Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, К. А. Боровков, О вероятностях
больших отклонений для случайных блужданий.
II. Регулярные экспоненциально убывающие рас-
пределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004,
том 49, выпуск 2, 209–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:03:20

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 49
Выпуск 2, 2004 год
апрель, май, июнь

© 2004 г.

БОРОВКОВ А. А.*, БОРОВКОВ К. А.**

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ. II. РЕГУЛЯРНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

В работе установлена точная асимптотика для вероятностей пересечения произвольных криволинейных границ в диапазоне больших отклонений для случайных блужданий, хвосты распределений скачков которых отличаются от экспоненциальной функции на интегрируемый правильно меняющийся множитель. В этом интересном переходном случае в зоне больших отклонений существует «нижняя подзона», где справедливы классические «точные» асимптотические результаты, и «верхняя подзона», для которой была известна лишь грубая логарифмическая асимптотика. В работе выведено точное асимптотическое поведение вероятностей больших отклонений в этой второй подзоне и показано, что оно, в некотором смысле, сходно с асимптотикой, обсуждавшейся в первой части работы, посвященной правильно изменяющимся хвостам. Кроме того, при дополнительном условии на «асимптотическую гладкость» распределения скачков блуждания, мы устанавливаем асимптотическое разложение для хвоста распределения сумм скачков в области больших отклонений.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, случайное блуждание, правильное изменение, экспоненциальный хвост.

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

** Department of Mathematics & Statistics, Melbourne University, Parkville 3010, Australia; e-mail: kostya@ms.unimelb.edu.au

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 02-01-00902, и ARC Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems.

1. Введение

В первой части настоящей работы [10] мы рассматривали вероятности больших отклонений для случайного блуждания

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

в котором независимые одинаково распределенные (н.о.р.) скачки X_j имели правильно изменяющиеся правые хвосты распределений. Основными предположениями были следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_1 &= 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = 1, \quad \mathbf{E}|X_1|^b < \infty, \quad b \geq 2, \\ V(t) &= \mathbf{P}\{X_1 > t\} = t^{-\beta}L(t), \quad \beta > 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся при $t \rightarrow \infty$ функция. В этой ситуации мы получили результаты, уточняющие (при дополнительных условиях на «асимптотическую гладкость» $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$, ср. с условием $[D_k]$ ниже) и обобщающие хорошо известное соотношение

$$V_n(x) := \mathbf{P}\{S_n > x\} \sim nV(x) \quad \text{при} \quad x \geq c(n \ln n)^{1/2}, \quad c > (\beta - 2)^{1/2}, \quad (2)$$

см., например, [15, (1.25 b)] (мы используем символ «присваивания» $:=$, чтобы указать, что данное равенство используется как определение; здесь и в последующем запись $A \sim B$ означает, что $A = B(1 + o(1))$).

Теперь мы предположим вместо этого, что

$$V(t) = e^{-\mu t}V^0(t), \quad V^0(t) = t^{-\beta-1}L(t), \quad \mu > 0, \quad \beta > 2, \quad (3)$$

где $L(t)$ также медленно меняется при $t \rightarrow \infty$.

В этом случае существует производящая функция моментов

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty, \quad 0 \leq \lambda \leq \mu, \quad (4)$$

и определено преобразование Лежандра ее логарифма

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln \varphi(\lambda)\}. \quad (5)$$

Функция $\Lambda(\alpha)$ является аналитической в интервале

$$-\infty \leq \alpha_- < \alpha < \alpha_+ := \lim_{\lambda \uparrow \mu} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} < \infty,$$

где $\lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} = \mu$ и $\alpha_+ < \infty$ в силу (3), а величина α_- определяется симметричным образом. Справа от точки α_+ функция $\Lambda(\alpha)$ линейна:

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+) + (\alpha - \alpha_+)\lambda_+ \quad \text{при} \quad \alpha > \alpha_+. \quad (6)$$

Заметим, что всегда $a := \mathbf{E}X_1 \in [\alpha_-, \alpha_+)$.

Верхняя грань в (5) достигается в точке $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha) > 0$, $\alpha > a$, так что $\lambda(\alpha) = \lambda_+$ при $\alpha > \alpha_+$.

