Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Фельдман, Р. Graczyk, К теореме Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 596–601

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:21:04

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965, 615 с.
2. Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиального распределения. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, в. 3, с. 135–142.
3. Gram J. P. Über die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. — J. Reine Angew. Math., 1883, B. 94, S. 41–73.
4. Charlier C. V. L. Contributions to the mathematical theory of statistics. 5. — Arkiv. Mat. Astr. Fys., 1914, B. 9, H. 3–4, № 25, 17 S.
5. Крюнос Ю. Точность аппроксимации обобщенного биномиального распределения свертками пуассоновских мер. — Литов. матем. сб., 1986, т. 26, в. 1, с. 53–69.
6. Крюнос Ю. Аппроксимации распределений сумм решетчатых случайных величин. I, II. — Литов. матем. сб., 1986, т. 26, в. 3, с. 455–467; в. 4, с. 692–704.
7. Barbour A. D., Čekanavičius V. Total variation asymptotics for sums of independent integer random variables. — Ann. Probab., 2002, v. 30, № 2, p. 509–545.
8. Barbour A. D., Chrysaphinou O. Compound Poisson approximation: a user's guide. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 964–1002.
9. Чяканавичюс В. Об обобщенных пуассоновских аппроксимациях при моментных ограничениях. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 74–86.
10. Якшилович Ш. О некотором способе разложения вероятностей решетчатых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 294–307.

Поступила в редакцию
16.IV.2004

© 2004 г.

ФЕЛЬДМАН Г. М.*, ГРАЧИК П. **

К ТЕОРЕМЕ СКИТОВИЧА–ДАРМУА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП¹⁾

Доказана следующая теорема. Пусть X — счетная дискретная абелева группа, $\text{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов группы X , ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 . Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ следует, что μ_1, μ_2 — идемпотентные распределения.

Ключевые слова и фразы: независимые линейные статистики, дискретные абелевы группы, теорема Скитовича–Дармуа.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\text{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов группы X , $\xi_j, j = 1, \dots, n, n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j . Рассмотрим следующую задачу. Для каких групп X из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n, n \geq 2$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, следует, что все распределения μ_j — гауссовские с точностью до сдвигов на

* ФТИНТ НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков, 103, 61103 УКРАИНА; e-mail: feldman@ilt.kharkov.ua

** Université d'Angers, Departement de Mathématiques, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France e-mail: graczyk@tonton.univ-angers.fr

¹⁾ Первый автор частично поддержан грантом Ministère des Affaires Etrangères, France; второй автор поддержан The European Commision (TMR 1998–2006 Network Harmonic Analysis).

идемпотентные распределения? Сдвиги на идемпотентные распределения возникают естественным образом в характеристизационных задачах на группах (см. [1, гл. 3]).

Несколько слов об истории этой задачи. Еще в 1953 году В. П. Скитович [2] и Дармуа [3] независимо доказали, что на группе $X = \mathbf{R}$ из независимости линейных статистик L_1 и L_2 следует, что все распределения μ_j — гауссовские. Затем Гурье и Олкин [4] доказали аналогичную теорему для группы $X = \mathbf{R}^m$, $m > 1$. Решение этой задачи в классах конечных абелевых групп, компактных абелевых групп и дискретных периодических абелевых групп было дано в работах [5]–[7]. Отметим, что поскольку носитель гауссовского распределения — класс смежности некоторой связной подгруппы группы X , то для дискретных абелевых групп речь идет о характеристизации идемпотентных распределений.

