Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Фролов, Универсальные предельные теоремы для приращений процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 601–609

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:39:37

7. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 747–756.
8. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 603–607.
9. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich–Darmois theorem on compact Abelian groups. — J. Theoret. Probab., 2000, v. 13, № 3, p. 859–869.

Поступила в редакцию
11.VI.2002

© 2004 г.

ФРОЛОВ А. Н.*

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ¹⁾

Построена единая теория, описывающая п.н. (почти наверное) поведение приращений стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями. Эта теория включает в себя усиленный закон больших чисел, закон Эрдёша–Реньи, закон Шеппа, закон Чёргё–Ревеса и закон повторного логарифма. Область применимости результатов о поведении приращений расширена с нескольких частных случаев до всего класса стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями.

Ключевые слова и фразы: приращения процессов с независимыми приращениями, законы Эрдёша–Реньи и Шеппа, закон больших чисел, закон повторного логарифма.

1. Введение и основные результаты. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями, $\mu = E\xi(1)$, $0 \leq \mu < \infty$. Пусть $\xi(t)$ непрерывен справа и имеет пределы слева. Пусть a_T — неубывающая непрерывная функция такая, что T/a_T не убывает и $0 < a_T \leq T$. Обозначим

$$U_T = \sup_{0 \leq t \leq T - a_T} (\xi(t + a_T) - \xi(t)).$$

(Отметим, что $U_T = \xi(T)$ при $a_T = T$.)

В настоящей работе мы опишем класс нормирующих (неслучайных) функций b_T , для которых либо $\limsup(U_T/b_T) = 1$ п.н., либо последнее соотношение выполнено с заменой $\limsup$ на $\lim$, если это возможно. (Всюду, где использованы символы $\limsup$, $\liminf$, $\lim$, O , o , $\rightarrow$, считаем, что $T \rightarrow \infty$, если не оговорено противное.) Мы будем предполагать, что b_T положительна и не убывает. В дальнейшем мы не будем различать между собой нормировки, эквивалентные на бесконечности.

Поведение однородных процессов с независимыми приращениями во многом сходно с поведением сумм независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин. Поэтому мы сначала опишем результаты для приращений сумм. Первые подобные результаты были получены в работах Шеппа [1] и Эрдёша и Реньи [2], изучавших асимптотическое поведение $S_{n+a_n} - S_n$ и $\max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k)$ соответственно. Здесь S_k обозначает сумму первых k величин из последовательности н.о.р. случайных величин. В работе [2] и в статьях Ш. Чёргё [3], Девельса и Девроя [4] и Мейсона [5] было изучено поведение малых ($a_n = O(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$) приращений

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр., 28, Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов Е02-1.0-56 Минобразования РФ, 02-01-00779 РФФИ и НШ-2258.2003.1.

сумм. Случай больших $(a_n/\ln n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty)$ приращений был исследован М. Чёргё и Ревесом [6] для случайных величин с конечным вторым моментом. Оказалось, что в предельных теоремах о п.н. поведении малых приращений нормирующая последовательность существенно зависит от распределения слагаемых, а иногда даже однозначно определяет это распределение. Этот эффект был открыт Эрдёшем и Реньи [2]. Результаты для малых приращений называются законами Эрдёша–Реньи. Если речь идет о статистике $S_{n+a_n} - S_n$, говорят о законе Шеппа. В случае больших приращений нормирующая последовательность универсальна и совпадает с нормировкой для нормального распределения с теми же средним и дисперсией, что и у слагаемых. Далее эти результаты мы называем законами Чёргё–Ревеса. Отметим, что случаю $a_n = n$ соответствует известный закон повторного логарифма (ЗПЛ).

В работах автора [7]–[9] найдена формула универсальной нормирующей последовательности в предельных теоремах для приращений сумм. По этой формуле вычисляется нормирующая последовательность в усиленном законе больших чисел (УЗБЧ), законе Эрдёша–Реньи, законе Шеппа, законе Чёргё–Ревеса и ЗПЛ.

Асимптотическое поведение приращений однородных процессов с независимыми приращениями было исследовано лишь для некоторых важных частных случаев. М. Чёргё и Ревес [6] исследовали поведение приращений винеровского процесса. Результаты о поведении приращений пуассоновского процесса являются частным случаем соответствующих результатов для процессов восстановления и могут быть найдены в работах Девельса и Штайнебаха [10], Штайнебаха [11] и в статьях из библиографий этих работ. Асимптотика приращений устойчивых процессов со скачками одного знака была исследована Н. М. Зинченко [12].

