Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пашко, Равномерная сходимость субгауссов-
ских интегралов, *Теория вероятн. и ее примен.*,
1998, том 43, выпуск 4, 793–798

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2169>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:17:44

© 1998 г.

ПАШКО А. А.*

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ СУБГАУССОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В статье изучаются условия и оценки скорости равномерной сходимости по вероятности строго субгауссовских интегралов вида

$$S_a^b(t) = \int_a^b T(t, \lambda) d\xi(\lambda).$$

Полученные оценки совпадают по порядку с аналогичными для гауссовских процессов.

Ключевые слова и фразы: стохастический интеграл, субгауссовский процесс, равномерная сходимость, оценка сходимости, условие сходимости.

Многие случайные процессы допускают представление в виде стохастических интегралов в среднем квадратическом $X(t) = (\text{ср. кв.}) \int_a^b T(t, \lambda) d\xi(\lambda)$. Такие интегралы не обладают свойствами, которые имеют место для обычных интегралов, например, формула интегрирования по частям. В работе изучаются интегралы, при некоторых предположениях стохастически эквивалентные интегралам $X(t)$, но обладающие свойствами, которыми $X(t)$, вообще говоря, не обладают.

Определим интеграл следующим образом:

$$\int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda) = \gamma(\lambda) \xi(\lambda) \Big|_a^b - \int_a^b \xi(\lambda) d\gamma(\lambda), \quad (1)$$

где $\gamma(\lambda)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, $\xi(\lambda)$ — случайный процесс на $[a, b]$, $\int_a^b \xi(\lambda) d\gamma(\lambda)$ — интеграл Лебега по обобщенной мере, порожденной функцией $\gamma(\lambda)$.

Будем считать, что случайный процесс $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathcal{J}_a^b$, если почти все траектории $\xi(t)$ измеримы на $[a, b]$ и $\int_a^b \mathbb{E}|\xi(t)| d\gamma(\lambda) < \infty$.

По теореме Фубини почти для всех траекторий определен интеграл Лебега $\int_a^b \xi(\lambda) d\gamma(\lambda)$. Следовательно, для процессов из $\mathcal{J}_a^b$ с вероятностью 1 определен интеграл (1). Более подробно свойства таких интегралов изучались в работе [1]. Там же доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\xi(t)$ — измеримый процесс второго порядка на $[a, b]$, $\mathbb{E}\xi(t) = 0$, $\mathbb{E}\xi(t)\xi(s) = r(t, s)$, $|r(t, s)| < D < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует интеграл $\int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$.

Если существует интеграл в среднем квадратическом (ср. кв.) $\int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$ и интеграл Римана–Стилтьеса $\int_a^b \int_a^b r(t, s) d\gamma(t) d\gamma(s)$, то с вероятностью 1 $\int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda) = (\text{ср. кв.}) \int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$.

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$ определим как предел по вероятности, если он существует: $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\xi(\lambda) = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$.

*Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.

Утверждение 2. Если для любых a, b ($a < b$) справедливо предположение утверждения 1 и существует интеграл (ср. кв.) $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$ в среднем квадратическом, то с вероятностью 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\xi(\lambda) = (\text{ср. кв.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\xi(\lambda)$.

В дальнейшем под случайным процессом $\xi(t)$ будем подразумевать строго субгауссовский случайный процесс из класса $\mathcal{S}_a^b$.

О п р е д е л е н и е 1. Случайный процесс $\xi(t)$ называется строго субгауссовским, если $E\xi(t) = 0$ и для любого n и любых $\{t_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$ выполняется неравенство

$$E \exp \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \xi(t_i) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} E \left(\sum_{i=1}^n b_i \xi(t_i) \right)^2 \right\}.$$

Пусть $\mu(\cdot)$ — σ -конечная мера на $\mathbf{R}^1$, $C(\mathbf{R}^1)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbf{R}^1$ с нормой $\|f(t)\|_C = \sup_{t \in \mathbf{R}^1} |f(t)|$; функция $c(t)$ — такая, что $c(t) \in C(\mathbf{R}^1)$ и $|c(t)| < 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)| d\mu(t) < \infty, \quad |c(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

функция $v(x, y)$ — такая, что $v(x, y_1) \leq v(x, y_2)$, если $y_1 \leq y_2$, $v(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $T(t, \lambda)$, $t, \lambda \in \mathbf{R}^1$, принадлежит классу $B = B(\xi, c, v, \mu)$, если

а) $T(t, \lambda)$ непрерывна по $t, \lambda \in \mathbf{R}^1$ и имеет ограниченную вариацию по $\lambda \in \mathbf{R}^1$;

б) для всех a, b ($a < b$) и любой непрерывной функции ограниченной вариации $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in [a, b]$, почти для всех траекторий существуют интегралы $\int_a^b \gamma(\lambda) T(t, \lambda) d\xi(\lambda)$, принадлежащие $C(\mathbf{R}^1)$;

