. В заметке [1] авторами изучались вероятности больших уклонений, только в более общей схеме. А именно, рассматривалась случайная величина X , специальные семиинварианты которой (полученные из разложения $\ln \mathbf{E} e^{itX}$ по определенному базису) удовлетворяют некоторым условиям роста и распределение которой аппроксимируется сложным пуассоновским законом. Здесь в качестве случайной величины X могут быть взяты суммы S_n как независимых, так и зависимых случайных величин или другие статистики, удовлетворяющие требуемым условиям роста семиинвариантов. К сожалению, и доказательство, проводимое методом семиинвариантов, и полученные результаты оказались слишком сложными. В настоящей заметке мы изучаем вопрос больших уклонений только для случая, когда в качестве случайной величины X берется сумма $S_n = X_1 + \dots + X_n$ независимых случайных величин. И доказательство, и результаты, на наш взгляд, получились более простыми, более наглядными.

Вычисляя вероятности больших уклонений, мы увидим, что тем же самым способом можно получить асимптотические разложения для распределения $F_n(x)$. Мы выделим поправочные члены первого порядка малости и второго порядка малости.

Теорема 1. Пусть $\Lambda_n \rightarrow \lambda > 0$ и $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k$ для любого $k \in D_0$. Если

$$\sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то найдется число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ и любых $x > 0$ будет иметь место соотношение

$$1 - F_n(x) = [1 - G(x)] e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left(1 + \theta \cdot B \left(\lambda, \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right) \right).$$

Здесь $|\theta| \leq 1$, $|\Lambda_n - \lambda| \leq \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \rightarrow 0$ и если n_0 выбрать таким, что для $n \geq n_0$ справедливы неравенства $\max_j \theta_{nj} < \frac{1}{10}$ и $\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 < \frac{1}{9}$, то

$$B \left(\lambda, \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right) = \frac{3}{2} (e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| + \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2.$$

Доказательство. Пусть $f_{nj}(t) = \mathbf{E} e^{itX_{nj}}$, $f_n(t) = \mathbf{E} e^{itS_n}$. Тогда

$$f_n(t) = \prod_{j=1}^n f_{nj}(t) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \theta_{nj} + \sum_{k \in D_0} p_{nj}(k) e^{itk} \right) = \prod_{j=1}^n [1 - \theta_{nj}(1 - q_{nj}(t))], \quad (1)$$

где $q_{nj}(t) = \sum_{k \in D_0} Q_{nj}(k) e^{itk}$, $Q_{nj}(k) = p_{nj}(k)/\theta_{nj}$. Отметим, что $\{Q_{nj}(k): k \in D_0\}$ является вероятностным распределением, а $q_{nj}(t)$ — его характеристической функцией для всех j и n . Далее, так как

$$\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

то $\theta_{nj} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно j . Согласно (1),

$$-\ln f_n(t) = -\sum_{j=1}^n \ln \{1 - \theta_{nj}(1 - q_{nj}(t))\} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} \{1 - q_{nj}(t)\} + r(t), \quad (3)$$

где

$$r(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 [1 - q_{nj}(t)]^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l} [\theta_{nj} \{1 - q_{nj}(t)\}]^l. \quad (4)$$

В силу (2) найдется такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнены неравенства

$$\max_j \theta_{nj} < \frac{1}{10} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 < \frac{1}{9}. \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 |1 - q_{nj}(t)|^2 \left[1 + 2 \max_j \theta_{nj} + \left(2 \max_j \theta_{nj} \right)^2 + \dots \right] \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \left(1 - 2 \max_j \theta_{nj} \right)^{-1} < \frac{5}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, возможна запись

$$f_n(t) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \theta_{nj} \left(1 - q_{nj}(t) \right) \right\} [1 + R(t)], \quad (7)$$