В настоящей работе мы получим формулу универсальной нормирующей функции в предельных теоремах о п.н. поведении приращений однородных процессов с независимыми приращениями. Это позволяет охватить единой формулировкой УЗБЧ, закон Эрдёша–Реньи, закон Шеппа, закон Чёргё–Ревеса и ЗПЛ для этих процессов. Результаты для приращений винеровского и пуассоновского процессов являются следствиями наших теорем, а наши результаты для устойчивых процессов со скачками одного знака дополняют и усиливают результаты работы [12]. Кроме того, существенно расширяется класс процессов, к которым применимы соответствующие теоремы. Среди новых примеров — обобщенные пуассоновские процессы. Напомним, что обобщенный пуассоновский процесс — это сумма случайного числа н.о.р. случайных величин, где число слагаемых определяется пуассоновским процессом, независимым от слагаемых. Такие процессы возникают, например, в различных моделях страховой и финансовой математики, где они описывают процесс выплат по страховому портфелю. В наших примерах на слагаемые могут накладываться различные ограничения. В частности, распределения слагаемых могут принадлежать областям притяжения нормального закона и асимметричных устойчивых законов с показателем $\alpha \in (1, 2)$. Из приведенных примеров можно построить много новых, рассматривая, например, линейные комбинации независимых процессов, указанных выше.

Наряду с U_T мы будем рассматривать

$$W_T = \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} (\xi(t+s) - \xi(t)),$$

$$Q_T = \xi(T+a_T) - \xi(T), \quad R_T = \xi(T) - \xi(T-a_T).$$

Отметим, что $W_T = \sup_{0 \leq s \leq T} \xi(s)$, $R_T = \xi(T)$ при $a_T = T$.

Обозначим $h_0 = \sup\{h: \varphi_{\xi(1)}(h) = \mathbf{E}e^{h\xi(1)} < \infty\}$.

Если $h_0 > 0$, то положим

$$\zeta_{\xi(1)}(z) = \sup\{zh - \ln \varphi_{\xi(1)}(h): h \geq 0, \varphi_{\xi(1)}(h) < \infty\}, \quad (1)$$

$$\gamma_{\xi(1)}(x) = \sup\{z: \zeta_{\xi(1)}(z) \leq x\}, \quad (2)$$

$$\lambda_T(x) = \gamma_{\xi(1)}(x) \quad \text{для всех } T \geq 0.$$

Для краткости записи в этом случае обозначим $\zeta(z) = \zeta_{\xi(1)}(z)$, $\gamma(x) = \gamma_{\xi(1)}(x)$.

Функция $\zeta(z)$ хорошо известна из теории вероятностей больших отклонений (см., например, книгу А. А. Боровкова [13]). Она называется функцией отклонений и равна логарифму функции Чернова, взятому с обратным знаком.

Если $h_0 = 0$, то мы определим функции $\lambda_T(x)$ для последовательности усеченных $\xi(1)$ на возрастающих уровнях. Для этого возьмем непрерывную функцию u_T такую, что $u_T \nearrow \infty$, и для всех $T \geq 0$ обозначим

$$\xi_1(T) = \min\{\xi(1), u_T\}, \quad \eta(T) = \begin{cases} \xi_1(T) - \mathbf{E}\xi_1(T), & \text{если } \mu = 0, \\ \xi_1(T), & \text{если } \mu > 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_T(x) = \gamma_{\eta(T)}(x)$ для всех $T \geq 0$, где функция $\gamma_{\eta(T)}(x)$ определена по формулам (1), (2) с заменой $\xi(1)$ на $\eta(T)$.

Положим

$$b_T = a_T \lambda_T \left(\frac{\beta_T}{a_T} \right), \quad \text{где } \beta_T = \ln \frac{T}{a_T} + \ln \ln T.$$

Эта последняя формула, фактически, и есть основной результат этой работы. Ниже мы убедимся, что во всех упомянутых выше предельных теоремах нормирующая функция вычисляется по этой формуле.

Сформулируем теперь наши результаты.

Теорема 1. *Предположим, что b_T эквивалентна неубывающей функции и*

$$\limsup_{\theta \searrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{b_{\theta T}}{b_T} = 1. \quad (3)$$

Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $h_0 > 0$;

2) $a_T \rightarrow \infty$, $\sum_n \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_n\} < \infty$ и неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\xi([(1+\varepsilon) a_T]) \geq (1+\varepsilon) b_T\right\} \leq H_1 e^{-(1+\tau)\beta_T} + H_2 a_T \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_T\} \quad (4)$$

имеет место для всех положительных ε и τ , некоторых $H_1 = H_1(\varepsilon, \tau) > 0$ и $H_2 = H_2(\varepsilon, \tau) \geq 0$ и всех достаточно больших T (здесь и далее $[\cdot]$ обозначает целую часть числа в скобках).

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $q \in (0, 1)$ такое, что для всех $t \leq (1+\varepsilon) a_T$ неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \geq -\varepsilon b_T\} \geq q \quad (5)$$

выполнено при всех достаточно больших T .

