Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Информация о третьей Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 3, 621–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:33:23

25 февраля — В. Н. Колокольцов (Москва, Ноттингем). *Динамические законы больших чисел для систем взаимодействующих частиц.*

3 марта — Д. А. Коршунов (Новосибирск). *Вероятности больших отклонений эргодических одномерных цепей Маркова в крамеровском случае.*

10 марта — Г. И. Олшанский (Москва). *Точечные процессы и случайные разбиения.*

17 марта — С. Б. Шлосман (Москва). *Как растет кристалл Изинга?*

24 марта — С. В. Пастухов (Москва). *О некоторых вероятностно-статистических методах в технико-экономическом анализе финансовой математики.*

31 марта — Е. А. Жижина (Москва). *Спектральный анализ стохастических динамик.*

7 апреля — В. В. Вьюгин (Москва). *Вероятность: классическая и конструктивная.*

14 апреля — А. С. Холево (Москва). *О квантовой теории информации.*

21 апреля — заседание, посвященное памяти Игоря Владимировича Гирсанова.

28 апреля — подведение итогов третьей Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей.

12 мая — Д. Н. Карымов (Москва). *Об асимптотических разложениях для решетчатых распределений.*

26 мая — 16:20 — Y. Fujikoshi (Hiroshima, Japan). *Error Bounds for Edgeworth and Cornish-Fisher Expansions of MANOVA Test Statistics.*

26 мая, 18:00 — С. А. Молчанов (Северная Каролина, США). *Спектральные бифуркации для случайных графов.*

Координатор семинара в осеннем семестре 2003 года
профессор В. В. Сенатов.

Координатор семинара в весеннем семестре 2004 года
доцент С. А. Пирогов.

Ученый секретарь семинара
А. В. Селиванов.

ИНФОРМАЦИЯ О ТРЕТЬЕЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова при поддержке Франко-русского института им. А. М. Ляпунова провела третью Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. (Первая и вторая подобные олимпиады проводились в октябре 2001 г. и в апреле 2003 г.; см. Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 823–824; 2003, т. 48, в. 2, с. 428–430. Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: <http://mech.math.msu.su/probab.>)

Олимпиада была проведена 24 апреля 2004 г. раздельно для II и III–V курсов (продолжительность — 4 часа). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 53 студента II курса и 40 студентов III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК Московского государственного университета, а также физико-технического факультета Киевского политехнического института, механико-математического факультета Киевского национального университета, факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета и Института естественных наук и экологии г. Москвы.

Задачи олимпиады

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов II курса и, наконец, число студентов III–V курсов, решивших эту задачу.

Задача 1. (II–V; 49, 39) Пусть A и B — события такие, что $0 < P(A) < 1$ и $P\{B \mid A\} = P\{B \mid A^c\}$ (A^c обозначает дополнение к A). Верно ли, что A и B независимы?

Задача 2. а) (II–V; 31, 30) На некотором вероятностном пространстве заданы случайные величины X , Y , Z , причем Y стохастически мажорирует X , т.е. $P\{X \leq x\} \geq P\{Y \leq x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Следует ли отсюда, что $Y + Z$ стохастически мажорирует $X + Z$?

б) (II–V; 6, 23) Верно ли предыдущее утверждение при дополнительном предположении, что X и Z независимы, а также Y и Z независимы?

Задача 3. (II–V; 33, 26) Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом, так что все $100!$ вариантов раскладки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересест пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересест пассажира, занявшего его место (если оно занято), и. т.д. Найти математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в их число).

Задача 4. (II–V; 14, 16) Имеются 2 игральных кубика с гранями, помеченными числами $1, \dots, 6$. Можно ли приписать граням каждого из кубиков вероятности выпадения (свой для каждого кубика) так, что при их одновременном бросании сумма выпавших чисел имеет равномерное распределение на множестве $\{2, \dots, 12\}$?

Задача 5. (II; 0) Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем $E|X + Y| < \infty$. Верно ли, что $E|X| < \infty$?

Задача 6. (III–V; 0) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Дано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} X_n < \infty$ п.н. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} S_n < \infty$ п.н.?

Задача 7. (II–V; 14, 19) На окружности выбрано борелевское множество A такое, что $\mu(A) = \frac{2}{3}$, где μ — равномерная вероятностная мера на окружности (т.е. нормированная лебегова мера). Точки множества A закрашены красным цветом, а точки его дополнения — синим. Доказать, что в окружность можно вписать квадрат, у которого по меньшей мере 3 вершины красные.

Задача 8. (II–V; 0, 1) Пусть $X_1, X_2, \dots$ и $Y_1, Y_2, \dots$ — две последовательности случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Дано, что случайные величины X_n и Y_n независимы при каждом $n \in \mathbf{N}$ и последовательность $X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots$ сходится по вероятности к нулю. Доказать, что существуют числа $a_1, a_2, \dots \in \mathbf{R}$ такие, что последовательность $X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots$ сходится по вероятности к нулю.

Задача 9. (III–V; 3) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, сходящаяся почти наверное к нулю, причем $|X_n| \leq 1$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ — под- σ -алгебры $\mathcal{F}$. Верно ли, что последовательность $\mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_1), \mathbf{E}(X_2 \mid \mathcal{G}_2), \dots$ сходится почти наверное к нулю?

Задача 10. (II–V; 0, 0) На борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}$ единичной окружности задана некоторая вероятностная мера μ . Пусть X, Y — независимые случайные точки на окружности, имеющие распределение μ (т.е. $P\{X \in A, Y \in B\} = \mu(A)\mu(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{B}$). Обозначим через α величину угла между точками X и Y (так что α принимает значения в отрезке $[0, \pi]$). Доказать, что $P\{\alpha \leq 2\pi/3\} \geq \frac{1}{2}$.

Победители олимпиады

Разбор задач, вручение призов всем участникам, а также награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 28 апреля 2004 г.

Победители среди студентов II курсов***Первая премия***

Малыгин Юрий Вячеславович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (5.5 решенных задач).

Вторая премия

Гильмутдинов Эдуард Икрамович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (5 решенных задач).

Москвин Андрей Юрьевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (5 решенных задач).

Третья премия

Шкляев Александр Викторович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4.5 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов***Первая премия***

Гаас Валерий Владимирович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — А. М. Зубков (6.5 решенных задач).

Вторая премия

Ендовицкий Павел Александрович — студент III курса физико-технического факультета Киевского политехнического института, научный руководитель — А. А. Дороговцев (6 решенных задач).

Клепиков Константин Викторович — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — Ю. Н. Тюрин (6 решенных задач).

Кузнецов Андрей Юрьевич — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — Г. И. Фалин (6 решенных задач).

Спиридонов Сергей Викторович — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — Г. А. Чечкин (6 решенных задач).

28 апреля 2004 г.

Оргкомитет третьей

*Колмогоровской студенческой олимпиады
по теории вероятностей:*

чл.-корр. РАН профессор А. Н. Ширяев,

аспиранты С. В. Дильман, И. Н. Медведев,

А. С. Мищенко, А. В. Селиванов,

к.ф.-м.н. М. А. Урусов, к.ф.-м.н. А. С. Черный.