где $R(t) = -r(t) + \frac{1}{2!} r^2(t) - \frac{1}{3!} r^3(t) + \dots$. Согласно (3) и (4), $R(t)$ — это сумма слагаемых, которые являются характеристическими функциями типа $q_{nj_1}^{m_1}(t) \dots q_{nj_r}^{m_r}(t)$, $m_1 \geq 1, \dots, m_r \geq 1$, с постоянными коэффициентами, зависящими от $\lambda_{nj_1}, \dots, \lambda_{nj_r}$ (считаем, что 1 является характеристической функцией вырожденного распределения E_0 , сосредоточенного в нуле). Ввиду (6) и оценки $|e^z - 1| \leq \frac{7}{4} |z|$, $|z| \leq 1$ (см. [9, формула 4.2.38]),

$$|R(t)| = |e^{r(t)} - 1| < \frac{7}{4} |r(t)| < \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из сказанного выше следует, что

$$R(t) = \int_{-0}^{\infty} e^{itx} dV(x) \quad (9)$$

является преобразованием Фурье функции $V(x)$ с ограниченной полной вариацией:

$$\text{var } |V(x)| \leq \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (7), получаем

$$f_n(t) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \theta_{nj} [1 - q_{nj}(t)] \right\} \left[1 + \int_{-0}^{\infty} e^{itx} dV(x) \right]. \quad (11)$$

Первый множитель в правой части (11) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \theta_{nj} [1 - q_{nj}(t)] \right\} &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \theta_{nj} + \sum_{j=1}^n \sum_{k \in D_0} p_{nj}(k) e^{itk} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \Lambda_n + \sum_{k \in D_0} \lambda_{nk} e^{itk} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \lambda + \sum_{k \in D'_0} \lambda_k e^{itk} \right\} \left\{ 1 + \left[\exp \left\{ - (\Lambda_n - \lambda) + \sum_{k \in D_0} (\lambda_{nk} - \lambda_k) e^{itk} \right\} - 1 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \lambda \left(1 - \sum_{k \in D'_0} a_k e^{itk} \right) \right\} \left\{ e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[1 + u_n(t) + \frac{1}{2!} u_n^2(t) + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u_n(t) = \sum_{k \in D_0} (\lambda_{nk} - \lambda_k) e^{itk}$ — преобразование Фурье функции U_n , полная вариация которой

$$\text{var } U_n \leq \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \rightarrow 0, \quad (13)$$

а функция

$$\exp \left\{ -\lambda \left(1 - \sum_{k \in D'_0} a_k e^{itk} \right) \right\} = \exp \{ -\lambda(1 - h(t)) \} = g(t)$$

является характеристической функцией сложного пуассоновского распределения G с параметром λ и вспомогательным распределением $H = \{a_k: k \in D'_0\}$. Здесь $h(t) = \sum_{k \in D'_0} e^{itk} a_k$ — характеристическая функция распределения H .

Подставляя (12) в (11), находим

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp \left\{ -\lambda \left(1 - \sum_{k \in D'_0} a_k e^{itk} \right) \right\} e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} u_n^l(t) \right] \\ &\times \left[1 + \int_{-0}^{\infty} e^{itx} dV(x) \right] = g(t) e^{-(\Lambda_n - \lambda)} + e^{-(\Lambda_n - \lambda)} g(t) \\ &\times \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} u_n^l(t) + \int_{-0}^{\infty} e^{itx} dV(x) + \int_{-0}^{\infty} e^{itx} dV(x) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} u_n^l(t) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Разложению (14) характеристической функции $f_n(t)$ соответствует разложение функции распределения $F_n(x)$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= G(x) e^{-(\Lambda_n - \lambda)} + e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \\ &\times \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} G * U_n^{*l}(x) + G * V(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} G * V * U_n^{*l}(x) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая соотношения (5), (10), (13) и неотрицательность случайной величины, распределенной по закону $G(x)$, имеем

$$\begin{aligned} |(G * V)(y)| &= \left| \int_0^{\infty} G(y - z) dV(z) \right| \leq G(y) \operatorname{var} V \leq G(y) \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2, \\ \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} G * U_n^{*l}(y) \right| &\leq \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^{\infty} G(y - z) dU_n^{*l}(z) \right| \leq G(y) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \operatorname{var} U_n^{*l} \\ &\leq G(y)(e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k|, \\ \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (G * V * U_n^{*l})(y) \right| &= \left| \int_0^{\infty} G(y - z) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} d(V * U_n^{*l})(z) \right| \\ &\leq G(y) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^{\infty} |d(V * U_n^{*l})(z)| \leq G(y) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \operatorname{var} |V * U_n^{*l}| \\ &\leq G(y) \max_z |V(z)| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \operatorname{var} |U_n^{*l}| \\ &\leq G(y) \frac{35}{8} (e - 1) \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \cdot \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \\ &< G(y) \frac{1}{2} (e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k|. \end{aligned}$$

