Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Рухин, Корреляционные матрицы цепочек для марковских последовательностей и тестирование случайности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 712–731

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp21>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:27:04

© 2006 г.

РУХИН А. Л.*

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ЦЕПОЧЕК ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТЕСТИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ

В статье установлены свойства корреляционных матриц цепочек, которые полезны для статистических выводов о марковских последовательностях. Получены асимптотические разложения для вероятности появления заданного слова предписанное число раз, а также для совместного появления двух слов. Эти разложения дают хорошие приближения для двух первых моментов частот появлений. Найдено выражение для ковариационной матрицы совместного распределения этих частот через корреляционную матрицу цепочек и получен вид псевдообратной для такой ковариационной матрицы. Указываются статистические применения для проверки случайности методом хи-квадрат.

Ключевые слова и фразы: асимптотические разложения, резольвента, производящая функция вероятностей, псевдообратная матрица, хи-квадрат, фундаментальная матрица.

1. Введение. Рассматривается случайная последовательность букв из конечного алфавита. Задача состоит в определении вероятности появления некоторой цепочки заданное число раз. Эта задача возникает в теории информации и в молекулярной биологии. Обзор [14] содержит конкретные биологические применения. В предположении независимости букв формула для упомянутой вероятности выражается через корреляционный полином цепочек, введенный в [6], или через матрицу, образованную такими полиномами [19].

В настоящей статье корреляционная матрица цепочек определяется для эргодической сложной цепи Маркова. Получена система уравнений, связывающая эту матрицу и производящую функцию вероятностей появления цепочек из данного множества. Найдены асимптотические разложения для вероятности появления заданной цепочки определенное число раз, а также вероятности совместного появления двух цепочек. Эти разложения ведут к удивительно точным приближенным формулам

* Department of Mathematics and Statistics, UMBC, Baltimore, MD 21250 USA and Statistical Engineering Division, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899 USA; e-mail: rukhin@math.umbc.edu

для моментов случайного числа появления этих цепочек. Выводятся формулы для математического ожидания числа цепочек, появляющихся заданное число раз, и выясняется ковариационная структура соответствующих случайных величин. Как следствие дается вид оптимального линейного теста случайности для близких альтернатив. В качестве примера рассмотрен случай 2-грамм в марковской цепи порядка два. Наконец, ковариационная матрица совместных частот выражена через корреляционную матрицу. Получена ее псевдообратная и указаны применения к проверке данных вероятностей букв.

2. Корреляционные матрицы цепочек. Рассмотрим последовательность случайных величин ε_k , $k = 1, \dots, n$, принимающих значения в $\mathcal{J} = \{1, \dots, q\}$ при некотором $q \geq 2$. Предполагается, что эта последовательность образует цепь Маркова порядка не больше m .

Зачастую изучение таких последовательностей основывается на свойствах налагающихся m -цепочек (m -грамм) $(i_1 \dots i_m)$ при фиксированном m . Обозначим через $\mathcal{J}_m$ множество всех таких цепочек, общее число которых есть q^m .

Предположим, что для $i = (i_1 \dots i_m)$ все вероятности $P(i) = P\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = (i_1 \dots i_m)\}$ положительны. Пусть для $k = 1, \dots, m$

$$P(j_{m-k+1} \dots j_m | i) = P\{(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{m+k}) = (j_{m-k+1} \dots j_m) | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = (i_1 \dots i_m)\} = \frac{P(i j_{m-k+1} \dots j_m)}{P(i)}$$

означает условную вероятность того, что цепочке $j_{k+1} \dots j_m$ предшествует i .

Корреляционный полином цепочек $\tilde{C}_{ij}(z)$ был введен в [6]. Пусть $i = (i_1 \dots i_m)$ и $j = (j_1 \dots j_m)$ — две цепочки из $\mathcal{J}_m$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij}(z) &= \sum_{r=0}^{m-1} \delta_{(i_{r+1} \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-r})} P(j_{m-r+1} \dots j_m | i) z^r \\ &= \delta_{i,j} + \sum_{r=1}^{m-1} \delta_{(i_{r+1} \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-r})} P(j_{m-r+1} \dots j_m | i) z^r. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее $\delta_{i,j} = \prod_{k=1}^m \delta_{i_k j_k}$ — символ Кронекера для двух m -грамм i и j . Если ε_k независимы и равномерно распределены, определение в [6] относится к многочлену $z^{m-1} \tilde{C}_{ij}(q/z)$. Наше же определение следует работе [15], где при $i = j$ изучается случай обычных марковских цепей.

При заданном i обозначим через $P^{(r)}(j | i)$ условную вероятность того, что цепочка j следует за i после r букв,

$$P^{(r)}(j | i) = \sum_{k_1, \dots, k_r} P(k_1 \dots k_r j | i),$$

а при $0 \leq z < 1$ положим

$$\mathcal{C}_{ij}(z) = \tilde{C}_{ij}(z) + \sum_{r=0}^{\infty} z^{m+r} [P^{(r)}(j | i) - P(j)]. \quad (2)$$

Корреляционная матрица цепочек $\mathcal{C}(z) = \mathcal{C}$ размера $q^m \times q^m$ состоит из элементов $\mathcal{C}_{ij}(z)$, $i, j \in \mathcal{J}_m$. Она использовалась в [19] для последовательностей Бернулли, когда $P^{(r)}(j | i) = P(j)$, так что $\mathcal{C}_{ij} = \tilde{C}_{ij}$. Автор в [17] применил эту матрицу для нахождения производящих функций вероятностей появления заданных частот.

Обозначим через $\mathbf{I}$ единичную матрицу, размер которой обычно будет ясен, через $\mathbf{p}$ вектор из единиц размерности q^m ; $\mathbf{e}$ будет обозначать вектор размерности q^m с координатами $P(i)$, $i \in \mathcal{J}_m$. Элементы матрицы $\mathbf{P}$ определены как

$$P_{ij} = \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})} P(\varepsilon_{n+m} = j_m | \varepsilon_n = i_1, \dots, \varepsilon_{n+m-1} = i_m). \quad (3)$$

Элементы матриц $\mathbf{P}^k$ при $k = 1, \dots, m-1$ имеют вид

$$\delta_{(i_{k+1} \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-k})} P(j_{m-k+1} \dots j_m | i). \quad (4)$$

Полагая $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}_{q^m}$, видим, что матрица

$$\tilde{C}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k \mathbf{P}^k$$

образована корреляционными полиномами.

Так как

$$\begin{aligned} & P(j_{m-r-1} \dots j_{m-1} | i_m k_1 \dots k_r k_{r+1} j_1 \dots j_{m-r-2}) P(j_m | k_{r+1} j_1 \dots j_{m-1}) \\ &= P(j_{m-r-1} \dots j_{m-1} | i_m k_1 \dots k_r k_{r+1} j_1 \dots j_{m-r-2}) \\ &\quad \times P(j_m | i_m k_1 \dots k_r k_{r+1} j_1 \dots j_{m-1}) \\ &= P(j_{m-r-1} \dots j_m | i_m k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{m-r-1}), \end{aligned}$$

по индукции получаем элементы $\mathbf{P}^{m+r}$, $r = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_r} P(k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{m-r-1} | i) P(j_{m-r} \dots j_m | i_m k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{m-r-1}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r} P(k_1 \dots k_r j | i) = P^{(r)}(j | i). \end{aligned} \quad (5)$$