Достаточно неожиданным оказался тот факт, что если ограничиться случаем $n = 2$, то теорема Скитовича–Дармуа верна для произвольных конечных абелевых групп (см. [8]), в то время как класс конечных абелевых групп, для которого теорема Скитовича–Дармуа верна при произвольном $n \geq 2$, весьма беден (см. [5]). Ситуация, противоположная классической, где нет различия между $n = 2$ и произвольным n . После того как случай $n = 2$ был исследован для конечных абелевых групп, следующим естественным шагом является изучение компактных абелевых групп и дискретных абелевых групп. Класс компактных абелевых групп был исследован авторами в [9]. Полностью описать компактные абелевые группы, для которых теорема Скитовича–Дармуа справедлива при $n = 2$, не удалось, но было доказано, что на связных компактных абелевых группах теорема Скитовича–Дармуа неверна, и был полностью описан класс вполне несвязных компактных абелевых групп, для которых теорема Скитовича–Дармуа имеет место.

В настоящей работе мы докажем, что теорема Скитовича–Дармуа при $n = 2$ справедлива для произвольных дискретных абелевых групп. Прежде чем переходить к доказательству основной теоремы, условимся о некоторых обозначениях.

Обозначим через $Y = X^*$ группу характеров группы X , через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Если H — подгруппа группы Y , обозначим $A(X, H) = \{x \in X: (x, y) = 1 \text{ для всех } y \in H\}$ ее аннулятор. Для любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(X)$ определим сопряженный автоморфизм $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(Y)$ по формуле $(x, \tilde{\alpha}y) = (\alpha x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Единичный автоморфизм группы обозначим через I . Сверточную подгруппу вероятностных распределений на группе X обозначим $M^1(X)$. Обозначим через $I(X)$ множество идемпотентных распределений на группе X , т.е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X .

Если распределение $\mu \in M^1(X)$, обозначим $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x)$ его характеристическую функцию. Обозначим через $\sigma(\mu)$ носитель $\mu \in M^1(X)$. Отметим, что если H — замкнутая подгруппа в Y и $\hat{\mu}(y) \equiv 1$ при $y \in H$, то $\hat{\mu}(y + h) = \hat{\mu}(y)$ для всех $y \in Y$, $h \in H$ и $\sigma(\mu) \subset A(X, H)$. Отметим также, что характеристическая функция распределения Хаара m_K , где K — компактная подгруппа в X , имеет вид

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Для $\mu \in M^1(X)$ определим распределение $\bar{\mu} \in M^1(X)$ по формуле $\bar{\mu}(E) = \mu(-E)$ для всех борелевских множеств $E \subset X$. Заметим, что $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть X — счетная дискретная абелева группа, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 . Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, отметим, что, как и в случае $X = \mathbf{R}$, независимость линейных статистик L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mu}_1(\tilde{\alpha}_1 u + \tilde{\beta}_1 v) \hat{\mu}_2(\tilde{\alpha}_2 u + \tilde{\beta}_2 v) = \hat{\mu}_1(\tilde{\alpha}_1 u) \hat{\mu}_2(\tilde{\alpha}_2 u) \hat{\mu}_1(\tilde{\beta}_1 v) \hat{\mu}_2(\tilde{\beta}_2 v), \quad u, v \in Y. \quad (1)$$

Мы опускаем эту простую проверку. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (см. [5]). Пусть ξ_j , $j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в счетной дискретной абелевой группе без кручения X и с распределениями μ_j . Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n$ следует, что все μ_j — вырожденные распределения. В частности, если $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$, то $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$, $y \in Y$.

Лемма 2 (см. [7]). Пусть ξ_j , $j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в счетной дискретной периодической абелевой группе X и с распределениями μ_j , причем все характеристические функции $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. Пусть $\delta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1 \xi_1 + \dots + \delta_n \xi_n$ следует, что все характеристические функции $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ на некоторой открытой подгруппе $B \subset Y$.

Лемма 3 (см. [8]). Пусть X — конечная абелева группа, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 . Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.

Предложение 1. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X , имеющие распределение m_K , где K — компактная подгруппа группы X . Пусть $\alpha \in \text{Aut}(X)$, $\beta = I - \alpha$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha \xi_2$ независимы;
- (ii) $\beta(K) \supset K$;
- (iii) если $\tilde{\beta}y \in A(Y, K)$, то $y \in A(Y, K)$.