Тогда при любом $x > 0$

$$\begin{aligned} 1 - F_n(x) &= \int_x^{\infty} dF_n(x) \\ &\leq \int_x^{\infty} dG(y) \cdot e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[1 + \frac{3}{2} (e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| + \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right] \end{aligned}$$

и

$$1 - F_n(x) \geq \int_x^\infty dG(y) \cdot e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[1 - \frac{3}{2} (e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| - \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right].$$

Сопоставляя полученные оценки с (15), получаем

$$1 - F_n(x) = [1 - G(y)] e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[1 + \theta B \left(\lambda; \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right) \right],$$

где $|\theta| \leq 1$ и $B(\lambda; \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2) = \frac{3}{2} (e - 1) \sum_{k \in D_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| + \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2$. Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что значениями случайных величин X_{nl} , $l = 1, \dots, n$, являются целые числа из множества $\tilde{D} \subset \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $0 \in \tilde{D}$. Пусть G обозначает сложный пуассоновский закон с параметром λ и дискретным вспомогательным распределением $\tilde{H} = \{a_k: k \in \tilde{D}'_0\}$, $\tilde{D}'_0 = \{k: \lambda_k > 0, k \in \tilde{D}_0\}$, $\tilde{D}_0 = \tilde{D} \setminus \{0\}$. Здесь λ определяется соотношением $\Lambda_n \rightarrow \lambda > 0$, $\Lambda_n = \sum_{k \in \tilde{D}_0} \lambda_{nk}$.

Определения всех других использованных выше величин не меняются. Положим

$$\begin{aligned} P_{1n}(x) &= e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left[(G * U_n)(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 (G * (1 - Q_{nj})^{*2})(x) \right], \\ P_{2n}(x) &= e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left\{ \frac{1}{2} (G * U_n^{*2})(x) - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^3 (G * [1 - Q_{nj}]^{*3})(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(G * \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 (1 - Q_{nj})^{*2} \right]^{*2} \right)(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 (G * (1 - Q_{nj})^{*2} * U_n)(x) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $\Lambda_n \rightarrow \lambda > 0$ и $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k$ для всех $k \in \tilde{D}_0$. Если

$$\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$F_n(x) = G(x) e^{-(\Lambda_n - \lambda)} + P_{1n}(x) + R_{1n}(x),$$

$$F_n(x) = G(x) e^{-(\Lambda_n - \lambda)} + P_{1n}(x) + P_{2n}(x) + R_{2n}(x),$$

и при n_0 , выбранном так, что для $n \geq n_0$ справедливы неравенства $\max_j \theta_{nj} < \frac{1}{10}$ и $\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 < \frac{1}{9}$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} |R_{1n}(x)| &\leq e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left\{ (e - 2) \left(\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right)^2 + \frac{10}{3} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^3 + \frac{25}{4} (e - 2) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{8} (e - 1) \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |R_{2n}(x)| &\leq e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left\{ (e - 2.5) \left(\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right)^3 + 5 \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^3 \cdot \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 + \frac{125}{8} (e - 2.5) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(e-2) \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \left(\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right)^2 + \frac{10}{3}(e-1) \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^3 \cdot \sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \\
& + \frac{25}{4}(e-1)(e-2) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right)^2 \sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \Big\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вернемся к соотношению (15), из правой части которого кроме слагаемого $G(x)e^{-(\Lambda_n - \lambda)}$ выделим еще $P_{1n}(x)$, т.е. слагаемые, полная вариация которых при $n \rightarrow \infty$ сходится к нулю со скоростью порядка $\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k|$ или $\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2$. Тогда остаточным членом будет

$$\begin{aligned}
R_{1n}(x) = e^{-(\Lambda_n - \lambda)} & \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} (G * U_n^{*l})(x) - \left(G * \sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l} \theta_{nj}^l (1 - Q_{nj})^{*l} \right)(x) \right. \\
& \left. + (G * V_2)(x) + \left(G * V * \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} U_n^{*l} \right)(x) \right\},
\end{aligned}$$

где V_2 обозначает прообраз функции $\sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l r^l(t)/l!$, т.е.