с) для $\theta \in (0, 1)$ существует отрезок $I(\theta, \omega)$, длина которого не превосходит $\nu^{(-1)}(d, \theta)$, где $\nu^{(-1)}(d, \theta)$ — функция, обратная к $v(x, y)$ при фиксированном $d = \max(|a|, |b|)$, и на котором с вероятностью 1 имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \gamma(\lambda) T(t, \lambda) d\xi(\lambda) \right| > (1 - \theta) \left\| c(t) \int_a^b \gamma(\lambda) T(t, \lambda) d\xi(\lambda) \right\|_C.$$

Классу $B = B(\xi, c, v, \mu)$ принадлежат последовательности тригонометрических полиномов, функции экспоненциального типа, ограниченные на $\mathbf{R}^1$, собственные функции корреляционного оператора [1].

Обозначим

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, \lambda) d\xi(\lambda), & S_a^b(t) &= \int_a^b T(t, \lambda) d\xi(\lambda), \\ R_a^b(t) &= \int_a^b \gamma(\lambda) T(t, \lambda) d\xi(\lambda), & P_a^b &= \left\| E(R_a^b(t))^2 \right\|_C. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\gamma(\lambda)$ — неубывающая функция такая, что $\gamma(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и выполняются условия

$$\int_0^\infty \ln^{1/2} g(u, \theta) P_0^u d(-\gamma^{-1}(u)) < \infty, \quad \frac{P_a^b \ln^{1/2} g(b, \theta)}{\gamma(b)} \rightarrow 0 \quad \text{при } b \rightarrow \infty.$$

Тогда $\|c(t)(S(t) - S_a^b(t))\| \rightarrow 0$ по вероятности при $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$, и при $a \geq 0$ и $x \geq B(\theta)(1 - \theta)^{-1}$ справедлива оценка

$$P \left\{ \|c(t)(S_a^\infty(t))\|_C > x \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{x^2(1 - \theta)^2}{2A^2} + \frac{2xB(\theta)(1 - \theta) - B^2(1 - \theta)}{2A^2} \right\}, \quad (2)$$

где $A = \int_a^b P_a^u d(-\gamma^{-1}(u))$,

$$B(\theta) = 2^{1/2} \int_a^\infty P_0^u \ln^{1/2} g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u)),$$

$$g(d, \theta) = 2 \max \left(1, \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)| d\mu(t)}{\inf \mu(I(\theta, \omega))} \right)$$

(inf берется по всем отрезкам, длина которых не превышает $\nu^{(-1)}(d, \theta)$).

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для всех $y > 0$ справедлива оценка

$$\mathbb{E} \exp \left\{ y \|c(t) R_a^b(t)\|_C \right\} \leq 2g(d, \theta) \exp \left\{ \frac{y^2}{2(1-\theta)^2} (P_a^b)^2 \right\}. \quad (3)$$

Доказательство. Используя неравенство $\exp\{ax\} - 1 \leq a(\exp\{x\} - 1)$ для $0 \leq a \leq 1$, получаем, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \mu(I(\theta, \omega)) \left(\exp \left\{ y \|c(t) R_a^b(t)\|_C \right\} - 1 \right) &= \int_{I(\theta, \omega)} \left(\exp \left\{ y \|c(t) R_a^b(t)\|_C \right\} - 1 \right) d\mu(t) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)| \left(\exp \left\{ \frac{y}{1-\theta} |R_a^b(t)| \right\} - 1 \right) d\mu(t). \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание от обеих частей:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ y \|c(t) R_a^b(t)\|_C \right\} \leq \frac{\mathbb{E} \int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)| (\exp\{y(1-\theta)^{-1} |R_a^b(t)|\} - 1) d\mu(t)}{\inf \mu(I(\theta, \omega))} + 1.$$

Так как $R_a^b(t)$ — строго субгауссовский процесс, то

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{y}{1-\theta} |R_a^b(t)| \right\} \leq 2 \exp \left\{ \frac{y^2}{2(1-\theta)^2} \mathbb{E} (R_a^b(t))^2 \right\}.$$

Подставляя последнее неравенство в предыдущее, получим (3).