Тогда

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} \leq 1 \quad \text{н.н.} \quad (6)$$

Теорема 2. *Пусть неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\xi(a_T) \geq (1-\varepsilon) b_T\right\} \geq H_3 e^{-(1-\tau)\beta_T} \quad (7)$$

выполнено для всех достаточно малых положительных ε и τ и всех достаточно больших T .

Если $a_T/T \rightarrow 1$, то предположим дополнительно, что выполнены условия (3) и (5).

Тогда

$$\limsup \frac{R_T}{b_T} \geq 1 \quad \text{н.н.} \quad (8)$$

В последнем соотношении R_T можно заменить на Q_T .

Проверку условий (5) и (7) облегчает следующее предложение.

Предложение 1. 1) Если $a_T > 1$ и $b_T \rightarrow \infty$, то неравенство (5) можно проверить только для $t = [(1+\varepsilon) a_T]$.

2) Если $b_T \rightarrow \infty$, то в неравенстве (7) можно заменить $\xi(a_T)$ на $\xi([a_T])$.

Теорема 3. *Предположим, что b_T эквивалентна неубывающей функции, $b_T \rightarrow \infty$ и выполнено условие (3). Пусть неравенство (7) выполнено для всех достаточно малых положительных ε и τ и всех достаточно больших T . Пусть $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$.*

Тогда

$$\liminf \frac{U_T}{b_T} \geq 1 \quad \text{н.н.}$$

Из теорем 1–3 и неравенств $R_T \leq U_T \leq W_T$ вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Если выполнены условия теорем 1 и 2, то

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} = \limsup \frac{U_T}{b_T} = \limsup \frac{R_T}{b_T} = \limsup \frac{Q_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (9)$$

Если выполнены условия теорем 1 и 3, то

$$\lim \frac{W_T}{b_T} = \lim \frac{U_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (10)$$

Теперь мы сформулируем ряд важных следствий из теоремы 4.

Мы начнем с тех важных частных случаев, где нормирующая функция может быть явно выписана для всего возможного диапазона изменения a_T . Это можно сделать для винеровского процесса и для устойчивых процессов без положительных скачков. В этом случае характеристическая функция $\xi(1)$ имеет вид

$$\psi(t) = \exp \left\{ i\mu t - c|t|^\alpha \left(1 + i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right\}, \quad (11)$$

где $c = \cos(\pi(2-\alpha)/2)/\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$. Постоянная c здесь выбрана так, чтобы при $\alpha = 2$ и $\mu = 0$ получалось стандартное нормальное распределение. Случай $\alpha = 2$ соответствует нормальному закону с параметрами μ и 1. Можно показать, что в рассматриваемом случае $h_0 = +\infty$ и $\varphi_{\xi(1)}(h) = \exp\{\mu h + h^\alpha/\alpha\}$ при всех $h \geq 0$, что в силу (1), (2) дает $\gamma(x) = \mu + (\alpha x/(\alpha-1))^{(\alpha-1)/\alpha}$, $x \geq 0$. С учетом этого, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 5. Пусть $\xi(1)$ имеет характеристическую функцию (11).

Тогда соотношения (9) выполнены с

$$b_T = \mu a_T + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{(\alpha-1)/\alpha} a_T^{1/\alpha} \left(\ln \frac{T}{a_T} + \ln \ln T \right)^{(\alpha-1)/\alpha}. \quad (12)$$

Если дополнительно или $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, или $a_T = T$ и $\mu > 0$, то выполнено (10).

Если $\alpha = 2$ и $\mu = 0$, то $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс и

$$b_T = \sqrt{2a_T \left(\ln \frac{T}{a_T} + \ln \ln T \right)}. \quad (13)$$

Теорема 5 получена в этом случае М. Чёртё и Ревесом [6]. В частности, при $a_T = T$ мы получаем ЗПЛ с $b_T = \sqrt{2T \ln \ln T}$. Если $\alpha < 2$ и $\mu = 0$, то $\xi(t)$ — устойчивый случайный процесс без положительных скачков. Для таких процессов соотношения (9) (для U_T и R_T) получены Н.М. Зинченко [12], а в остальной части (за исключением УЗБЧ) результаты новые.

УЗБЧ для винеровского процесса и для устойчивых процессов без положительных скачков ($\alpha \in (1, 2)$) получается из теоремы 5 при $a_T = T$ сначала для процессов с $\mu > 0$, а затем, как следствие, для процессов с произвольным μ . Общий случай мы рассмотрим ниже в теореме 12.

Часто простая формула для нормирующей функции не может быть выписана для всех a_T . Поэтому далее мы рассмотрим отдельно поведение малых и больших приращений.

Пусть сначала $a_T = c \ln T$, $c > 0$. Определим постоянную $c_0 \geq 0$ соотношением $1/c_0 = \sup\{\zeta(z): \zeta(z) < \infty\}$. Отметим, что для некоторых распределений $c_0 > 0$ (см. [4]).