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} r^l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_2(x).$$

Отсюда, имея в виду (2), (6), (8), (10) и (13), находим, что при любых $x > 0$

$$\begin{aligned}
|R_{1n}(x)| & \leq e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right)^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l} (2\theta_{nj})^l \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{5}{2} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right)^l + \frac{35}{8} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right\} \\
& \leq e^{-(\Lambda_n - \lambda)} \left\{ (e-2) \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right)^2 + \frac{10}{3} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^3 + \frac{25}{4}(e-2) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{35}{8}(e-1) \sum_{j=1}^n \theta_{nj}^2 \sum_{k \in \tilde{D}_0} |\lambda_{nk} - \lambda_k| \right\}.
\end{aligned}$$

Оценка (16) доказана. Чтобы доказать (17), из $R_{1n}(x)$ выделим $P_{2n}(x)$. Оценивая оставшуюся часть $R_{2n}(x)$ аналогичным способом, получаем (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleškevičiene A., Statulevičius V.* Theorems of large deviations in the approximation by the compound Poisson distribution. — Acta Appl. Math., 2003, v. 78, p. 21–34.
2. *Barbour A. D., Chen L. H. Y., Loh W.-L.* Compound Poisson approximation for non-negative random variables via Stein's method. — Ann. Probab., 1992, v. 20, № 4, p. 1843–1866.
3. *Grigelionis B.* Asymptotic expansions in the compound Poisson limit theorem. — Acta Appl. Math., 1999, v. 58, № 1–3, p. 125–134.
4. *Roos B.* Kerstan's method for compound Poisson approximation. — Ann. Probab., 2003, v. 31, № 4, p. 1754–1771.
5. *Serfozo R. F.* Compound Poisson approximation for sums of random variables. — Ann. Probab., 1986, v. 14, № 4, p. 1391–1398; Corrections: ibid., 1988, v. 16, № 1, p. 429–430.

6. Vellaisamy P., Chaudhuri B. On compound Poisson approximation for sums of random variables. — Statist. Probab. Lett., 1999, v. 41, № 2, p. 179–189.
7. Wang Y. H. From Poisson to compound Poisson approximations. — Math. Sci., 1989, v. 14, № 1, p. 38–49.
8. Wang Y. H. A compound Poisson convergence theorem. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 1, p. 452–455.
9. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.

Поступила в редакцию
15.III.2004

© 2004 г.

КАРЫМОВ Д. Н.*

О РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СВЕРТКИ ПУАССОНОВСКИХ ЗАРЯДОВ¹⁾

В работе изложены некоторые результаты, связанные со свертками зарядов специального вида, называемых пуассоновскими. Указан простой способ получения асимптотических разложений в свертки пуассоновских зарядов, подходящий для широкого класса решетчатых распределений. Показана аналогия между такими разложениями и классическими для теории вероятностей разложениями Грама–Шарлье типа A и B и рядами Эджворта–Крамера.

Ключевые слова и фразы: пуассоновские заряды, свертки пуассоновских зарядов, асимптотические разложения, решетчатые случайные величины.

Целью данной работы является изложение некоторых результатов, связанных со свертками зарядов специального вида, называемых далее пуассоновскими. Будут рассмотрены некоторые теоретические аспекты, важные для понимания существа дела, но оставшиеся в тени в статьях других авторов. Так, например, будет указан простой способ получения асимптотических разложений в свертки пуассоновских зарядов, подходящий для широкого класса решетчатых распределений. Будет выявлена аналогия между такими разложениями и классическими для теории вероятностей разложениями Грама–Шарлье типа A и B и рядами Эджворта–Крамера. Также будет показано, что в случае решетчатых распределений использование сверток пуассоновских зарядов, во-первых, более естественно и во-вторых, в отличие от указанных выше разложений, дает монотонно убывающую погрешность аппроксимации при росте числа членов в разложении. Вопреки традиции, сравнение с работами других авторов будет проведено в середине работы.

Данная статья содержит только формулировки результатов, полученных автором, их полное доказательство будет опубликовано позднее.

Так как простым сжатием и сдвигом любая решетчатая случайная величина может быть переведена в целочисленную, то в дальнейшем рассматривается только этот частный случай решетчатых величин.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: dmitry.karimov@in-fusio.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00600).