При $0 \leq z < 1$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z) &= \tilde{C}(z) + \sum_{k=m}^{\infty} z^k [\mathbf{P} - \mathbf{e} \mathbf{p}^T]^k = \tilde{C}(z) + \sum_{k=m}^{\infty} z^k [\mathbf{P}^k - \mathbf{e} \mathbf{p}^T] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}^k - \frac{z^m}{1-z} \mathbf{e} \mathbf{p}^T = [\mathbf{I} - z \mathbf{P}]^{-1} - \frac{z^m}{1-z} \mathbf{e} \mathbf{p}^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, корреляционная матрица цепочек может быть определена посредством (6). Известно, что резольвента $[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1} = \lambda^{-q^m} [\mathbf{I} - \lambda^{-1} \mathbf{P}]^{-1}$ задана при всех λ за исключением собственных значений матрицы $\mathbf{P}$ ($\lambda = 1$ — одно из них). Тем самым $\mathcal{C}(z)$ может быть определена при всех комплексных z таких, что z^{-1} не принадлежит спектру $\mathbf{P}$. Так как $\mathbf{P}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}$ и $\mathbf{P} \mathbf{e} = \mathbf{e}$, то следующее определение $\mathcal{C}(z)$ включает случай $z = 1$:

$$\mathcal{C}(z) = [\mathbf{I} - z(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)]^{-1} + (z + \dots + z^{m-1}) \mathbf{e}\mathbf{p}^T. \quad (7)$$

В частности,

$$\mathcal{C}(1) = [\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\mathbf{p}^T]^{-1} + (m-1) \mathbf{e}\mathbf{p}^T.$$

Итак, для всех z таких, что z^{-1} не является собственным значением $\mathbf{P}$, имеем

$$\mathcal{C}_{ij}(z) + \frac{z^m P(j)}{1-z} = [\mathbf{I} - z\mathbf{P}]_{ij}^{-1} = \frac{A_{ij}(z)}{\det(\mathbf{I} - z\mathbf{P})}, \quad (8)$$

где $A_{ij}(z)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента i, j в матрице $\mathbf{I} - z\mathbf{P}$. Ясно, что все элементы корреляционной матрицы цепочек $\mathcal{C}(z)$, так же как и матрицы $\mathcal{C}(z) + z^m \mathbf{e}\mathbf{p}^T / (1-z)$ — рациональные функции от z . Отметим, что в случае независимых одинаково распределенных величин $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^{m+r} = \mathbf{e}\mathbf{p}^T$, так что $\mathcal{C}(z) = \tilde{C}(z)$. В этой ситуации все собственные значения $\mathbf{P}$ равны либо 1 (с кратностью один), либо 0 (с кратностью $q^m - 1$). Тогда $\mathcal{C}(z)$ определена при всех z .

Когда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ связаны марковской зависимостью порядка меньше, чем m , элементы корреляционной матрицы упрощаются.

Теорема 2.1. *Предположим, что случайные величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ образуют обычную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей Π , $\Pi_{ij} = P(j|i)$, $i, j = 1, \dots, q$. Тогда для $\mathbf{P}$, определенной в (3),*

$$\det(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I}_q - z\Pi) = (1-z)\Pi(1-z\lambda_k), \quad (9)$$

где λ_k , $0 \leq |\lambda_k| < 1$ — собственные значения матрицы Π , отличные от единицы. Для $0 \leq |z| < 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}(z) + \frac{z^m P(j)}{1-z} &= \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{m-1} \delta_{(i_{r+1} \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-r})} z^r \Pi_{j_{m-r} j_{m-r+1}} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} \\ &\quad + z^m \Pi_{j_1 j_2} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} [\Pi(\mathbf{I} - z(\Pi - \mathbf{e}\pi^T))^{-1}]_{i_m j_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если π обозначает вектор стационарных вероятностей, то

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}(z) &= \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{m-1} \delta_{(i_{r+1} \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-r})} z^r \Pi_{j_{m-r} j_{m-r+1}} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} \\ &\quad + z^m \Pi_{j_1 j_2} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} [\Pi(\mathbf{I} - z(\Pi - \mathbf{e}\pi^T))^{-1}]_{i_m j_1} - z^m P(j). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$\mathbf{P} = \mathcal{Q}_1 \mathcal{R}_1,$$

где $\mathcal{Q}_1$ — матрица размера $q^m \times q^{m-1}$, образованная элементами $\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})}$, и $\mathcal{R}_1$ — матрица размера $q^{m-1} \times q^m$, образованная элементами $\delta_{(i_1 \dots i_{m-1}), (j_1 \dots j_{m-1})} P(j_m | j_1 \dots j_{m-1})$. Поскольку ненулевые собственные значения матриц $\mathcal{Q}_1 \mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1$ совпадают, имеем

$$\det(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I}_{q^{m-1}} - z\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1).$$

Элементы матрицы $\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1$ суть $\delta_{(i_2 \dots i_{m-1}), (j_1 \dots j_{m-2})} P(j_{m-1} | i_1 \dots i_{m-1})$. Для марковской цепи порядка $m-2$ эти элементы равны $\delta_{(i_2 \dots i_{m-1}), (j_1 \dots j_{m-2})} \times P(j_{m-1} | j_1 \dots j_{m-2})$. Таким образом, $\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1$ совпадает с матрицей $\mathbf{P}$, построенной для $(m-1)$ -грамм, и $\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 \mathcal{R}_2$ при соответствующем определении $\mathcal{Q}_2$ как матрицы размера $q^{m-1} \times q^{m-2}$ с элементами $\delta_{(i_3 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-2})}$ и $\mathcal{R}_2$ как матрицы размера $q^{m-2} \times q^{m-1}$ с элементами $\delta_{(i_1 \dots i_{m-2}), (j_1 \dots j_{m-2})} P(j_{m-1} | j_1 \dots j_{m-2})$. Поэтому

$$\det(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I}_{q^{m-2}} - z\mathcal{R}_2 \mathcal{Q}_2).$$

По индукции получаем, что

$$\det(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I}_q - z\mathcal{R}_{m-1} \mathcal{Q}_{m-1}),$$

где матрица $\mathcal{R}_{m-1}$ размера $q \times q^2$ образована элементами $\delta_{i_1 j_1} P(j_2 | j_1)$, а матрица $\mathcal{Q}_{m-1}$ размера $q^2 \times q$ имеет элементы вида $\delta_{i_m j_1}$. Так как $\mathcal{R}_{m-1} \mathcal{Q}_{m-1} = \Pi$, то формула (9) доказана.

Чтобы доказать (10), заметим, что для марковских цепей порядка один

$$\begin{aligned} P^{(r)}(j | i) &= \sum_{k_1, \dots, k_r} P(k_1 \dots k_r j | i_m) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r} \Pi_{i_m k_1} \Pi_{k_1 k_2} \dots \Pi_{k_{r-1} k_r} \Pi_{k_r j_1} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} \\ &= \Pi_{i_m j_1}^{(r+1)} \Pi_{j_1 j_2} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m}, \end{aligned}$$

где $\Pi_{ij}^{(r+1)}$ обозначают элементы матрицы Π^{r+1} . При $0 \leq z < 1$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}(z) + \frac{z^m P(j)}{1-z} &= \tilde{C}_{ij}(z) + \sum_{k=m}^{\infty} z^k P^{(k)}(j | i) \\ &= \tilde{C}_{ij}(z) + \Pi_{j_1 j_2} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} \sum_{k=m}^{\infty} z^k \Pi_{i_m j_1}^{(k+1)} \\ &= \tilde{C}_{ij}(z) + z^m \Pi_{j_1 j_2} \dots \Pi_{j_{m-1} j_m} [\Pi(\mathbf{I}_q - z\Pi)^{-1}]_{i_m j_1}, \end{aligned}$$

что равносильно (10). Формула (11) следует отсюда, так как $P(j) = \pi(j_1) \Pi_{j_1 j_2} \cdots \Pi_{j_{m-1} j_m}$ и

$$[\Pi(\mathbf{I} - z\Pi)]^{-1} = [\Pi(\mathbf{I} - z(\Pi - \mathbf{e}\mathbf{p}^T))]^{-1} + \frac{z}{1-z} \mathbf{e}\mathbf{p}^T.$$

Теорема 2.1 доказана.

Из доказательства теоремы получается также выражение корреляционной матрицы для марковских цепей порядка меньше, чем m , через матрицу переходных вероятностей. При $i = j$ соотношение (10) было получено в [15] совершенно другим методом.