Доказательство. Обозначим $a = \tilde{\alpha}$, $b = \tilde{\beta}$, $E = A(Y, K)$. Проверим вначале эквивалентность (ii) и (iii). Пусть выполнено (ii) и $by \in E$. Тогда для любого $x \in K$ выполнено $(x, by) = 1$, и поэтому $(\beta x, y) = 1$, т.е. $y \in A(Y, \beta(K))$, и в силу (ii) $y \in E$. Если же выполнено (iii) и $y \in A(Y, \beta(K))$, то для любого $x \in K$ выполнено $(\beta x, y) = 1$, и поэтому $(x, by) = 1$, т.е. $by \in E$, и в силу (iii) $y \in E$. Значит, $A(Y, \beta(K)) \subset A(Y, K)$, что влечет (ii).

Обозначим $f(y) = \hat{m}_K(y)$. Независимость линейных статистик L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристическая функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (1), которое принимает вид

$$f(u+v)f(u+av) = f^2(u)f(v)f(av), \quad u, v \in Y. \quad (2)$$

Полагая здесь $v = -u$, получаем

$$f(bu) = f^3(u)f(au), \quad u \in Y.$$

Отсюда немедленно следует (iii). Предположим теперь, что выполнено (iii). Проверим, что уравнение (2) справедливо при любых $u, v \in Y$. Если $u, v \in E$, то левая и правая части уравнения (2) равны либо единице, если $av \in E$, либо нулю, если $av \notin E$. Если $u \in E$, $v \notin E$ или $u \notin E$, $v \in E$, то обе части уравнения (2) обращаются в нуль. Если же $u, v \notin E$, то правая часть уравнения (2) равна нулю. Левая часть уравнения (2) также должна обращаться в нуль, ибо в противном случае было бы $u+v \in E$ и $u+av \in E$, что влечет $bv \in E$, а значит, в силу (iii) $v \in E$. Полученное противоречие показывает, что левая часть уравнения (2) обращается в нуль. Итак, уравнение (2) выполнено при любых $u, v \in Y$, а следовательно, L_1 и L_2 независимы. Предложение 1 доказано.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что при $\alpha = -I$ из предложения 1 вытекает хорошо известное описание идемпотентных распределений m_K , которые являются в то же время гауссовскими распределениями в смысле Бернштейна на X . Именно, подгруппа K должна быть группой Корвина (см. [1, гл. 3]).

Отметим также, что независимость линейных статистик L_1 и L_2 , вообще говоря, не влечет равенства $\beta(K) = K$. Действительно, пусть G — произвольная компактная абелева группа. Рассмотрим прямое произведение $X = P_{j=-\infty}^{\infty} G_j$, где все $G_j \approx G$. Положим $K = P_{j=-\infty}^{\infty} G_j$, и пусть автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}(X)$ имеет вид

$$\alpha\{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{g_{j+1}\}_{j=-\infty}^{\infty}, \quad \{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in X.$$

Очевидно, что (ii) выполнено, в то время как K — собственная подгруппа в $\beta(K)$.

Предложение 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X , имеющие распределения $\mu_1 = m_{K_1}$, $\mu_2 = m_{K_2}$, где K_1, K_2 — конечные подгруппы группы X . Пусть $\alpha \in \text{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ следует, что $K_1 = K_2 = K$ и $\alpha(K) = K$.