Теорема 6 (УЗБЧ Эрдёша-Реньи). Если $h_0 > 0$ и $a_T = c \ln T$, $c > c_0$, то

$$\lim \frac{W_T}{a_T} = \lim \frac{U_T}{a_T} = \limsup \frac{R_T}{a_T} = \limsup \frac{Q_T}{a_T} = \gamma(1/c) \quad \text{п.н.}$$

Пусть теперь $a_T = o(\ln T)$.

Теорема 7. Пусть $h_0 > 0$, $a_T = o(\ln T)$. Если выполнены условия теорем 1 и 2, то соотношения (9) выполнены с $b_T = a_T \gamma(\ln T/a_T)$. Если выполнены условия теорем 1 и 3, то выполнено (10).

Здесь мы сформулировали законы Эрлёша-Реньи и Шеппа для процессов с независимыми приращениями только для $c > c_0$. В работах [1]–[4] для сумм н.о.р. случайных величин были получены аналогичные результаты для всех $c > 0$, а в работе Мейсона [5] был изучен случай $a_T = o(\ln T)$. (Для пуассоновского процесса соответствующие результаты можно найти в [11]. Для винеровского процесса и устойчивых процессов — см. теорему 5.) Однако условия в случаях $c \leq c_0$ и $a_T = o(\ln T)$ зависят от типов распределений слагаемых. Поэтому подробное описание этих случаев будет сделано в другой работе. За исключением результатов, вытекающих из теоремы 5, результаты теорем 6 и 7 новые.

Пусть теперь $a_T/\ln T \rightarrow \infty$. Поведение больших приращений зависит от моментных условий на правый хвост распределения $\xi(1)$. Для того чтобы эти условия сформулировать, нам понадобятся два класса функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}_p$ из работы автора [9]. Обозначим

$$\mathcal{E} = \left\{ H(x): H(x) \nearrow, \frac{H(x)}{x} \searrow, \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{H(cx)}{H(x)} > 1 \text{ для некоторого } c > 1 \right\}.$$

Отметим, что если $H(x) \in \mathcal{E}$, то $\ln x = o(H(x))$ при $x \rightarrow \infty$ и $(H^{-1}(x))^2/x$ не убывает. (Здесь и далее $H^{-1}(x)$ обозначает обратную функцию.) Пусть

$$\mathcal{M}_p = \left\{ H(x): H(x) \nearrow, \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(cx)}{H(x)} < \infty \text{ для всех } c > 0, \right. \\ \left. \frac{H(x)}{x^p} \text{ не убывает и } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln H(x)}{\ln x} = p \text{ для некоторого } p > 0 \right\}.$$

Например, $H(x) = x^p$ принадлежит классу $\mathcal{E}$ при $p \in (0, 1)$ и классу $\mathcal{M}_p$ при $p > 0$. Другие примеры можно получить умножением x^p на медленно меняющуюся функцию.

Ясно, что результаты о поведении больших приращений для центрированных ($\mu = 0$) процессов и для нецентрированных процессов должны сильно отличаться. Так, например, при $a_T = T$ для центрированных процессов мы должны получить результат типа ЗПЛ, а для нецентрированных процессов — УЗБЧ. Далее мы рассматриваем эти случаи отдельно.

Рассмотрим сначала центрированные процессы. Обозначим $\xi^+(1) = \max\{\xi(1), 0\}$.

Теорема 8. Пусть $\mu = 0$, $E\xi^2(1) = 1$.

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

- 1) $h_0 > 0$ и $a_T/\ln T \rightarrow \infty$;
- 2) $E \exp\{H(\xi^+(1))\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $a_T \geq C(H^{-1}(\ln T))^2/\ln T$, где $C = C(H)$ — абсолютная положительная постоянная;
- 3) $EH(\xi^+(1)) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > 2$, $a_T \geq C(H^{-1}(T))^2/\ln T$, где C — произвольная положительная постоянная.

Тогда (9) выполнено с b_T из (13).

Если, кроме того, $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, то выполнено (10).

Перейдем к случаю $E\xi^2(1) = \infty$. Положим $F(x) = \mathbf{P}\{\xi(1) < x\}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $F \in DN(\alpha)$ ($F \in D(\alpha)$), $\alpha \in (1, 2]$, если F принадлежит области нормального (соответственно ненормального) притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (11). В случае нормального притяжения мы считаем, что нормирующие постоянные имеют вид $n^{1/\alpha}$. В противном случае нужно соответствующим образом отнормировать $\xi(1)$.

Ясно, что в условиях теоремы 8 $F \in DN(2)$. Опишем здесь важный класс процессов, для которых $F \in D(\alpha)$.