Функция $\Lambda(\alpha)$, которая часто называется функцией уклонений или функцией Чернова, играет, как известно, важнейшую роль в анализе поведения вероятностей больших уклонений для случайных блужданий (см., например, [8], [11]). Это может быть кратко пояснено следующим образом. Предположим, что мы интересуемся вероятностью $\mathbf{P}\{S_n > x\}$, где величина x относится к области больших уклонений для S_n , так что заведомо $\alpha := x/n > a$. Введем в рассмотрение н.о.р. случайные величины $X_j^{(\alpha)}$, распределенные согласно преобразованию Крамера над распределением исходных величин X_j :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_j^{(\alpha)} \in dy\} &= \frac{e^{\lambda(\alpha)y}}{\varphi(\lambda(\alpha))} \mathbf{P}\{X_j \in dy\}, \\ \varphi^{(\alpha)}(\lambda) &:= \mathbf{E}e^{\lambda X_1^{(\alpha)}} = \frac{\varphi(\lambda + \lambda(\alpha))}{\varphi(\lambda(\alpha))}. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, $\mathbf{E}X_j^{(\alpha)} = \varphi'(\lambda(\alpha))/\varphi(\lambda(\alpha)) = \alpha$ при $\alpha \leq \alpha_+$; отметим также, что при $\alpha > \alpha_+$ выполнено $X_j^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} X_j^{(\alpha_+)}$. Легко видеть, что распределение суммы

$$S_n^{(\alpha)} = X_1^{(\alpha)} + \dots + X_n^{(\alpha)}$$

будет иметь вид соответствующего преобразования Крамера над распределением суммы S_n :

$$\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in dy\} = \frac{e^{\lambda(\alpha)y}}{\varphi^n(\lambda(\alpha))} \mathbf{P}\{S_n \in dy\}, \quad (8)$$

причем, поскольку выполнено $\mathbf{E}S_n^{(\alpha)} = n\alpha = x$ (при $\alpha \leq \alpha_+$), событие $\{S_n^{(\alpha)} > x\} = \{S_n^{(\alpha)} - \mathbf{E}S_n^{(\alpha)} > 0\}$ будет относиться уже к области нормальных уклонений и основная масса распределения суммы $S_n^{(\alpha)}$ будет сосредоточена в окрестности точки x . Так как величина плотности распределения S_n относительно такового для суммы $S_n^{(\alpha)}$ в этой окрестности x будет в силу (8) близка к

$$e^{\lambda(\alpha)} \varphi^{-n}(\lambda(\alpha)) = e^{-n\Lambda(\alpha)},$$

то этот член и будет определять асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{S_n > x\}$.

В частности, для всех $x = x(n)$ таких, что $\alpha = x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$ при некоторых $a < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_+$, справедливо

$$\ln \mathbf{P}\{S_n > x\} \sim -n\Lambda(\alpha) \quad (9)$$

при $n \rightarrow \infty$, а если $x = \alpha n$ при фиксированном $\alpha > a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{S_n > x\} = -\Lambda(\alpha).$$

Более аккуратное оценивание с использованием локальных предельных теорем (для $S_n^{(\alpha)}$) приводит к *точной асимптотике* для интересующей нас вероятности: скажем, в нерешетчатом случае, для любых $a < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_+$ имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{(1 - e^{-\lambda(\alpha)}) \sqrt{2\pi \mathbf{D}X_1^{(\alpha)}}}$$

равномерно по $\alpha := x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$ (ср. с [18]).

Точное асимптотическое поведение совместного распределения $\mathbf{P}\{\bar{S}_n > x, S_n < x - y\}$, когда $\alpha = x/n < \alpha_+$, было подробно изучено в [2], [3] (для решетчатых X , а также когда их распределение имеет абсолютно непрерывную компоненту). В этом случае условие (3) на поведение хвостов также является несущественным, нужно лишь выполнение условия (4) и чтобы $\alpha < \alpha_+$.