Введем теперь симметричную $q^m \times q^m$ -матрицу $\mathbf{V}$ с элементами

$$\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)} [P(i_2 \dots i_m)]^{-1} = \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)} [P(j_2 \dots j_m)]^{-1}. \quad (12)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{V}\mathbf{p} = \mathbf{e}.$$

Пусть диагональная матрица $\mathbf{D}$ образована вектором $\mathbf{p}$. Элементы произведения $\mathbf{VD}$ имеют вид

$$\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)} \frac{P(j_1 \dots j_m)}{P(j_2 \dots j_m)}.$$

В частности, $\text{tr}(\mathbf{VD}) = q^{m-1}$, а $\mathbf{VD}\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Кроме того,

$$\mathbf{VDV} = \mathbf{V}.$$

Тем самым, обе матрицы $\mathbf{DV}$ и $\mathbf{VD}$ идемпотентны, и обе имеют ранг q^{m-1} .

При условии, что $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ связаны марковской зависимостью порядка $m-1$, элементы матрицы $\mathbf{VDP}$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \dots k_m} \delta_{(i_2 \dots i_m), (k_2 \dots k_m)} \delta_{(k_2 \dots k_m), (j_1 \dots j_{m-1})} \frac{P(k_1 \dots k_m)}{P(k_1 \dots k_{m-1})} P(j_m | k_1 \dots k_m) \\ &= \sum_{k_1 \dots k_m} \delta_{(i_2 \dots i_m), (k_2 \dots k_m)} \delta_{(k_2 \dots k_m), (j_1 \dots j_{m-1})} \frac{P(k_1 \dots k_m)}{P(k_1 \dots k_{m-1})} P(j_m | k_2 \dots k_m) \\ &= \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})} P(j_m | i_2 \dots i_m) = \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})} P(j_m | i_1 \dots i_m). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\mathbf{VDP} = \mathbf{P}. \quad (13)$$

Формула (13) означает, что при всех z , для которых определено $\mathcal{C}(z)$,

$$\mathbf{VD}[\mathcal{C}(z) - \mathbf{I}] = \mathcal{C}(z) - \mathbf{I}. \quad (14)$$

При этом же условии на порядок марковской цепи элементами матрицы $\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T$ являются

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_m} \delta_{(i_2 \dots i_m), (k_1 \dots k_{m-1})} \delta_{(j_2 \dots j_m), (k_1 \dots k_{m-1})} \frac{P(k_m | i_1 \dots i_m) P(k_m | j_1 \dots j_m)}{P(k_1 \dots k_m)} \\ &= \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)} \sum_{k_m} \frac{P^2(k_m | i_2 \dots i_m)}{P(i_2 \dots i_m k_m)} \\ &= \delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)} \sum_{k_m} \frac{P(i_2 \dots i_m k_m)}{P^2(i_2 \dots i_m)} = \frac{\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_2 \dots j_m)}}{P(i_2 \dots i_m)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T = \mathbf{V}. \quad (15)$$

Теорема 2.2. Если $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ образуют цепь Маркова порядка $m-1$, то имеют место формулы (14) и (15), где $\mathbf{V}$ задано в (12), а $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{p})$ — диагональная матрица.

3. Производящие функции для цепочек с заданными частотами. Здесь Ω будет обозначать подмножество цепочек длины m . Наша цель — получить производящую функцию вероятностей $P_{GH}(n) = P(E_{GH}(n))$, $G, H \in \Omega$, в марковской цепи $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ длины n и порядка m для событий

$$\begin{aligned} E_{GH}(n) &= \{G\varepsilon \text{ кончается цепочкой } H; \\ &G \text{ и } H \text{ — единственные элементы из } \Omega \text{ в } G\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Допускается, что G или H может совпадать с $\emptyset$. Если $G = \emptyset$, то

$$P_{\emptyset H}(n) = P\{H \text{ — единственный элемент из } \Omega \text{ в } \varepsilon \text{ и он стоит в конце } \varepsilon\}.$$

Тогда $P_{\emptyset H}(n) = 0$, если $n < m$, и $P_{\emptyset H}(m) = P(H)$. Если $H = \emptyset$, то

$$P_{G\emptyset}(n) = P\{\text{единственный элемент из } \Omega \text{ в } G\varepsilon \text{ есть } G\}.$$

Отметим, что $P_{G\emptyset}(0) = 1$, но $P_{GH}(0) = 0$ для всех $G, H \in \Omega$. При $n < m$ неравенство $P_{GH}(n) > 0$ означает, что $(G_{n+1} \dots G_m) = (H_1 \dots H_{m-n})$.

Положим

$$F_{GH}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{GH}(n) z^n, \quad (16)$$

и пусть $\mathcal{F}(z)$ обозначает матрицу, образованную такими функциями. По определению вектор $\mathcal{F}_1(z)$ состоит из координат $F_{\emptyset H}(z)$, а вектор $\mathcal{F}_2(z)$ — из координат $F_{G\emptyset}(z)$. Матрица $\mathcal{C}_\Omega(z)$ получается из матрицы $\mathcal{C}(z)$ вычеркиванием строк и столбцов, не принадлежащих подмножеству $\Omega = \{A, B, \dots, T\}$. Вектор вероятностей этих m -грамм обозначается через $\mathbf{p}_\Omega = (P(A), \dots, P(T))^T$, и предполагается, что все такие вероятности положительны, а $\mathbf{I}_\Omega$ ($\mathbf{e}_\Omega$) обозначает здесь единичную матрицу (вектор единиц) соответствующей размерности.

Теорема 3.1. Матрица $\mathcal{F}(z)$, образованная производящими функциями F_{GH} , $G, H \in \Omega$, такова, что

$$[\mathbf{I}_\Omega - \mathcal{F}(z)] \left[\mathcal{L}_\Omega(z) + \frac{z^m}{1-z} \mathbf{e}_\Omega \mathbf{p}_\Omega^T \right] = \mathbf{I}_\Omega. \quad (17)$$

Кроме того,

$$[\mathbf{I}_\Omega - \mathcal{F}(z)] \mathbf{e}_\Omega = (1-z) \mathcal{F}_2(z), \quad (18)$$

$$z^m [\mathbf{I}_\Omega - \mathcal{F}^T(z)] \mathbf{p}_\Omega = (1-z) \mathcal{F}_1(z). \quad (19)$$

Доказательство. Согласно (6), соотношение (17) означает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k [\mathbf{P}^k]_\Omega - \mathcal{F}(z) \sum_{k=0}^{\infty} z^k [\mathbf{P}^k]_\Omega = \mathbf{I}_\Omega.$$

Так как $\mathcal{F}(0) = 0$, сравнение коэффициентов показывает, что ввиду (4) и (5) достаточно показать, что для всех $\ell = 1, \dots, m$ и $G, H \in \Omega$

$$\begin{aligned} & \delta_{(G_{\ell+1} \dots G_m), (H_1 \dots H_{m-\ell})} P(H_{m-\ell+1} \dots H_m \mid G) \\ &= \sum_{K \in \Omega} \sum_{n=1}^{\ell} P_{GK}(n) \delta_{(K_{\ell-n+1} \dots K_m), (H_1 \dots H_{m-\ell+n})} P(H_{m-\ell+n+1} \dots H_m \mid K) \end{aligned}$$

и для $\ell = m+1, \dots$

$$P^{(\ell-m)}(H \mid G) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{K \in \Omega} \sum_{n=\ell-m+1}^{\ell} P_{GK}(n) \delta_{(K_{m-n+1} \dots K_m), (H_1 \dots H_n)} P(H_{n+1} \dots H_m \mid K) \\ &+ \sum_{K \in \Omega} \sum_{n=1}^{\ell-m-1} P_{GK}(n) P^{(\ell-m-n)}(H \mid K). \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы доказать (20), заметим, что сумма в правой части этого равенства равна нулю, если $(G_{\ell+1} \dots G_m) \neq (H_1 \dots H_{m-\ell})$. Допустив последнее для любой цепочки K из Ω , имеем

$$\sum_{n=1}^{\ell} P_{GK}(n) \delta_{(K_{\ell-n+1} \dots K_m), (H_1 \dots H_{m-\ell+n})} P(H_{m-\ell+n+1} \dots H_m \mid K) = 0,$$

если только при некотором $n \leq \ell$ $(K_{\ell-n+1} \dots K_m) = (H_1 \dots H_{m-\ell+n})$. Тогда, согласно нашему предположению, $(K_{\ell-n+1} \dots K_{m-n}) \neq (G_{\ell+1} \dots G_m)$, так что $(K_1 \dots K_{m-n}) \neq (G_{n+1} \dots G_m)$, и $P_{GK}(n) = 0$. Таким образом, при доказательстве (20) можно считать, что $(G_{\ell+1} \dots G_m) = (H_1 \dots H_{m-\ell})$.