Пусть $\{X_k\}$ — последовательность н.о.р. случайных величин, $\nu(t)$ — независимый от X 'ов пуассоновский процесс. Положим $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} X_k$, $\xi(0) = 0$. Покажем, что $F \in D(\alpha)$, если $\mathbf{P}\{X_1 < x\} \in D(\alpha)$. Действительно, характеристическая функция $\xi(1)$ равна $\exp\{(h(t) - 1)E\nu(1)\}$, где $h(t)$ — характеристическая функция X_1 . Остается воспользоваться теоремой 2.6.5 книги И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [14, с. 103].

Далее, если $g(x)$ — правильно меняющаяся функция, то $g^{-1}(x)$ — асимптотически обратная к ней функция, т.е. $g^{-1}(g(x)) \sim g(g^{-1}(x)) \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Теорема 9. Пусть $\mu = 0$, $F \in D(2)$. Пусть выполнено одно из условий 1)–3) теоремы 8.

Тогда (9) выполнено с $b_T = a_T m(f^{-1}(\beta_T/a_T))$, где $m(h) = hG(1/h)$, $f(h) = h^2 G(1/h)/2$, $G(x) = \int_{-x}^0 u^2 dF(u)$, $x > 0$ ($G(x)$ — медленно меняющаяся функция).

Если, кроме того, $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, то выполнено (10).

Перейдем к случаю $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 10. Пусть $\mu = 0$ и $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$.

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

- 1) $h_0 > 0$ и $a_T/\ln T \rightarrow \infty$;
- 2) $E \exp\{H(\xi^+(1))\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $a_T \geq C(H^{-1}(\ln T))^\alpha/(\ln T)^{\alpha-1}$, где $C = C(H)$ — абсолютная положительная постоянная;
- 3) $EH(\xi^+(1)) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, $a_T \geq C(H^{-1}(T))^\alpha/(\ln T)^{\alpha-1}$, где C — произвольная положительная постоянная.

Тогда (9) выполнено с b_T из (12).

Если, кроме того, $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, то выполнено (10).

Теорема 11. Пусть $\mu = 0$, $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$. Положим $b_T = a_T m(f^{-1}(\beta_T/a_T))$, где $m(h) = h^{\alpha-1} G(1/h) \alpha \Gamma(2-\alpha)/(\alpha-1)$, $f(h) = \Gamma(2-\alpha) h^\alpha G(1/h)$, $G(x) = x^\alpha F(-x)$, $x > 0$. ($G(x)$ — медленно меняющаяся функция.)

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

- 1) $h_0 > 0$ и $a_T/\ln T \rightarrow \infty$;
- 2) $E \exp\{H(\xi^+(1))\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $b_T \geq C H^{-1}(\ln T)$, где $C = C(H)$ — абсолютная положительная постоянная;
- 3) $EH(\xi^+(1)) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, $b_T \geq C H^{-1}(T)$, где C — произвольная положительная постоянная.

Тогда выполнено (9).

Если, кроме того, $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, то выполнено (10).

Результаты теорем 8–11 новые. Для н.о.р. случайных величин результаты, аналогичные теоремам 8–11, получены автором [9].

При $a_T = T$ из теорем 8–11 вытекает ЗПД для процессов с независимыми приращениями.

В заключение рассмотрим случай $\mu > 0$.

Теорема 12. Пусть выполнены условия одной из теорем 8–11 и $\mu > 0$. Тогда (9) выполнено с $b_T = \mu a_T$.

Если, кроме того, $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$ или $a_T = T$, то выполнено (10).

Из теоремы 12 при $a_T = T$ следует УЗБЧ для процессов с $\mu > 0$. Применяя этот результат к процессу $\xi(t) - \mu t + t$, получим УЗБЧ и в случае $\mu \leq 0$.

2. Доказательства. Мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями, $r, c \geq 0$, $q > 0$. Если $P\{\xi(t) \geq -c\} \geq q$ для всех $t \leq T$, то

$$P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} (\xi(t) - \xi(s)) \geq r\right\} \leq q^{-2} P\{\xi(T) \geq r - c\}.$$

Лемма 1 следует из аналогичного результата для сумм н.о.р. случайных величин и сепарабельности процесса $\xi(t)$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что выполнено условие 2). Возьмем $\varepsilon > 0$. Положим $u_T = \varepsilon a_T - \{(1 + \varepsilon) a_T\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа в скобках. По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} P_T &= P\{W_T \geq (1 + 2\varepsilon) b_T\} \\ &\leq P\left\{\bigcup_{j=1}^{\lfloor T/u_T \rfloor} \left\{\sup_{(j-1)u_T \leq t \leq ju_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} (\xi(t+s) - \xi(t)) \geq (1 + 2\varepsilon) b_T\right\}\right\} \\ &\leq \frac{T}{u_T} P\left\{\sup_{0 \leq t \leq u_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} (\xi(t+s) - \xi(t)) \geq (1 + 2\varepsilon) b_T\right\} \\ &\leq \frac{T}{q^2 u_T} P\left\{\xi([(1 + \varepsilon) a_T]) \geq (1 + \varepsilon) b_T\right\} \end{aligned} \quad (14)$$

для всех достаточно больших T . В силу условия 2)

$$\begin{aligned} P_T &\leq \frac{T}{q^2 u_T} \left(H_1 \exp\{-(1+\tau)\beta_T\} + H_2 a_T \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_T\} \right) \\ &\leq C_1 (\ln T)^{-(1+\tau)} + C_2 T \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_T\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T .