Лемма 2. Для всех $y > 0$ и $c \in [a, b]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ y \|c(t) S_a^b(t)\|_C \right\} &= \exp \left\{ \frac{y^2}{2(1-\theta)^2} \left[\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u)) + P_c^b |\gamma^{-1}(b)| + P_c^a |\gamma^{-1}(a)| \right]^2 \right. \\ &\quad + \frac{2^{1/2} y}{1-\theta} \left[\int_a^\infty P_c^u \ln^{1/2} g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u)) + \frac{P_c^b \ln^{1/2} g(b, \theta)}{|\gamma(b)|} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{P_c^a \ln^{1/2} g(a, \theta)}{|\gamma(a)|} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Для всех $c \in [a, b]$ справедливо

$$S_a^b = \int_a^b R_c^u(t) d(-\gamma^{-1}(u)) + R_c^u(t) (\gamma^{-1}(u))|_a^b.$$

Из неравенства Гёльдера для $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$ таких, что $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^{-1} \leq 1$, следует

$$\mathbb{E} \exp \left\{ y \|c(t) S_a^b(t)\|_C \right\} \leq X_1^{1/\alpha_1} X_2^{1/\alpha_2} X_3^{1/\alpha_3},$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{E} \exp \left\{ y \alpha_1 \int_a^b \|c(t) R_c^u(t)\|_C d(-\gamma^{-1}(u)) \right\}, \\ X_2 &= \mathbb{E} \exp \left\{ y \alpha_2 \|c(t) R_c^b(t)\|_C |\gamma^{-1}(b)| \right\}, \\ X_3 &= \mathbb{E} \exp \left\{ y \alpha_3 \|c(t) R_c^b(t)\|_C |\gamma^{-1}(a)| \right\}. \end{aligned}$$

Из неравенства Гёльдера для интегралов [2] следует

$$X_1 \leq \exp \left\{ \int_a^b x(u) \ln g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u)) + \int_a^b \frac{y^2 \alpha_1^2 (P_c^u)^2}{2(1-\theta)^2 x(u)} d(-\gamma^{-1}(u)) \right\},$$

где $x(u) > 0$ — некоторая функция такая, что $\int_a^b x(u) d(-\gamma^{-1}(u)) \leq 1$. Пусть $Z^2(u) = y^2 \alpha_1^2 (P_c^u)^2 / [2(1-\theta)^2]$, в качестве функции $x(u)$ рассмотрим функцию

$$x(u) = Z(u) \left[\left(\int_a^b Z(u) d(-\gamma^{-1}(u)) \right)^2 + \ln g(u, \theta) \right]^{-1/2}.$$

При таком выборе $x(u)$

$$X_1 \leq \exp \left\{ \left[\int_a^\infty Z(u) d(-\gamma^{-1}(u)) \right]^2 + 2 \int_a^\infty Z(u) \ln^{1/2} g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u)) \right\},$$

X_2 и X_3 оцениваются по лемме 1.

Положим $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$ равными

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2^{1/2}(1-\theta)\delta^{1/2}}{y \int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u))}, & \alpha_2 &= \frac{2^{1/2}(1-\theta)|\gamma(b)|}{y P_c^b} \left(\delta + \ln g(b, \theta) \right)^{1/2}, \\ \alpha_3 &= \frac{2^{1/2}(1-\theta)|\gamma(a)|}{y P_c^a} \left(\delta + \ln g(a, \theta) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ такое, что $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^{-1} \leq 1$.

Заметим, что при этом

$$\delta \leq \frac{y^2}{2(1-\theta)^2} \left[\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u)) + \frac{P_c^b}{|\gamma(b)|} + \frac{P_c^a}{|\gamma(a)|} \right]^2.$$

Подставляя вместо $\{X_i\}_{i=1}^3$ их оценки и значения $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$, получим (4).

Теперь теорема 1 доказывается просто. Сходимость следует из неравенства Чебышева

$$\mathbb{P} \left\{ \|c(t) S_a^b(t)\|_C > x \right\} \leq \frac{\mathbb{E} \exp \{ y \|c(t) S_a^b(t)\|_C \}}{\exp \{ y x \}}$$

и оценки (4), если положить $c = 0$, $y = x(1-\theta)^2/A^2$ и устремить a, b к бесконечности.

Оценка (2) следует из неравенства Чебышева и неравенства (4), если для $x > \sup_{\theta \in (0,1)} B(\theta)(1-\theta)^{-1}$ положить $y = [x(1-\theta) - B(\theta)]A^{-2}$ и устремить b к бесконечности.

Пусть $r(u) > 0$, $u > 0$, — монотонно неубывающая функция такая, что $r(e^u)$ выпукла. Например, $r(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$, $r(u) = \ln^\alpha(u+1)$, $\alpha > 1$.