Рассмотрим последовательность $(G_1 \dots G_m H_{m-l+1} \dots H_m) = (G_1 \dots G_l H_1 \dots H_m)$ длины $m + l$, вероятность появления которой, очевидно, равна $P(H_{m-l+1} \dots H_m | G) P(G)$. Пусть K является первым после G элементом Ω в этой последовательности, обозначим занимаемый им номер через n . Тогда $(K_{m-n+1} \dots K_m) = (H_{m-l+1} \dots H_{m-l+n})$ и

$$\begin{aligned} & P(G_1 \dots G_m H_{m-l+1} \dots H_m) \\ &= \sum_{K \in \Omega} \sum_{n=1}^l P(G) P_{GK}(n) P(H_{m-l+n+1} \dots H_m | K) \\ &= \sum_{K \in \Omega} \sum_{n=1}^l \delta_{(K_{m-n+1} \dots K_m), (H_{m-l+1} \dots H_{m-l+n})} P(G) \\ & \quad \times P_{GK}(n) P(H_{m-l+n+1} \dots H_m | K). \end{aligned}$$

Тем самым (20) доказано; аналогично доказывается (21).

Рассмотрим множество всех ℓ -грамм, начинающихся с G и кончающихся H . Пусть место первого появления в такой ℓ -грамме цепочки из Ω , скажем, K , имеет номер n . Если $n < \ell - m$, то вторая сумма в (21) представляет соответствующую вероятность, а при $n \geq \ell - m$ эту вероятность дает первая сумма.

Формула (18) близка уравнениям теоремы 3.3 в [6, с. 192]. Так как $P_{G\emptyset}(0) = 1$ и $P_{GH}(0) = 0$, она означает, что

$$P_{G\emptyset}(n) = P_{G\emptyset}(n+1) + P_{GA}(n+1) + \dots + P_{GT}(n+1),$$

и следует из того, что событие $E_{G\emptyset}(n)$, определяющее $P_{G\emptyset}(n)$, является объединением по добавлению последней буквы к n -грамме. Каждая из таких $(n+1)$ -грамм может кончаться любым элементом Ω или же ни одним из них.

Для доказательства последнего уравнения (19) заметим, что, согласно этому уравнению, для $n = m, m+1, \dots$

$$P_{\emptyset G}(n) = P_{\emptyset G}(n+1) + P(A) P_{AG}(n+1-m) + \dots + P(T) P_{TG}(n+1-m).$$

В самом деле, событие $E_{\emptyset G}(n)$ является объединением по первой букве, к которой присоединяются n -граммы. Каждая из таких $(n+1)$ -грамм может начинаться с одного из элементов Ω или же ни с какого. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.1 при $\Omega = \mathcal{I}_m$ показывает, что $\mathcal{F}(z) = z\mathbf{P}$. Действительно, в этом случае, согласно (6),

$$\mathbf{I}_{q^m} - \mathcal{F}(z) = \left[\mathcal{C}(z) + \frac{z^m}{1-z} \mathbf{e} \mathbf{p}^T \right]^{-1} = \mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P},$$

что несложно проверить непосредственно.

Частный случай теоремы 3.1, когда порядок цепи равен единице, содержится в [15], где получена формула для производящей функции вероятностей того, что m -грамма i появится определенное число раз, скажем, r , где $r \geq 1$. Эта формула является следствием теоремы 3.1 при $\Omega = \{i\}$.

Как было отмечено в п. 2, функция

$$(1 - z) \mathcal{C}_{ij}(z) + z^m P(j) = \frac{H_{ij}(z)}{G(z)}$$

является отношением двух многочленов

$$H_{ij}(z) = (1 - z) A_{jn}(z) + z P(j) G(z), \quad (22)$$

где A_{jn} есть алгебраическое дополнение в матрице $[\mathbf{I}_{q^m} - z(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)]^{-1}$, и $G(z) = \det(\mathbf{I}_{q^m} - z(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)) = \det(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P})/(1 - z)$. Очевидно, что $H_{ij}(z)$ есть алгебраическое дополнение в матрице $(\mathbf{I}_{q^m} - z\mathbf{P})^{-1}$. Если $F_n(z)$ обозначает производящую функцию из теоремы 3.1, то

$$F_i^r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{i \text{ появляется в } \varepsilon_n \text{ ровно } r \text{ раз}\} = \mathcal{F}_1(z) [F_n(z)]^{r-1} \mathcal{F}_2(z).$$

Согласно теореме 3.1,

$$F_n(z) = \frac{(1 - z)(\mathcal{C}_{in}(z) - 1) + z^m P(i)}{(1 - z) \mathcal{C}_{in}(z) + z^m P(i)},$$

так что

$$\begin{aligned} F_i^r(z) &= \frac{z^m P(i) [(1 - z)(\mathcal{C}_{in}(z) - 1) + z^m P(i)]^{r-1}}{[(1 - z) \mathcal{C}_{in}(z) + z^m P(i)]^{r+1}} \\ &= \frac{z^m P(i) [G(z)]^2 [H_{in}(z) - (1 - z) G(z)]^{r-1}}{[H_{in}(z)]^{r+1}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Если $r = 0$, то

$$F_i^0(z) = \frac{1 - \mathcal{F}_1(z)}{1 - z} = \frac{A_{in}(z)}{(1 - z) \mathcal{C}_{in}(z) + z^m P(i)} = \frac{H_{in}(z) - z^m P(i) G(z)}{(1 - z) H_{in}(z)}.$$

Впервые формулы такого рода были получены А. Д. Соловьевым [18].

Нам понадобится частный случай теоремы 3.1 для множества Ω , состоящего из двух элементов.

Теорема 3.2. Пусть $\Omega = \{i, j\}$, а

$$\begin{aligned} B_{ij}(z) &= (1 - z) |\mathcal{C}(z)| \\ &\quad + z^m [P(j) \mathcal{C}_{in}(z) + P(i) \mathcal{C}_{jj}(z) - P(i) \mathcal{C}_{ij}(z) - P(j) \mathcal{C}_{ji}(z)], \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_{ij}(z)$ задано в (2) и $|\mathcal{C}(z)| = \mathcal{C}_n(z)\mathcal{C}_{jj}(z) - \mathcal{C}_{ij}(z)\mathcal{C}_n(z)$. При H_{ij} , определенном в (22),

$$B_{ij}(z) = (1-z)^3 G^2(z) \left[\frac{1}{H_n(z)H_{jj}(z)} - \frac{1}{H_{ij}(z)H_n(z)} \right]$$

является рациональной функцией, а

$$\begin{aligned} F_{i\emptyset}(z) &= \frac{\mathcal{C}_{jj}(z) - \mathcal{C}_{ij}(z)}{B_{ij}(z)}, \\ F_{\emptyset i}(z) &= \frac{z^m [P(i)\mathcal{C}_{jj}(z) - P(j)\mathcal{C}_n(z)]}{B_{ij}(z)}, \\ F_{ij}(z) &= \frac{(1-z)\mathcal{C}_{ij}(z) + z^m P(j)}{B_{ij}(z)}, \\ F_n(z) &= 1 - \frac{(1-z)\mathcal{C}_{jj}(z) + z^m P(j)}{B_{ij}(z)} \end{aligned}$$

и соответствующие формулы верны для $F_{j\emptyset}, F_{\emptyset j}, F_{ji}$ и F_{jj} .