Пусть $\theta > 1$. Положим

$$n_k = \min \left\{ n: \theta^{k-1} < n \leq \theta^k, n \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_n\} = \min_{\theta^{k-1} < m \leq \theta^k} m \mathbf{P}\{\xi(1) \geq b_m\} \right\},$$

$k = 1, 2, \dots$. Тогда ряд $\sum_k P_{n_k}$ сходится (см. [9, с. 350]). По лемме Бореля–Кантелли $\limsup_{k \rightarrow \infty} W_{n_k}/b_{n_k} \leq 1 + 2\varepsilon$ п.н. Отсюда, из (3) и того факта, что W_T не убывает, следует (6).

Пусть теперь $h_0 > 0$. Положим $\varphi_{\xi(t)}(h) = \mathbf{E} \exp\{h\xi(t)\}$. Используя представление характеристической функции $\xi(t)$ (см., например, книгу И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [15, с. 417]) и ее аналитичность в полосе $0 > \operatorname{Im} z > -h_0$, нетрудно показать, что $\varphi_{\xi(t)}(h) = (\varphi_{\xi(1)}(h))^t$. Определим функции $\zeta_{\xi(t)}(z)$ и $\gamma_{\xi(t)}(x)$ по формулам (1), (2) с заменой $\xi(1)$ на $\xi(t)$. Тогда $\zeta_{\xi(t)}(z) = t\zeta(z/t)$ и $\gamma_{\xi(t)}(x) = t\gamma(x/t)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Положим $u_T = \varepsilon a_T$. Действуя так же, как при доказательстве (14), получим

$$P_T \leq \frac{T}{q^2 u_T} \mathbf{P}\left\{ \xi((1+\varepsilon)a_T) \geq (1+\varepsilon)b_T \right\}$$

для всех достаточно больших T . По неравенству Чебышева

$$\begin{aligned} P_T &\leq \frac{T}{q^2 u_T} \exp\left\{ -\zeta_{\xi((1+\varepsilon)a_T)}((1+\varepsilon)b_T) \right\} \\ &= \frac{T}{q^2 u_T} \exp\left\{ -(1+\varepsilon)a_T \zeta\left(\frac{b_T}{a_T}\right) \right\} = \frac{T}{q^2 u_T} \exp\{-(1+\varepsilon)\beta_T\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T . Далее доказательство не отличается от доказательства в случае 2).

Доказательство теоремы 2. Возьмем $\varepsilon \in (0, 1)$. В силу (7)

$$P_T = \mathbf{P}\{R_T \geq (1-\varepsilon)b_T\} = \mathbf{P}\{\xi(a_T) \geq (1-\varepsilon)b_T\} \geq H_3 \exp\{-(1-\tau)\beta_T\}$$

для всех достаточно больших T .

Пусть $a_T/T \rightarrow \rho \in [0, 1)$. Положим $n_1 = 1$, $n_{k+1} = \min\{n: n > n_k, n - a_n \geq n_k\}$. Так же, как в [7, с. 164], докажем, что ряд $\sum_k P_{n_k}$ расходится. Так как события $\{R_{n_k} \geq (1-\varepsilon)b_{n_k}\}$ независимы, то по лемме Бореля–Кантелли мы получаем (8).

Пусть теперь $a_T/T \rightarrow 1$. Возьмем $\theta > 1$ и положим $n_k = [\theta^k]$, $A_k = \{\xi(n_k) - \xi(n_{k-1}) \geq (1-2\varepsilon)b_{n_k}\}$, $D_k = \{\xi(n_{k-1}) - \xi(n_k - a_{n_k}) \geq -\varepsilon b_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$. Отметим, что $a_{n_k} \sim (n_k - n_{k-1})\theta/(\theta-1)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (5) следует, что $\mathbf{P}(D_k) \geq q$ при всех достаточно больших k .

Следующие пары событий независимы: A_k и D_k , A_k и $D_k \overline{A_{k-1} D_{k-1}}$, A_k и $D_k \overline{A_{k-1} D_{k-1} A_{k-2} D_{k-2}} \dots$.