Доказательство. Независимость линейных статистик L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристические функции $\hat{\mu}_1(y) = f(y)$ и $\hat{\mu}_2(y) = g(y)$ удовлетворяют уравнению (1), которое принимает вид

$$f(u+v)g(u+av) = f(u)g(u)f(v)g(av), \quad u, v \in Y, \quad (3)$$

где $a = \tilde{\alpha}$. Обозначим $\beta = I - \alpha$, $b = \tilde{\beta}$, $H_j = A(Y, K_j)$, $j = 1, 2$. Полагая в (3) $u = -av$, получаем

$$f(bv) = f(av)f(v)g^2(av), \quad v \in Y. \quad (4)$$

Отсюда следует, что если $bv \in H_1$, то $v \in H_1$. Значит, по предложению 1 $\beta(K_1) \supset K_1$, а поскольку подгруппа K_1 конечна, то $\beta(K_1) = K_1$. Это влечет $\alpha(K_1) = K_1$. Проверим, что тогда $a(H_1) = H_1$. Действительно, пусть $y \in H_1$. Тогда $(\alpha x, y) = 1$ при любом $x \in K_1$, и поэтому $(x, ay) = 1$ при любом $x \in K_1$, т.е. $ay \in H_1$. Итак, $a(H_1) \subset H_1$. Пусть теперь $x \in A(X, a(H_1))$, т.е. $(x, ay) = 1$ при любом $y \in H_1$. Следовательно, $(\alpha x, y) = 1$ при любом $y \in H_1$, т.е. $\alpha x \in A(X, H_1) = K_1$. Учитывая, что $\alpha(K_1) = K_1$, мы заключаем, что $x \in K_1$. Значит, $A(X, a(H_1)) \subset A(X, H_1)$, откуда $H_1 \subset a(H_1)$, т.е. $a(H_1) = H_1$.

Рассмотрим сужение уравнения (3) на H_1 . Имеем $g(u+av) = g(u)g(av)$, $u, v \in H_1$. Отсюда $g(y) \equiv 1$, $y \in H_1$, т.е. $H_1 \subset H_2$.

Полагая теперь в (3) $v = -u$, получаем

$$g(bu) = f^2(u)g(u)g(au), \quad u \in Y. \quad (5)$$

Рассуждение, аналогичное приведенному выше, где вместо уравнения (4) рассматривается уравнение (5), доказывает, что $H_2 \subset H_1$. Значит, $H_1 = H_2$. Отсюда $K_1 = K_2 = K$ и $\alpha(K) = K$. Предложение 2 доказано.

З а м е ч а н и е 2. Следующий пример показывает, что предложение 2, вообще говоря, неверно, если K_1 и K_2 — компактные, но не конечные подгруппы группы X .

Пусть группа X такая же, как в замечании 1. Обозначим $H = G^*$. Тогда группа характеров $Y = X^*$ — слабое прямое произведение $Y \approx P_{j=-\infty}^{\infty} H_j$, где $H_j = H$. Пусть автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}(X)$ имеет вид $\alpha\{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{g_{j-2}\}_{j=-\infty}^{\infty}, \{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in X$. Обозначим $a = \tilde{\alpha}$. Тогда

$$\alpha\{h_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{h_{j+2}\}_{j=-\infty}^{\infty}, \quad \{h_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in Y.$$

Очевидно, что $\text{Ker}(I - a) = \{0\}$. Рассмотрим подгруппы $K_1 = P_{j \neq 1} G_j$ и $K_2 = P_{j \neq 2} G_j$. Очевидно, что $K_1 \neq K_2$ и $H_j = A(Y, K_j)$, $j = 1, 2$. Проверим, что характеристические функции $f(y) = \hat{m}_{K_1}(y)$ и $g(y) = \hat{m}_{K_2}(y)$ удовлетворяют уравнению (3). Достаточно проверить, что (3) выполнено при $u \neq 0$, $v \neq 0$. Поскольку $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то при $u \neq 0$, $v \neq 0$ правая часть уравнения (3) обращается в нуль. При этом левая часть уравнения (3) также обращается в нуль. В противном случае $u + v \in H_1$, $u + av \in H_2$. Но тогда $(I - a)v \in H_1 + H_2$. Как нетрудно проверить, это возможно лишь в случае, если $(I - a)v = 0$, а значит, $v = 0$, что противоречит $v \neq 0$. Таким образом, уравнение (3) выполнено при любых $u, v \in Y$, и, следовательно, линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями m_{K_1} и m_{K_2} , — независимы.