Так же как в [12], теорема 3.2 может быть использована для получения явного вида рациональной производящей функции $F_{ij}^{rt}(z)$ вероятностей того, что частоты двух цепочек i и j в последовательности длины n равны r и t .

4. Асимптотическая формула для математического ожидания числа цепочек, появляющихся заданное число раз. Формулы для производящих функций дают асимптотику математического ожидания числа m -цепочек, появляющихся заданное число раз, а также их ковариаций. Предположим, что $n \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow \infty$ таким образом, что $n/q^m \rightarrow \alpha$ для положительного α . Для обоснования такой асимптотики в случае бинарных последовательностей длины n надо выбрать натуральное p и объявить все p -цепочки, образованные нулями и единицами, буквами нового алфавита кардинальности $q = 2^p$. Тогда новым m -граммам соответствуют изначальные непересекающиеся $2m$ -цепочки, $\alpha = n/q^m = n/2^{mp}$. Изучая тестирование случайности, обычно предполагают, что распределение букв близко к равномерному в том смысле, что для любой m -граммы i верно $P(j|i) - q^{-1} \sim q^{-s}$ с некоторым $s > 1$ и выбор s может зависеть от m . Так, в критерии пустых ящиков разумно положить $s = m/4 + 1$ (см. [21]). П. Ф. Беляев [2] предложил схожие условия еще в 1965 г., они также используются в монографии [8].

Мы предположим, что для всякой m -цепочки i выполняется $P(j|i) = q^{-1} + \psi_{ij}q^{-3/2}$, где ψ_{ij} — равномерно ограниченная последовательность такая, что $\sum_{j=1}^q \psi_{ij} = 0$. Для $k = 0, 1, \dots, m-1$ положим

$$\psi_{\dots j_{k+1} \dots j_{m-1} j_m} = \frac{1}{q^{k+1}} \sum_{j_0, j_1, \dots, j_k} \psi_{(j_0 \dots j_{m-1}) j_m}.$$

Предполагается, что при $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\frac{1}{q^{m-k}} \sum_{j_{k+1}, \dots, j_m} \psi^2_{\dots j_{k+1} \dots j_{m-1} j_m} \longrightarrow \mathbf{D}_k$$

и $\mathbf{D} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{D}_k > 0$. В матричной форме $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \Psi$, где $\mathbf{P}_0$ состоит из элементов вида $\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})} q^{-1}$, а матрица Ψ — из элементов $\delta_{(i_2 \dots i_m), (j_1 \dots j_{m-1})} q^{-3/2} \psi_{i j_m}$, $\Psi \mathbf{e} = 0$. Тогда вектор стационарных вероятностей $\mathbf{p}$ имеет вид

$$\mathbf{p} = \frac{1}{q^m} \left[\mathbf{I} - \sum_{\ell=0}^{m-1} [\mathbf{P}_0^T]^\ell \Psi^T \right]^{-1} \mathbf{e}. \quad (24)$$

В самом деле,

$$\mathbf{p} = [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0^T + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} \Psi^T]^{-1} \frac{\mathbf{e}}{q^m},$$

так как

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \Psi(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T - \Psi)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P} + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e} \mathbf{p}^T)(\mathbf{I} + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T - \mathbf{e} \mathbf{p}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1}, \end{aligned}$$

а

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0^T + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} (\mathbf{I} + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T - \mathbf{p} \mathbf{e}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T + \mathbf{p} \mathbf{e}^T) \mathbf{p} = \frac{\mathbf{e}}{q^m}.$$

Поскольку $\mathbf{P}_0^m = q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T$, получаем (24), так что при

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_{\dots i_1 \dots i_{m-k-1} i_{m-k}} \quad \text{и} \quad \Delta_i = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_j \psi_{(j i_1 \dots i_{m-1}) i_m} \psi_{\dots j i_1 \dots i_{m-k-2} i_{m-k-1}}$$

имеем

$$P(i) = \frac{1}{q^m} \left[1 + \frac{\xi_i}{q^{1/2}} + \frac{\Delta_i}{q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \right].$$

Таким образом, при наших условиях

$$e^{-nP(i)} = e^{-\alpha} \left[1 - \frac{\alpha \xi_i}{q^{1/2}} + \frac{\alpha^2 \xi_i^2 - 2\alpha \Delta_i}{2q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \right],$$

а

$$[nP(i)]^r = \alpha^r \left[1 + \frac{r \xi_i}{q^{1/2}} + \frac{r(r-1) \xi_i^2 + 2r \Delta_i}{2q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \right].$$

Аналогично (24) выводим

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e} \mathbf{p}^T)^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} [\mathbf{I} - \Psi(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1}]^{-1} \\ &\quad - q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T [\mathbf{I} - \Psi(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1}]^{-1} \Psi (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1} [\mathbf{I} - \Psi(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 + q^{-m} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)^{-1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $s = s(i)$, $s \geq 1$, обозначает *период* цепочки i , т.е. наименьшее натуральное число, для которого $(i_{s+1} \dots i_m) = (i_1 \dots i_{m-s})$. Для периодических цепочек

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\mathbf{p}^T)_{ii}^{-1} = 1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{s+1/2}} \sum_{r=0}^{s-1} \psi_{(i_{r+1} \dots i_s i_1 \dots i_{m-s+r}) i_{m-s+r+1}} + O\left(\frac{1}{q^{s+3/2}}\right).$$

В отсутствие периода полагаем $s = \infty$, и тогда

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\mathbf{p}^T)_{ii}^{-1} = 1 + O\left(\frac{1}{q^m}\right).$$

Для асимптотики вероятности $\pi_i^r(n)$ того, что цепочка i появляется в последовательности длины n заданное число раз, можно использовать формулы (A1)–(A4) из [17]. Производящая функция $F_i^r(z)$ для этих вероятностей указана в (23). При наших условиях единственный наименьший корень $\hat{z} = z_1$ уравнения $H_n(z) = 0$, который и определяет поведение рациональной функции (23), вещественен, $\hat{z} > 1$, $\hat{z} \rightarrow 1$, когда $q \rightarrow \infty$. Все другие (комплексные) корни z_k стремятся к бесконечности, $\min_{k \geq 2} |z_k| \geq q$, что может быть усмотрено из поведения резольвенты, связывающей $[\mathbf{I} - z(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)]^{-1}$ с $[\mathbf{I} - z(\mathbf{P}_0 - q^{-m}\mathbf{e}\mathbf{e}^T)]^{-1}$.

При $r = 0$ можно использовать результат из [12], согласно которому

$$\pi_i^0(n) = -\frac{A_n(\hat{z})}{H'_n(\hat{z})\hat{z}^{n+1}} + O\left(\frac{1}{q^n}\right).$$

Для $r \geq 1$ и $n \geq m$

$$\pi_i^r(n) = (-1)^{r+1} \frac{P(i)[G(\hat{z})]^{r+1}(\hat{z}-1)^{r-1}}{[H'_n(\hat{z})]^{r+1}\hat{z}^{n-m+r}} \binom{r+n-m}{r} + O\left(\frac{1}{q^n}\right).$$

Согласно определению H_n ,

$$(\hat{z}-1)[\mathbf{I} - \hat{z}(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)]_n^{-1} = \hat{z}P(i).$$

Так как

$$[\mathbf{I} - \hat{z}(\mathbf{P} - \mathbf{e}\mathbf{p}^T)]_n^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\mathbf{p}^T)_n^{-1} + O\left(\frac{1}{q^m}\right),$$