При $\alpha \geq \alpha_+ (< \infty)$, однако, ситуация меняется кардинальным образом. Отметим, что если в общем случае (т.е. когда (3) не предполагается выполненным) $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$, то $\alpha_+ = \text{vrai sup } X_1 < \infty$, так что отклонения величины $x = \alpha n$ при $\alpha > \alpha_+$ невозможны. Стало быть, единственная нетривиальная ситуация в этом контексте — это когда $\lambda_+ < \infty$ (что возможно лишь когда $|\int t e^{\lambda+t} dV(t)| < \infty$, а это условие всегда выполнено в предположении (3)), и тогда условие (3) становится критически важным, а сама задача в случае $\alpha > \alpha_+$ становится, в известном смысле, близка к рассмотренной в первой части настоящей работы. Подробное исследование «нижней подзоны» в пограничном случае $\alpha = \alpha_+$ было недавно предпринято в [14], где было показано, до каких значений x остаются в этой ситуации справедливыми «классические» точные асимптотические разложения для $\mathbf{P}\{S_n > x\}$ (см., например, [16] или [12]).

Сходная ситуация имеет место и при изучении асимптотического поведения вероятности события

$$G_n = G_n(g) = \left\{ \max_{k \leq n} (S_k - g(k)) > 0 \right\}$$

для произвольной границы $g(k) = g_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Предположим ради простоты, что граница g имеет вид

$$g(k) = x f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \inf_{0 \leq t \leq 1} f(t) = 1, \quad (10)$$

где $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — некоторая фиксированная кусочно-непрерывная функция. Как показано в [4], определяющую роль в поведении вероятностей $\mathbf{P}(G_n)$ играют *линии уровня* $p_\alpha(t)$, $t \in [0, 1]$, $p_\alpha(1) = \alpha$, задаваемые неявным образом как решения уравнения

$$t\Lambda(p_\alpha(t) t^{-1}) = \Lambda(\alpha), \quad t \in [0, 1], \quad (11)$$

при фиксированном значении параметра α и удовлетворяющие условию $p_\alpha(t) t^{-1} > a$; здесь и всюду в последующем мы предполагаем, что $\alpha > a$. Соотношение (11) получается приравниванием друг к другу выражений $k\Lambda(p_\alpha(k/n) n/k)$ и $n\Lambda(\alpha)$. Это суть главные члены асимптотики для $-\ln \mathbf{P}\{S_k > p_\alpha(k/n) n\}$ и $-\ln \mathbf{P}\{S_n > \alpha n\}$ соответственно, ср. с (9). Стало быть, любые две точки на одной линии уровня $p_\alpha(t)$, $t \in [0, 1]$, имеют то свойство, что для подходящим образом нормированного случайного блуждания (временная и пространственная координаты у него обе «сжаты» в n раз) вероятности достижения этих точек (за соответствующие времена) примерно одинаковы.

Как показано в [4], функции $p_\alpha(t)$ вогнуты и $\alpha t \leq p_\alpha(t) \leq \alpha$, $t \in [0, 1]$. Более того, в общем случае слева от точки

$$t_\alpha = \min \left[1, \frac{\Lambda(\alpha)}{\Lambda(\alpha_+)} \right] \quad (12)$$

функция p_α линейна с коэффициентом наклона, величина которого не зависит от α :

$$p_\alpha(t) = \lambda_+^{-1} \Lambda(\alpha) + g_+ t, \quad t \in [0, t_\alpha], \quad g_+ := \lambda_+^{-1} \ln \varphi(\lambda_+), \quad (13)$$

тогда как справа от точки t_α эта функция аналитична с производной, непрерывной в t_α . Функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ возрастает при $\alpha > a$, так что при $\alpha \geq \alpha_+$ в силу (12) имеем $t_\alpha = 1$, и поэтому (13) справедливо при всех $t \in [0, 1]$. Это также влечет, что $p_\alpha(t)$ есть возрастающая функция от α при $\alpha > a$. Кроме того, из (11) и (12) очевидно, что

$$t \in [0, t_\alpha] \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad p_\alpha(t) t^{-1} > \alpha_+. \quad (14)$$

Пусть теперь α' есть минимальное значение α , для которого кривая из нашего семейства линий $\{p_\alpha(t), t \in [0, 1]\}_{\alpha > a}$ «касается» нормированной границы $xn^{-1}f(\cdot)$, ср. с (10). Тогда, используя (9) и грубые оценки

$$\begin{aligned} \max_{k \leq n} \mathbf{P} \left\{ S_k > x f \left(\frac{k}{n} \right) \right\} &\leq \mathbf{P}(G_n) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P} \left\{ S_k > x f \left(\frac{k}{n} \right) \right\} \\ &\leq n \max_{k \leq n} \mathbf{P} \left\{ S_k > x f \left(\frac{k}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