Доказательство теоремы 1. Пусть линейные статистики L_1 и L_2 независимы. Вводя новые независимые случайные величины $\xi'_1 = \alpha_1\xi_1$ и $\xi'_2 = \alpha_2\xi_2$, мы можем предполагать с самого начала, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$, где $\delta_j \in \text{Aut}(X)$. Более того, поскольку при любом $\delta \in \text{Aut}(X)$ независимость линейных статистик L_1 и L_2 равносильна независимости линейных статистик L_1 и δL_2 , мы можем считать, что $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$, $\alpha \in \text{Aut}(X)$. Обозначим $f(y) = \hat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \hat{\mu}_2(y)$. Независимость линейных статистик L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению (3),

где $a = \tilde{\alpha}$. Поскольку этому же уравнению удовлетворяют характеристические функции распределений $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$, а $\bar{\nu}_j(y) = |\bar{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, то, не ограничивая общности, будем также предполагать, что $f(y) \geq 0$ и $g(y) \geq 0$. Теорема 1 будет доказана, если мы убедимся, что функции $f(y)$ и $g(y)$ принимают лишь значения 0 и 1.

Рассмотрим сужение уравнения (3) на компоненту нуля C_Y группы Y . Отметим, что подгруппа C_Y инвариантна относительно любого автоморфизма $c \in \text{Aut}(Y)$. Пусть X_0 — подгруппа в X , состоящая из элементов конечного порядка. Тогда X/X_0 — группа без кручения и $(X/X_0)^* \approx C_Y$. По лемме 1 $f(y) \equiv g(y) \equiv 1$ при $y \in C_Y$. Отсюда следует, что функции $f(y)$ и $g(y)$ C_Y -инвариантны и мы можем перейти от уравнения (3) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/C_Y . В силу $a(C_Y) = C_Y$ гомоморфизм, индуцированный автоморфизмом a на фактор-группе Y/C_Y , является топологическим автоморфизмом фактор-группы Y/C_Y . Это позволяет доказывать теорему 1 в предположении, что группа Y вполне несвязна, т.е. мы можем предполагать, что X — периодическая группа.

Обозначим $L = \{y \in Y: f(y) = 1\}$, $H = \{y \in Y: g(y) = 1\}$. Тогда $\sigma(\mu_1) \subset A(X, L) = F$, $\sigma(\mu_2) \subset A(X, H) = G$. В силу леммы 2 существует такая открытая подгруппа B , что $B \subset L \cap H$. Обозначим $K = A(X, B)$. Тогда F и G — подгруппы в K . Поскольку подгруппа B открыта, то K — компактная группа, а в силу дискретности группы X K — конечная группа. Следовательно, F и G — также конечные группы.

Заметим теперь, что уравнению (3) при любом натуральном n удовлетворяют и характеристические функции $f^n(y)$ и $g^n(y)$, т.е.

$$f^n(u+v)g^n(u+av) = f^n(u)g^n(u)f^n(v)g^n(av), \quad u, v \in Y. \quad (6)$$

Очевидно, что существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = \hat{m}_F(y) = \bar{f}(y)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(y) = \hat{m}_G(y) = \bar{g}(y)$. Из (6) следует, что характеристические функции $\bar{f}(y)$ и $\bar{g}(y)$ также удовлетворяют уравнению (3). Мы находимся в условиях применимости предложения 2, откуда следует, что $F = G$ и $\alpha(G) = G$. Как следует из доказательства предложения 2, $a(H) = H$.