то

$$\hat{z} = 1 + P(i) - q^{-s}P(i) + O\left(\frac{1}{q^{m+s+1/2}}\right).$$

Кроме того,

$$H'_n(\hat{z}) = -\frac{H_n(1)}{\hat{z}-1} + O\left(\frac{1}{q^m}\right).$$

Итак, для всех r

$$\begin{aligned} \pi_i^r(n) &= \frac{P(i)[G(1)]^{r+1}(\hat{z}-1)^{2r}n^r}{[H_n(1)]^{r+1}\hat{z}^{n+r+1}} + O\left(\frac{1}{q^n}\right) = \frac{\alpha^r e^{-\alpha}}{r!} \\ &\times \left[1 + \frac{(r-\alpha)\xi_i}{q^{1/2}} + \frac{(\alpha^2 - 2\alpha r + r(r-1))\xi_i^2 + 2(r-\alpha)\Delta_i}{2q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2 - 2\alpha r + r(r-1)}{\alpha q^s} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что $\sum_i \xi_i = \sum_i \Delta_i = 0$, а $\sum_i \xi_i^2 = \mathbf{e}^T \Psi \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}_0^k \sum_{\ell=0}^{m-1} [\mathbf{P}_0^T]^\ell \Psi^T \mathbf{e}$. Координаты вектора $\Psi^T \mathbf{e}$ суть $\psi_{j_1 \dots j_{m-1} j_m}$, матрица $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_0^T)^k$ образована элементами $\delta_{(i_{k+1} \dots i_m), (j_{k+1} \dots j_m)} q^{-k}$, а для $k \neq \ell$ верно $\mathbf{e}^T \Psi \mathbf{P}_0^k [\mathbf{P}_0^T]^\ell \Psi^T \mathbf{e} = 0$. Тем самым

$$\sum_i \xi_i^2 = \mathbf{e}^T \Psi \left[\sum_{k=0}^{m-1} (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_0^T)^k \right] \Psi^T \mathbf{e} = \sum_{k=0}^{m-1} q^k \left[\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m} \psi_{j_{k+1} \dots j_{m-1} j_m}^2 \right] \sim q^m \mathbf{D}.$$

Формула (25) приводит к выражению для математического ожидания числа $N^r = N_n^r$ m -грамм, появляющихся ровно r раз в n -последовательности. При $r = 0, 1, 2, \dots$

$$EN^r = \sum_i \pi_i^r(n) = \frac{\alpha^r e^{-\alpha}}{r!} q^m \left[1 + \frac{\mathbf{D}}{2q} [\alpha^2 - 2\alpha r + r(r-1)] + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \right]. \quad (26)$$

Для независимых одинаково распределенных последовательностей имеем $\psi_{ij} = \psi_j$, так что $\mathbf{D}_k \equiv \mathbf{D}_{m-1} = q^{-1} \sum_{j=1}^q \psi_j^2$, а $\mathbf{D} = m \mathbf{D}_{m-1}$. В случае $r = 0$ (26) согласуется с формулой на с. 23 работы М. И. Тихомировой и В. П. Чистякова [21], полученной этими авторами другим методом.

Асимптотическое разложение ковариации между N^r и N^t может быть получено согласно формулам (A9), (A10) в [17]. При $r \neq t$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N^r, N^t) &= -q^m \frac{e^{-2\alpha} \alpha^{r+t}}{r! t!} \left[(2m-1)\alpha - (2m-1)(r+t) + 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4m-3)rt}{\alpha} - \frac{2(m-1)(\alpha-r)(\alpha-t)}{\alpha} \right] + O(q^{m-1}) \\ &= -q^m \frac{e^{-2\alpha} \alpha^{r+t}}{r! t!} \left[\alpha - r - t + 1 + \frac{rt}{\alpha} \right] + O(q^{m-1}), \end{aligned} \quad (27)$$

а

$$\text{Var}(N^r) = q^m \frac{e^{-\alpha} \alpha^r}{r!} \left[1 - \frac{e^{-\alpha} \alpha^r}{r!} \left(\alpha - 2r + 1 + \frac{r^2}{\alpha} \right) \right] + O(q^{m-1}). \quad (28)$$

Теорема 4.1. Если $n \rightarrow \infty$ и $n/q^m \rightarrow \alpha$ с положительным α , то вероятность $\pi_i^r(n)$ появления цепочки i в последовательности длины n

ровно r раз допускает асимптотическое разложение (25). Для математического ожидания числа цепочек, появляющихся r раз, справедлива формула (26). Ковариация между числами цепочек, появляющихся r и t раз имеет вид (27), а дисперсия цепочек с частотой r представима как (28).

В теореме 6 главы III книги [8] приводятся формулы для двух первых моментов распределения числа цепочек с заданной частотой в предположении, что появления цепочек независимы, т.е. подсчитываются непересекающиеся m -цепочки. Заслуживает некоторого удивления тот факт, что асимптотика моментов одна и та же для налагающихся и не налагающихся цепочек.

По этой причине оптимальный линейный критерий, основанный на статистике отсутствующих цепочек, цепочек частоты один, два и т.д. в марковской последовательности, тот же, что и тест, данный в теореме 2 главы V книги [8]. В. Г. Михайлов [10], [11] изучал условия предельной нормальности для таких статистик.

5. Пример: 2-граммы. Приближения для математического ожидания и дисперсии числа отсутствующих пар изучены в [9] и более тщательно в [20]. На этих приближениях основывается распределение одного теста случайности в [16]. Начнем обсуждение с цепи Маркова порядка два.

Согласно теореме 2.1, вероятность $\pi_i^0(n)$ того, что n -последовательность не содержит $i = (i_1, i_2)$, есть коэффициент при z^n разложения в степенной ряд функции

$$\frac{H_n(z) - z^2 P(i) G(z)}{(1 - z) H_n(z)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^2 P(i)}{(1 - z)^2 (\mathbf{I} - z\mathbf{P})_n},$$

где $H_n(z)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента (i, i) матрицы $\mathbf{I} - z\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}$ определено в (3)), а $G(z) = \det(\mathbf{I} - z\mathbf{P})/(1 - z)$. Пусть алфавит состоит из $q = 2$ букв, скажем, 0 и 1, и положим $a = P(1|00)$, $b = P(1|01)$, $c = P(0|10)$, $d = P(0|11)$. Тогда

$$\begin{aligned} H_{(0,0)(0,0)}(z) &= 1 - z(1 - d) - z^2(1 - b)(1 - c) + z^3(1 - b - d)(1 - c) \\ H_{(0,1)(0,1)}(z) &= (1 - (1 - a)z)(1 - (1 - d)z) \quad \text{и т.п. и} \\ G(z) &= (1 - a - c)(1 - b - d)z^3 + (ad - (1 - b)(1 - c))z^2 \\ &\quad - (1 - a - d)z + 1. \end{aligned}$$

И. Дж. Гуд [5] подсчитал стационарные вероятности $P(00) = cd/(ab + cd + 2ad)$, $P(11) = ab/(ab + cd + 2ad)$, $P(10) = P(01)$ и указал формулу для дисперсии числа отсутствующих цепочек.

Например, наша формула для $H_{(0,0)(0,0)}(z)$ показывает, что

$$\pi_{(00)}^0(n) = \frac{cd(ab + d - a)(1 - a)^{n-3} - ab(cd - d + a)(1 - d)^{n-3}}{(d - a)(ab + cd + 2ad)}. \quad (29)$$

Полученные производящие функции дают формулы для вероятностей частот заданной цепочки в марковских цепях порядка два (ср. [3]).