(или результаты [4]), нетрудно проверить, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\ln \mathbf{P}(G_n) \sim -n\Lambda(\alpha') \quad (15)$$

(предполагая для простоты, что $\alpha' \in [\alpha_1, \alpha_2]$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in (a, \alpha_+)$). Другими словами, вероятность пересечения границы имеет такую же логарифмическую асимптотику, как и вероятность того, что блуждание просто окажется выше точки $g(k) = x f(k/n) = n p_{\alpha'}(k/n)$ в момент времени $k = \lfloor t'n \rfloor$, где

$$t' = \inf \{ t > 0 : p_{\alpha'}(t) = x n^{-1} f(t) \}$$

есть точка, в которой наши линии уровня впервые «касаются» нормированной границы.

В случае, когда t' принадлежит «интервалу регулярности» $(t_{\alpha'}, 1]$, точная асимптотика поведения $P(G_n)$ была получена при довольно широких предположениях на f в [4].

В настоящей работе мы рассматриваем альтернативную ситуацию, когда

$$t' \in [0, t_{\alpha'}]. \quad (16)$$

Заметим, что для линейной границы

$$g(k) = g(0) + gk \quad \text{с} \quad g < g_+ = \lambda_+^{-1} \ln \varphi(\lambda_+)$$

если выполнено (16), то в силу (13) и гладкости p_{α} мы всегда имеем $t' = 1$.

Далее, если $t' = 1$, то (16) влечет, что $t_{\alpha'} = 1$, так что из (12) имеем $\alpha' > \alpha_+$. С другой стороны, если $t' < 1$, то из (16) и (14) вытекает, что $p_{\alpha'}(t')/t' > \alpha_+$. Так что в обоих случаях мы имеем, грубо говоря, следующую картину: когда случайное блуждание пересекает границу на рассматриваемом интервале времени $[0, n]$, его среднее смещение (за единицу времени) до момента пересечения превышает максимально возможный снос α_+ блуждания по эквивалентной мере, задаваемой преобразованием Крамера (7). Однако, как мы увидим, в предположениях (3) соответствующая экстремальному значению параметра $\lambda(\alpha_+) = \lambda_+ = \mu$ версия преобразования Крамера будет иметь правильно меняющийся хвост. Это позволит нам воспользоваться результатами [10] для вывода асимптотического поведения вероятности пересечения границы по новой мере, а затем преобразовать его в желаемые оценки для исходного распределения. Графически это означает, что наиболее вероятным сценарием пересечения границы будет следующий: траектория нашего случайного блуждания все время движется вдоль прямой линии с коэффициентом наклона α_+ , за исключением одного единственного большого скачка, происходящего в случайный момент времени (ср. с теоремой 4 в [10]). Величина этого скачка в точности такова, чтобы лишь скомпенсировать «недостаточный снос» и достичь границы, вновь двигаясь после скачка вдоль прямой с коэффициентом наклона α_+ .

Для упрощения рассуждений мы ограничимся в основном анализом «углового случая», когда левая и правая производные $xn^{-1}f(t)$ в точке t' (если они существуют) отличаются от коэффициента наклона g_+ линейной части (13) линии $p_{\alpha'}$. (В [4] был также рассмотрен — в классических крамеровских предположениях — и «гладкий случай».) Отметим, что упрощающее предположение о представлении (10) для границы g в терминах функции f несущественно и использоваться в дальнейшем не будет.