Выберем T_k так, чтобы $a_{T_k} = n_k - n_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $T_k \sim a_{T_k} \sim n_k(\theta-1)/\theta$ при $k \rightarrow \infty$. Если θ было выбрано достаточно большим, то $(\theta-1)/\theta$ близко к 1 и в силу (3) для любого $\rho > 0$ неравенство $b_{n_k} \leq (1+\rho)b_{T_k}$ выполнено для всех достаточно больших k . Возьмем ρ таким, чтобы $(1-2\varepsilon)(1+\rho) = 1-\varepsilon$. Тогда, принимая во внимание (7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k) &\geq \mathbf{P}\{\xi(n_k - n_{k-1}) \geq (1-2\varepsilon)b_{n_k}\} \geq \mathbf{P}\{\xi(a_{T_k}) \geq (1-\varepsilon)b_{T_k}\} \\ &\geq H_3 \exp\{-(1-\tau)\beta_{T_k}\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших k . Отсюда следует, что ряд $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ расходится.

По лемме 5 на с. 267 книги В. В. Петрова [16], $\mathbf{P}(A_k D_k \text{ б.ч.}) \geq q > 0$. Следовательно, $\mathbf{P}\{R_{n_k} \geq (1-3\varepsilon)b_{n_k} \text{ б.ч.}\} > 0$. В силу закона «нуля или единицы» Колмогорова последняя вероятность равна 1, и теорема 2 доказана для R_T . Для Q_T теорема доказывается аналогично.

Доказательство предложения 1. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q \in (0, 1)$ такое, что неравенство (5) выполнено при $t = [(1 + \varepsilon) a_T]$ для всех $T \geq T_0$.

Так как $m_T = \min_{0 \leq k \leq [(1 + \varepsilon) a_{T_0}]} \mathbf{P}\{\xi(k) \geq -\varepsilon b_T\} \rightarrow 1$, то $m_T \geq q$ для всех $T \geq T_1 \geq T_0$.

Пусть $T \geq T_1$. Если $[(1 + \varepsilon) a_{T_0}] \leq k \leq [(1 + \varepsilon) a_T]$, то $k = [(1 + \varepsilon) a_s]$ для некоторого $s \in [T_1, T]$. Так как b_T не убывает, то $\mathbf{P}\{\xi(k) \geq -\varepsilon b_T\} \geq \mathbf{P}\{\xi(k) \geq -\varepsilon b_s\} \geq q$.

Таким образом, (5) выполнено для $t = k = 1, 2, \dots, [(1 + \varepsilon) a_T]$. Пусть теперь $k \leq t \leq k + 1 \leq [(1 + \varepsilon) a_T] + 1$. Используя независимость приращений, однородность процесса и тот факт, что $b_T \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi(t) \geq -2\varepsilon b_T\} &\geq \mathbf{P}\{\xi(k) \geq -\varepsilon b_T\} \mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(k) \geq -\varepsilon b_T\} \\ &\geq q \mathbf{P}\{\xi(t - k) \geq -\varepsilon b_T\} \geq q \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq 1} \xi(s) \geq -\varepsilon b_T\right\} \geq 0.5q \end{aligned}$$

при всех $T \geq T_2 \geq T_1$. Первое утверждение доказано.

Докажем теперь 2). Используя независимость приращений, однородность процесса и $b_T \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi(a_T) \geq (1 - 2\varepsilon) b_T\} &\geq \mathbf{P}\{\xi([a_T]) \geq (1 - \varepsilon) b_T\} \mathbf{P}\{\xi(a_T) - \xi([a_T]) \geq -\varepsilon b_T\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\xi([a_T]) \geq (1 - \varepsilon) b_T\} \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq 1} \xi(s) \geq -\varepsilon b_T\right\} \geq 0.5 \mathbf{P}\{\xi([a_T]) \geq (1 - \varepsilon) b_T\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T .

Доказательство теоремы 3. Пусть $j \leq T < j + 1$, где $j \geq 2$ и $j/a_j > 1$. Положим $n_j = [j/a_j] - 1$, $I_k = \inf_{a_j \leq s \leq a_{j+1}} (\xi(ka_j + s) - \xi(ka_j))$, $k \in K$, где $K = \{0, 2, \dots, 2[n_j/2]\}$. Ясно, что