Если же цепь имеет порядок один с переходной матрицей Π , то, согласно теореме 2.1, при $m = 2$ для любого $i = (i_1, i_2)$

$$(1 - z) C_{ii}(z) + z^2 P(i) = (1 - z) \left[1 + \delta_{i_1 i_2} z \Pi_{i_1 i_2} + z^2 \Pi_{i_1 i_2} [\Pi(\mathbf{I} - z\Pi)^{-1}]_{i_2 i_1} \right],$$

а для $i \neq j$

$$C_{ij}(z) = \delta_{i_2 j_1} z \Pi_{j_1 j_2} + z^2 \Pi_{j_1 j_2} [\mathbf{I} - z(\Pi - \mathbf{e}\pi^T)]_{i_2 j_1}^{-1} - z^2 P(j).$$

Формула для $\pi_i^0(n)$ значительно упрощается, когда $1 - a = c$, $1 - b = d$. Если $n \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow \infty$ так, что $n/q^m \rightarrow \alpha > 0$, и $\Pi(j | i) = q^{-1} + q^{-3/2} \psi_{ij}$,

$$\frac{1}{q^2} \sum_{i,j} \psi_{ij}^2 = \mathbf{D}_0, \quad \frac{1}{q} \sum_j \psi_{\cdot j}^2 = \mathbf{D}_1,$$

то $\pi(j) = q^{-1} + q^{-5/2} \sum_i \psi_{ij} = q^{-1} + q^{-3/2} \psi_{\cdot j}$. Как и ранее, получаем

$$nP(i) = \alpha \left[1 + \frac{1}{q^{1/2}} (\psi_{i_1 i_2} + \psi_{\cdot i_1}) + \frac{1}{q} \psi_{i_1 i_2} \psi_{\cdot i_1} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) \right].$$

Для апериодических цепочек $i = (i_1, i_2)$, $i_1 \neq i_2$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \pi_{(i_1, i_2)} &= e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha}}{\sqrt{q}} (\psi_{i_1 i_2} + \psi_{\cdot i_1}) \\ &+ \frac{\alpha e^{-\alpha}}{2q} [\alpha (\psi_{i_1 i_2} + \psi_{\cdot i_1})^2 - 2\psi_{i_1 i_2} \psi_{\cdot i_1}] + O\left(\frac{1}{q^2}\right), \end{aligned}$$

а для периодических (i, i)

$$\pi_{(i, i)} = e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha}}{\sqrt{q}} (\psi_{ii} + \psi_{\cdot i}) + \frac{\alpha e^{-\alpha}}{2q} [\alpha (\psi_{ii} + \psi_{\cdot i})^2 - 2\psi_{ii} \psi_{\cdot i} + 2] + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right).$$

Имеем $\sum_{i_1, i_2} (\psi_{i_1 i_2} + \psi_{\cdot i_1})^2 = q^2 [\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1]$, $\sum_{i_1, i_2} \psi_{i_1 i_2} \psi_{\cdot i_1} = 0$, так что среднее числа отсутствующих цепочек N^0 имеет вид

$$EN^0 = e^{-\alpha} q^2 \left[1 + \frac{\alpha(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1)}{2q} + \frac{\alpha}{q^2} + o\left(\frac{1}{q^3}\right) \right]. \quad (30)$$

Дисперсия N^0 приобретает вид

$$\begin{aligned} \text{Var}(N^0) &= e^{-\alpha} [1 - (1 + \alpha) e^{-\alpha}] q^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha} q \\ &+ e^{-\alpha} \left[1 - \alpha - e^{-\alpha} \left(2 - 8\alpha - \frac{3\alpha^2}{2} \right) \right] (\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) q + O(1). \end{aligned} \quad (31)$$

Когда $\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 = 0$, имеем значительно более точную формулу

$$\begin{aligned} \text{Var}(N^0) &= e^{-\alpha} [1 - (1 + \alpha) e^{-\alpha}] q^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha} q \\ &+ e^{-\alpha} \left[1 - \frac{\alpha}{2} - e^{-\alpha} \left(1 + 2\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{q}\right). \end{aligned}$$

Приближения (30), (31) ведут к удивительно точным численным результатам. Так, $EN^0 = 141909.3299555$, в то время как (30) дает 141909.3299551.

Эффективность критерия числа пустых ящиков задается выражением $\alpha^2[e^\alpha - 1 - \alpha]^{-1/2}$. Его максимум (соответствующий наиболее мощному тесту) получается, когда $\alpha = \alpha^* = 3.594$. Таким образом, при $m = 2$ оптимальное соотношение между q и n есть $n \approx 3.6q^2$. В этой ситуации критерий, основанный на N^0 , асимптотически эффективен.

6. Ковариационная матрица частот цепочек и ее псевдообратная. Здесь исследуется связь ковариационной матрицы эмпирических частот m -грамм в цепи Маркова порядка m с корреляционной матрицей цепочек $\mathcal{C}$. Пусть Y_n обозначает обычную цепь Маркова, состояниями которой являются все m -граммы [1]. Более точно, $Y_n = i$, когда $(\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n+m-1}) = (i_1 \dots i_m)$.

Переходные вероятности этой цепи задаются формулой (3). Частота ω_i появления граммы i в изначальной последовательности равна частоте состояния i новой цепи.

Хорошо известно [7], что совместное распределение таких частот асимптотически нормально. Переходная матрица $\mathbf{P}$, заданная в (3), имеет единственное собственное значение, по модулю равное 1 (так что цепь регулярна). Такая матрица $\mathbf{P}$ имеет вектор стационарных вероятностей $\mathbf{p}$ с координатами $P(i) = P\{\varepsilon_1 = i_1, \dots, \varepsilon_m = i_m\}$, $\mathbf{P}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}$ и $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{e}\mathbf{p}^T$. Определим

$$\mathcal{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\mathbf{p}^T)^{-1}$$

как фундаментальную матрицу цепи Y_n . Отметим, что эта матрица уже играла важную роль в настоящей работе.

Согласно теореме 4.6.1 в [7], предельная матрица

$$\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \text{Cov}(\omega_i, \omega_j)$$

образована элементами вида

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}P(i) - P(i)P(j) + P(i)\mathcal{Z}_{ij} + P(j)\mathcal{Z}_{ji}.$$

Тем самым, если $\mathbf{D}$ — диагональная матрица, связанная с вектором $\mathbf{p}$, то Σ может быть записана как

$$\Sigma = -\mathbf{D} - (2m - 1)\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{D}, \quad (32)$$

где $\mathbf{B} = \mathcal{C}(1) = \mathcal{Z} + (m - 1)\mathbf{e}\mathbf{p}^T$.

Для статистических выводов необходимо иметь псевдообратную Σ^- к матрице (32). Мы покажем, что

$$\Sigma^- = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V}, \quad (33)$$

где $\mathbf{V}$ определена в (12). Для начала заметим, что $\Sigma^- \mathbf{p} = \mathbf{e} - \mathbf{Vp} = 0$. Согласно (14), $\mathbf{VDB} = \mathbf{VD} + \mathbf{B} - \mathbf{I}$, так что

$$\mathbf{V}\Sigma = -\mathbf{I} - (2m-1)\mathbf{ep}^T + \mathbf{B} + \mathbf{VB}^T\mathbf{D}.$$

Имеем

$$\mathbf{D}^{-1}\Sigma = -\mathbf{I} - (2m-1)\mathbf{ep}^T + \mathbf{B} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}.$$

Закключаем, что

$$(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V})\Sigma = (\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V})\mathbf{B}^T\mathbf{D} = (\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V})\mathcal{Z}^T\mathbf{D},$$

а

$$\Sigma(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V})\Sigma = \mathbf{D}\mathcal{Z}(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V})\mathcal{Z}^T\mathbf{D}.$$

Для доказательства того, что матрица (33) является псевдообратной для Σ , т.е. что

$$\Sigma\Sigma^-\Sigma = \Sigma, \quad (34)$$

остается убедиться в том, что

$$\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{V} = \mathcal{Z}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\Sigma\mathbf{D}^{-1}(\mathcal{Z}^T)^{-1}.$$

Но матрица в правой части этого равенства есть

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}^{-1}(-\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{ee}^T + \mathcal{Z}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathcal{Z}^T)(\mathcal{Z}^T)^{-1} \\ &= -\mathcal{Z}^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathcal{Z}^T)^{-1} - \mathbf{ee}^T + \mathcal{Z}^{-1}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}(\mathcal{Z}^T)^{-1} \\ &= -(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{ep}^T)\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}^T + \mathbf{pe}^T) - \mathbf{ee}^T + 2\mathbf{D}^{-1} \\ & \quad - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{P}^T - \mathbf{pe}^T) - (\mathbf{P}^T - \mathbf{ep}^T)\mathbf{D}^{-1} \\ &= -(\mathbf{P} - \mathbf{ep}^T)\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{P}^T - \mathbf{pe}^T) + \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{ee}^T \\ &= \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{PD}^{-1}\mathbf{P}^T. \end{aligned}$$

Формула (15) убеждает в справедливости (34).