Теорема 2. Пусть существует монотонно неубывающая функция $\gamma(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, такая, что выполняются условия

$$\int_0^\infty r(g(u, \theta)) P_0^u d(-\gamma^{-1}(u)) < \infty, \quad \frac{P_0^b r(g(b, \theta))}{\gamma(b)} \rightarrow 0 \quad \text{при } b \rightarrow \infty.$$

Тогда $\|c(t)(S(t) - S_a^b(t))\|_C \rightarrow 0$ по вероятности при $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$, и при $a \geq 0$, $x \geq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\|c(t) S_a^\infty(t)\|_C > x\right\} \\ & \leq 2r^{(-1)}\left(\frac{\int_a^\infty r(g(u, \theta)) P_0^u d(-\gamma^{-1}(u))}{\int_a^\infty P_0^u d(-\gamma^{-1}(u))}\right) \exp\left\{-\frac{x^2(1-\theta)^2}{2A^2}\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. По неравенству Гёльдера

$$\mathbb{E} \exp\left\{y\|c(t) S_a^b(t)\|_C\right\} \leq X_1^{1/\alpha_1} X_2^{1/\alpha_2} X_3^{1/\alpha_3}.$$

Положим

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_a^b x(u) \ln g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u)), & D_2 &= \int_a^b \frac{(P_c^u)^2}{x(u)} d(-\gamma^{-1}(u)), \\ C_1 &= (P_c^b \gamma^{-1}(b))^2, & C_2 &= (P_c^a \gamma^{-1}(a))^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp\left\{y\|c(t) S_a^b(t)\|_C\right\} \leq 2 \exp\left\{\frac{D_1}{\alpha_1}\right\} \\ & \times \exp\left\{\frac{\alpha_1 y^2}{2(1-\theta)^2} D_2 + \frac{\alpha_2 y^2}{2(1-\theta)^2} C_1 + \frac{\alpha_3 y^2}{2(1-\theta)^2} C_2 + \frac{\ln g(b, \theta)}{\alpha_2} + \frac{\ln g(a, \theta)}{\alpha_3}\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{\delta}{D_2}\right)^{1/2}, & \alpha_2 &= \left(\frac{\delta + \ln g(b, \theta)}{C_1}\right)^{1/2}, \\ \alpha_3 &= \left(\frac{\delta + \ln g(a, \theta)}{C_2}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а в качестве $x(u)$ — функцию $x(u) = P_c^u (\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u)))^{-1}$.

Из неравенства Гёльдера следуют оценки

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{D_1}{\alpha_1}\right\} &= \exp\left\{\frac{1}{\alpha_1} \frac{\int_a^b P_c^u \ln g(u, \theta) d(-\gamma^{-1}(u))}{\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u))}\right\} \\ &\leq r^{(-1)}\left(\frac{\int_a^b r(g(u, \theta)) P_c^u d(-\gamma^{-1}(u))}{\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u))}\right). \end{aligned}$$

Подставим рассмотренные значения и оценки в (6).

Утверждение о сходимости следует, если в неравенстве Чебышева положить $c = 0$, $y = x(1-\theta)^2 (\int_a^b P_c^u d(-\gamma^{-1}(u)))^{-2}$ и перейти к пределу при $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$.

Оценка (5) получается аналогично, если для любого $a > 0$ устремить b к бесконечности.

Теоремы 1 и 2 естественным образом переносятся на случай, когда процесс $\xi(t)$ задан на конечном интервале, если заметить, что

$$P \left\{ \sup_{|t| \leq T} |S_a^b(t)| > x \right\} \leq P \left\{ \|c(t) S_a^b(t)\|_C > x |c(\beta)| \right\},$$

где $|c(\beta)| = \inf_{|t| \leq T} |c(t)| > 0$.

Оценки (2) и (5) совпадают по порядку с аналогичными оценками для гауссовских интегралов [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. — Теория вероятн. и матем. статистика, 1989, № 40, с. 37–44.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. А. Об оценках распределения супремума гауссовского стационарного процесса. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 3, с. 314–323.

Поступила в редакцию
2.VIII.1993

Исправленный вариант
20.IV.1998

© 1998 г.

ТОЛМАЧЕВ Н. А.*

О ГЛАДКОСТИ И СИНГУЛЯРНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР И ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИФFUЗИЙ¹⁾

В заметке построены два примера невырожденной диффузии, заданной стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + B(\xi_t) dt$$

в гильбертовом пространстве X , где $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$ и $B(x) = \Lambda x + v(x)$, Λ — непрерывный линейный оператор на X , а σ_0 и v — бесконечно дифференцируемые по Фреше отображения со значениями в пространстве ядерных операторов на X и в X соответственно, со всеми ограниченными производными, такие, что:

(i) в первом примере $\Lambda x = -\frac{1}{2}x$ и диффузия ξ_t обладает (единственной) инвариантной вероятностной мерой, которая вместе с переходными вероятностями не имеет направлений дифференцируемости (и даже непрерывности);

(ii) во втором примере ξ_t имеет две различные инвариантные вероятностные меры ν_1 и ν_2 , при этом ν_1 эквивалентна некоторой гауссовской мере и дифференцируема, а ν_2 не имеет направлений дифференцируемости (и даже непрерывности).

*Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия. e-mail: vbogach@mech.math.msu.su

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-15-96865 и 97-01-00932, и российско-германского гранта 436 RUS 113/343/O(R).