Мы нашли, таким образом, открытую подгруппу $H \subset Y$ такую, что $a(H) = H$ и $f(y) \equiv g(y) \equiv 1$ при $y \in H$. Значит, характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ H -инвариантны и мы можем перейти от уравнения (3) к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/H . При этом гомоморфизм, индуцированный автоморфизмом a на фактор-группе Y/H , является топологическим автоморфизмом фактор-группы Y/H . Поскольку G — конечная группа и $Y/H \approx G^*$, утверждение теоремы 1 вытекает непосредственно из леммы 3.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства теоремы 1 следует, что если в теореме 1 линейные статистики L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + \alpha \xi_2$, $\alpha \in \text{Aut}(X)$, то из независимости L_1 и L_2 вытекает, что μ_1 и μ_2 являются сдвигами одного и того же распределения Хаара m_G некоторой конечной подгруппы $G \subset X$, причем $\alpha(G) = G$, а следовательно, $a(H) = H$, где $H = A(Y, G)$, $a = \tilde{\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдман Г. М. Арифметика вероятностных распределений и характеристические задачи на абелевых группах. Киев: Наукова Думка, 1990, 168 с.
2. Скитович В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 2, с. 217–219.
3. Darrois G. Analyse generale des liaisons stochastiques. Étude particulière de l'analyse factorielle linéaire. — Rev. Inst. Internat. Statistique, 1953, v. 21, p. 2–8.
4. Ghurye S. G., Olkin I. A characterization of the multivariate normal distribution. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, p. 533–541.
5. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
6. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для компактных групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 901–906.

7. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 747–756.
8. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 603–607.
9. Feldman G. M., Graczyk P. On the Skitovich–Darmois theorem on compact Abelian groups. — J. Theoret. Probab., 2000, v. 13, № 3, p. 859–869.

Поступила в редакцию
11.VI.2002

© 2004 г.

ФРОЛОВ А. Н.*

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ¹⁾

Построена единая теория, описывающая п.н. (почти наверное) поведение приращений стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями. Эта теория включает в себя усиленный закон больших чисел, закон Эрдёша–Реньи, закон Шеппа, закон Чёргё–Ревеса и закон повторного логарифма. Область применимости результатов о поведении приращений расширена с нескольких частных случаев до всего класса стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями.

Ключевые слова и фразы: приращения процессов с независимыми приращениями, законы Эрдёша–Реньи и Шеппа, закон больших чисел, закон повторного логарифма.

1. Введение и основные результаты. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями, $\mu = E\xi(1)$, $0 \leq \mu < \infty$. Пусть $\xi(t)$ непрерывен справа и имеет пределы слева. Пусть a_T — неубывающая непрерывная функция такая, что T/a_T не убывает и $0 < a_T \leq T$. Обозначим

$$U_T = \sup_{0 \leq t \leq T - a_T} (\xi(t + a_T) - \xi(t)).$$

(Отметим, что $U_T = \xi(T)$ при $a_T = T$.)

В настоящей работе мы опишем класс нормирующих (неслучайных) функций b_T , для которых либо $\limsup(U_T/b_T) = 1$ п.н., либо последнее соотношение выполнено с заменой $\limsup$ на $\lim$, если это возможно. (Всюду, где использованы символы $\limsup$, $\liminf$, $\lim$, O , o , $\rightarrow$, считаем, что $T \rightarrow \infty$, если не оговорено противное.) Мы будем предполагать, что b_T положительна и не убывает. В дальнейшем мы не будем различать между собой нормировки, эквивалентные на бесконечности.

Поведение однородных процессов с независимыми приращениями во многом сходно с поведением сумм независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин. Поэтому мы сначала опишем результаты для приращений сумм. Первые подобные результаты были получены в работах Шеппа [1] и Эрдёша и Реньи [2], изучавших асимптотическое поведение $S_{n+a_n} - S_n$ и $\max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k)$ соответственно. Здесь S_k обозначает сумму первых k величин из последовательности н.о.р. случайных величин. В работе [2] и в статьях Ш. Чёргё [3], Девельса и Девроя [4] и Мейсона [5] было изучено поведение малых ($a_n = O(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$) приращений

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр., 28, Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов Е02-1.0-56 Минобразования РФ, 02-01-00779 РФФИ и НШ-2258.2003.1.