Теорема 6.1. Для марковской цепи фиксированного порядка m предельная матрица Σ ковариаций частот m -грамм имеет вид (32). Если истинный порядок цепи есть $m-1$, то одна из псевдообратных к Σ матриц есть (33).

Теорема 6.1 показывает, что ранг матрицы Σ равен $q^m - q^{m-1}$. В самом деле, $\Sigma\Sigma^-$ — идемпотентная матрица и $\text{tr}(\Sigma\Sigma^-) = \text{tr}(\mathbf{B}^T) - \text{tr}(\mathbf{DVB}^T) = \text{tr}(\mathbf{I}) - \text{tr}(\mathbf{DV}) = q^m - q^{m-1}$.

Пусть $\mathbf{s}$ — это q^m -мерный вектор с координатами $\sqrt{P(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, так что диагональная матрица, образованная этим вектором, совпадает с $\mathbf{D}^{1/2}$. Положим $\Sigma_B = \mathbf{D}^{-1/2}\Sigma\mathbf{D}^{-1/2}$. Тогда, согласно (32),

$$\Sigma_B = -\mathbf{I} - (2m-1)\mathbf{ss}^T + \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1/2} + \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{B}^T\mathbf{D}^{1/2}.$$

Ранг этой матрицы тоже есть $q^m - q^{m-1}$. Асимптотическим распределением нормированных частот $(\omega_i - nP(i))/\sqrt{nP(i)}$, $i \in \mathcal{J}_m$, m -грамм является нормальное $N(0, \Sigma_B)$.

Согласно теореме 6.1, псевдообратная матрицы Σ_B имеет вид

$$\Sigma_B^- = \mathbf{D}^{1/2} \Sigma^- \mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V} \mathbf{D}^{1/2}.$$

Теорема 6.2. Пусть ω_i является частотой цепочки i в стационарной марковской цепи $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ порядка $m - 1$, $P(i) = P\{\varepsilon_1 = i_1, \dots, \varepsilon_m = i_m\}$. Тогда статистика

$$\chi^2 = \sum_{i \in \mathcal{J}_m} \frac{(\omega_i - nP(i))^2}{nP(i)} - \sum_{\kappa \in \mathcal{J}_{m-1}} \frac{(\omega_\kappa - P(\kappa))^2}{nP(\kappa)} \quad (35)$$

асимптотически при $n \rightarrow \infty$ имеет χ^2 -распределение с $q^m - q^{m-1}$ степенями свободы.

Доказательство. Заметим, что если Z — нормальный, $N(0, \Sigma_B)$, вектор размерности q^m , то, согласно теореме 9.2.3 в [13], квадратичная форма $Z^T \Sigma_B^- Z$ имеет распределение χ^2 с $\text{tr}(\Sigma_B \Sigma_B^{-1}) = q^m - q^{m-1}$ степенями свободы. Если обозначить через Z_n случайный вектор с координатами $(\omega_i - nP(i))/\sqrt{nP(i)}$, $i \in \mathcal{J}$, то $Z_n^T \Sigma_B^- Z_n$ совпадает с статистикой χ^2 в (35). Теорема доказана.

Частные случаи теоремы 6.2 известны для независимых случайных величин, а также в тестировании порядка марковской цепи (см., например [1]). Теорема 6.2 дает возможность проверить гипотезу, согласно которой вероятности m -грамм — заданные числа $P(i)$, $i \in \mathcal{J}_m$. Соответствующий критерий, основанный на эмпирических частотах налагающихся цепочек, отвергнет эту гипотезу при больших значениях (35). Он обобщает так называемый сериальный тест равномерности [4].

Если при альтернативной гипотезе вероятности имеют вид $P(i)(1 + n^{-1/2}\psi_i)$, $i \in \mathcal{J}_m$, с $\sum P(i)\psi_i = 0$ и $\sum \psi_i \neq 0$, то предельным распределением статистики (35) будет нецентрального χ^2 -распределение с $q^m - q^{m-1}$ степенями свободы и параметром нецентральности $(\sum \psi_i)^2$.

В этой ситуации при альтернативной гипотезе предельное распределение частот m -грамм $(\omega_i - nP(i))/\sqrt{nP(i)}$, $i \in \mathcal{J}_m$, нормально. Вектор среднего этого распределения имеет координаты $(\sum \psi_i) \sqrt{P(i)}$, а матрица ковариаций есть Σ_B . Та же теорема 9.2.3 из [13] показывает, что квадратичная форма $Z^T \Sigma_B^- Z$ имеет нецентрального χ^2 -распределение с $q^m - q^{m-1}$ степенями свободы и параметром нецентральности $(\sum \psi_i)^2$. Этот факт дает приближенную функцию мощности упомянутого критерия.

Настоящая работа была поддержана грантом MSPF-02G-068. Автор благодарен И. Бебу и рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Billingsley P.* Statistical Inference for Markov Processes. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1961, 75 p.
2. *Беляев П. Ф.* О вероятности непоявления заданного числа s -цепочек в сложных цепях Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 3, с. 547–551.
3. *Brainerd B., Chang S. M.* Number of occurrences in two-state Markov chains, with an application in linguistics. — *Canad. J. Statist.*, 1982, v. 10, № 3, p. 225–231.
4. *Good I. J.* The serial test for sampling numbers and other tests for randomness. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1953, v. 49, p. 276–284.
5. *Good I. J.* Quadratics in Markov-chain frequencies and the binary chain of order 2. — *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 1963, v. 25, p. 383–391.
6. *Guibas L., Odlyzko A.* String overlaps, pattern matching and nontransitive games. — *J. Combin. Theory*, 1981, v. 30, № 2, p. 183–208.
7. *Кемени Дж. Дж., Снелл Дж. Л.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 271 с.
8. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
9. *Marsaglia G.* A current view of random number generation. — *Computer Science and Statistics: Proceedings of the Sixteenth Symposium on the Interface*. New York: Elsevier, 1985, p. 3–10.
10. *Мухайлов В. Г.* Асимптотическая нормальность в схеме конечно-зависимого размещения частиц по ячейкам. — *Матем. сб.*, 1982, т. 119, № 4, с. 509–520.
11. *Мухайлов В. Г.* Об асимптотической нормальности симметрических разделимых статистик от частот m -цепочек. — *Дискретн. матем.*, 1989, т. 1, № 4, с. 92–103.
12. *Odlyzko A.* Asymptotic enumeration methods. — *Handbook of Combinatorics*. Ed. by R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász. Amsterdam: Elsevier, 1995, p. 1063–1229.
13. *Rao C. R., Mitra S. K.* Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York: Wiley, 1971, 240 p.
14. *Reinert G., Schbath S., Waterman M. G.* Probabilistic and statistical properties of words: an overview. — *J. Comput. Biol.*, 2000, v. 7, № 1–2, p. 1–46.
15. *Regnier M., Szpankowski W.* On pattern frequency occurrences in a Markovian sequence. — *Algorithmica*, 1998, v. 22, № 4, p. 631–649.
16. *Rukhin A. L.* Testing randomness: a suite of statistical procedures. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 1, с. 137–162.
17. *Rukhin A. L.* Distribution of the number of words with a prescribed frequency and tests of randomness. — *Adv. in Appl. Probab.*, 2002, v. 34, № 4, p. 775–797.
18. *Соловьев А. Д.* Одно комбинаторное тождество и его применение к задаче о первом наступлении редкого события. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1966, т. 11, в. 2, с. 313–320.
19. *Szpankowski W.* Average Case Analysis of Algorithms on Sequences. New York: Wiley-Interscience, 2001, 551 p.
20. *Тихомирова М. И., Чистяков В. П.* Об асимптотике моментов числа непоявившихся s -цепочек. — *Дискретн. матем.*, 1997, в. 9, № 1, с. 12–29.
21. *Тихомирова М. И., Чистяков В. П.* О статистических критериях отсутствующих s -грамм. — *Труды по дискретной математике*, т. 1. М.: ТВП, 1997, с. 265–278.

Поступила в редакцию
30.IX.2005