В следующем разделе мы рассмотрим задачу нахождения точной асимптотики хвоста

$$V_n(t) = \mathbf{P}\{S_n > x\}, \quad \text{когда } \alpha = xn^{-1} > \alpha_+$$

(что формально является частным случаем вероятности пересечения границы $g(k) = \infty$ при $k < n$, $g(n) = x$, так что линии уровня будут «касаться» границы в крайней правой точке). Насколько нам известно, за исключением теоремы D в [7], единственной до сих пор рассмотренной ситуацией в этом диапазоне значений x является специальный случай, когда главный член $V(t)$ равен произведению $e^{-\mu t}$ на конечную линейную комбинацию отрицательных степеней t . При некоторых дополнительных предположениях в [19] был получен в этой ситуации главный член асимптотики хвоста $V_n(x)$. В теореме D работы [7] в предположении, что X_j имеет регулярную экспоненциально убывающую плотность в области больших значений, был получен главный член в «интегральной теореме больших уклонений».

В настоящей работе мы предполагаем лишь, что (3) выполнено, и получаем главный член $V_n(x)$ для $x > \alpha_+ n + c \max\{n^\kappa, (n \ln n)^{1/2}\}$ для произвольного $\kappa > 1/(\beta - 1)$. Кроме того, при дополнительных предположениях относительно «гладкости» хвоста V мы выводим также асимптотическое разложение для $V_n(x)$.

В последнем разделе работы мы рассматриваем случай произвольных границ g . Нам будет удобно ввести следующие условия, соответствующие ситуациям, когда линии уровня впервые касаются границы в левой крайней точке, правой крайней точке и во внутренней точке соответственно.

У с л о в и е $[B_0]$: $g(k) - g(1) \geq (k - 1)g$ при всех $k = 1, \dots, n$ и некотором $g > g_+ + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

У с л о в и е $[B_1]$: $g(n) - g(n - k) \leq gk$ при всех $k = 1, \dots, n$ и некотором $g < g_+ - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

У с л о в и е $[B_v]$, где $v \in (0, 1)$ есть фиксированное число: для некоторого m такого, что $m/n \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$, и фиксированного $\epsilon > 0$ выполнено $g(m)/m > \alpha_+$,

$$g(m) - g(m - k) \leq (g_+ - \epsilon)k \quad \text{при всех } k = 1, \dots, m$$

и

$$g(m + k) - g(m) \geq (g_+ + \epsilon)k \quad \text{при всех } k = 1, \dots, n - m.$$

Чтобы получить представление о том, что происходит в «гладком случае», мы рассмотрим также следующее условие.

У с л о в и е $[B_{0,0}]$: $g(k) - g(0) = g_+k$ при всех $k = 1, \dots, n$.

Символ c будет использоваться для обозначения постоянных (возможно, принимающих различные значения внутри одного и того же рассуждения).

2. Асимптотическое поведение хвоста V_n

Напомним, что через $X_j^{(\alpha)}$ мы обозначили н.о.р. случайные величины с распределением и производящей функцией моментов, заданными в (7) (так что $\mathbf{E}X_j^{(\alpha)} = \alpha$, $a < \alpha \leq \alpha_+$), и через $S_n^{(\alpha)}$ — частные суммы этих величин.

Далее, для любого $x > 0$ положим $\alpha = x/n$ и заметим, что в силу (8)

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \varphi^n(\lambda(\alpha)) \int_x^\infty e^{-\lambda(\alpha)t} \mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in dt\} \\ &= -e^{-n\lambda(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\alpha)t} d\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} - \alpha n > t\} \end{aligned} \quad (17)$$

(см., например, [8, гл. 8]). При $a < \alpha \leq \alpha_+$ справедливо $\mathbf{E}(S_n^{(\alpha)} - \alpha n) = 0$, и вышеприведенное соотношение позволяет выводить асимптотические разложения для $V_n(x)$ (более подробно см. также [17]). Как мы уже сказали, в настоящей работе мы будем иметь дело со случаем, когда $\alpha > \alpha_+$. Нам будет удобно ввести новое переменное

$$z := x - \alpha_+ n \equiv (\alpha - \alpha_+) n > 0 \quad (18)$$

и обозначение

$$\Delta(x) := (x, x + \Delta] \quad \text{для } \Delta > 0. \quad (19)$$

Теорема 1. Если условие (3) выполнено, то для некоторого $c > 0$ и любого $\kappa > 1/(\beta - 1)$

$$V_n(x) \sim \frac{n}{\varphi(\mu)} e^{-n\lambda(\alpha)} V^0(z) = n\varphi^{n-1}(\mu) e^{-\mu x} V^0(z) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

равномерно по n , удовлетворяющим $x > \alpha_+ n + c(n^\kappa + (n \ln n)^{1/2})$. Более того, в этом случае для любого фиксированного $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}\{S_n \in \Delta(x)\} \sim (1 - e^{-\mu\Delta}) V_n(x).$$

Ближкие утверждения были получены ранее в [7], [14].