$$U_T \geq \max_{k \in K} I_k = M_j.$$

Так как $a_j/j \geq a_{j+1}/(j + 1)$, то $0 \leq a_{j+1} - a_j \leq a_j/j \leq 1$ и $ka_j + a_{j+1} \leq (k + 1 + 1/j) a_j < (k + 2) a_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} p_j &= \mathbf{P}\{M_j \leq (1 - 2\varepsilon) b_j\} = (\mathbf{P}\{I_0 \leq (1 - 2\varepsilon) b_j\})^{[n_j/2] + 1} \\ &\leq \exp \left\{ - \left(\left[\frac{n_j}{2} \right] + 1 \right) \mathbf{P}\{I_0 \geq (1 - 2\varepsilon) b_j\} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали независимость приращений и однородность $\xi(t)$. Снова используя эти свойства, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{I_0 \geq (1 - 2\varepsilon) b_j\} &\geq \mathbf{P}\{\xi(a_j) \geq (1 - \varepsilon) b_j\} \mathbf{P}\left\{\inf_{a_j \leq s \leq a_{j+1}} (\xi(s) - \xi(a_j)) \geq -\varepsilon b_j\right\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi(a_j) \geq (1 - \varepsilon) b_j\} \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq a_{j+1} - a_j} \xi(s) \geq -\varepsilon b_j\right\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\xi(a_j) \geq (1 - \varepsilon) b_j\} \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq 1} \xi(s) \geq -\varepsilon b_j\right\} \geq 0.5 \mathbf{P}\{\xi(a_j) \geq (1 - \varepsilon) b_j\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших j . Принимая во внимание (7), получим

$$p_j \leq \exp \left\{ -0.5 H_3 \left(\left[\frac{n_j}{2} \right] + 1 \right) \exp\{-(1 - \tau) \beta_j\} \right\}$$

для всех достаточно больших j . Так как $\ln \ln T = o(\ln(T/a_T))$, то ряд $\sum_j p_j$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли с вероятностью 1 неравенство $M_j > (1 - 2\varepsilon) b_j$ выполнено для всех достаточно больших j . Учитывая, что $b_{j+1} \sim b_j$ при $j \rightarrow \infty$, заключаем, что с вероятностью 1 неравенство $U_T > (1 - 2\varepsilon) b_T$ выполнено для всех достаточно больших T . Теорема 3 доказана.

Теоремы 5 и 6 являются следствиями теоремы 4 и формулы для b_T . Условие (3) легко проверяется. Условие (5) для устойчивых законов, очевидно, выполнено. В теореме 6 условие (5) вытекает из предложения 1 и слабого закона больших чисел для н.о.р. случайных величин. Неравенство (7) проверяется с помощью замечания 2 и леммы 6 из [9].

Теорема 7 следует из теоремы 4, формулы для b_T и выпуклости вверх функции $\gamma(x)$.

Доказательство теорем 8–11 сводится к выбору усечения y_T (если $h_0 = 0$), вычислению b_T и проверке соответствующих условий для найденной нормировки. Вычисления в этом случае ничем не отличаются от вычислений для н.о.р. случайных величин, подробно проделанных в работе автора [9]. Здесь мы опускаем детали.

Доказательство теоремы 12. В условиях теоремы (см. [9, раздел IV, с. 345]) $b_n \sim \mu a_n$ при $n \rightarrow \infty$. Если $n \leq T < n+1$, то

$$b_n \leq b_T \leq (1 + \varepsilon) \mu a_{n+1} \leq (1 + \varepsilon) \mu \frac{a_T}{T} (n + 1)$$

для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n . Отсюда с помощью теоремы 4 получаем все, кроме УЗБЧ, соответствующего случаю $a_T = T$ для всех T .

Пусть теперь $a_T = T$. Тогда (см. [9, раздел IV, с. 345]) $\xi(n)/n \rightarrow \mu$ п.н. Применяя далее те же аргументы, что и в книге И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [15, с. 493–494], получим УЗБЧ для $\xi(t)$.

При доказательстве последней теоремы можно, конечно, сослаться и на УЗБЧ Колмогорова для н.о.р. случайных величин. Мы упомянули работу [9], чтобы подчеркнуть, что и в случае н.о.р. случайных величин УЗБЧ является следствием универсальных теорем. Это означает, что при доказательстве теоремы 12 не были использованы результаты, не являющиеся следствиями универсальных теорем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L. A. A limit law concerning moving averages. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 424–428.
2. Erdős P., Rényi A. On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., 1970, v. 23, p. 103–111.
3. Csörgő S. Erdős–Rényi laws. — Ann. Statist., 1979, v. 7, № 4, p. 772–787.
4. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1386.
5. Mason D. M. An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 1, p. 257–265.
6. Csörgő M., Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York–London: Academic Press, 1981, 284 p.
7. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. — Statist. Probab. Lett., 1998, v. 37, № 2, p. 155–165.
8. Фролов А. Н. Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин. — Докл. РАН, 2000, т. 372, № 5, с. 596–599.
9. Frolov A. N. One-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables. — Studia Sci. Math. Hungar., 2002, v. 39, № 3–4, p. 333–359.
10. Deheuvels P., Steinebach J. Sharp rates for increments of renewal processes. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 2, p. 700–722.
11. Steinebach J. Strong laws for small increments of renewal processes. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 4, p. 1768–1776.
12. Зинченко Н. М. Асимптотика приращений устойчивых случайных процессов со скачками одного знака. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 793–796.
13. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с.
14. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
15. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2. М.: Наука, 1973, 640 с.
16. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.