Мы можем также получить асимптотические разложения для $V_n(x)$. Для этого нам понадобится следующее условие из [10].

У с л о в и е $[D_k]$, $k \geq 1$ (условие типа дифференцируемости): существуют функции $L_1(t), \dots, L_k(t)$ такие, что

$$L(t(1+y)) = L(t) \left[\sum_{j=0}^{k-1} y^j L_j(t) + y^k L_k(t)(1 + \delta_k(y, t)) \right], \quad \delta_k(y, t) = o(1) \quad (20)$$

при $y \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Мы полагаем здесь $L_0(t) \equiv 1$. (Когда величины X_i решетчатые, мы требуем, чтобы $[D_k]$ выполнялось лишь для t и ty , принимающих значения на соответствующей решетке.)

Напомним, что если условие $[D_k]$, $k \geq 1$, выполнено, то все $L_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, k$. Кроме того, когда соотношение (20) выполняется, справедливо

$$V^0(t(1+y)) = V^0(t) \left[\sum_{j=0}^k y^j U_j(t) + y^k (U_k(t) \delta_k(y, t) + O(|y|)) \right], \quad (21)$$

где

$$U_j(t) = \sum_{m=0}^j \binom{-\beta-1}{m} L_{j-m}(t), \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (22)$$

Если предположить лишь, что $[D_1]$ выполнено, то улучшить результат теоремы 1 сразу не удастся (технической причиной тому является, грубо говоря, тот факт, что без каких-либо дальнейших предположений мы можем утверждать для сумм Z_n , определяемых ниже в (23), только, что $\mathbf{E}[Z_n(1+o(1))] = o(n^{1/2})$, ср. с приводимым ниже доказательством нашей теоремы 2). Однако когда справедливо $[D_2]$, мы можем получить уточнение результата теоремы 1. При условиях $[D_k]$, $k > 2$, можно вывести аналогичным способом и более длинные асимптотические разложения.

Теорема 2. Если условие (3) выполнено, $\beta > 3$, а для $V^0(t)$ справедливо условие $[D_2]$, то для некоторого $c > 0$ имеем при $x \rightarrow \infty$ равномерно по n , удовлетворяющим $x > \alpha_+ n + c(n \ln n)^{1/2}$, соотношение

$$V_n(x) = n\varphi^{n-1}(\mu) e^{-\mu x} V^0(z) \left[1 + \frac{\alpha_+}{z} U_1(z) + \frac{\sigma^2 n}{2z^2} (\beta+1)(\beta+2) (1+o(1)) \right],$$

где $z = x - \alpha_+ n$ и $\sigma^2 = \varphi''(\mu)/\varphi(\mu) - \alpha_+^2$.

Доказательство теоремы 1. Имеем $\alpha_+ < \alpha = x/n$, так что $\lambda(\alpha) = \lambda_+ = \mu$. Положим

$$\zeta_j = X_j^{(\alpha_+)} - \alpha_+, \quad Z_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n, \quad W_n(t) = \mathbf{P}\{Z_n > t\}. \quad (23)$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}\zeta_1 = 0 \quad \text{и} \quad S_n^{(\alpha)} - \alpha n = Z_n - z$$

(напомним, что $X_j^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} X_j^{(\alpha_+)}$ при $\alpha > \alpha_+$), и, применяя интегрирование по частям к последнему выражению в (17), мы получаем

$$\begin{aligned} V_n(x) &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \left[W_n(z) - \mu \int_0^\infty e^{-\mu t} W_n(z+t) dt \right] \\ &= \mu e^{-n\Lambda(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\mu t} [W_n(z) - W_n(z+t)] dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы оценить это выражение, заметим вначале, что правый хвост распределения величины ζ_1

$$\begin{aligned} W(t) &= \mathbf{P}\{X_1^{(\alpha_+)} > t + \alpha_+\} \\ &= - \int_{t+\alpha_+}^{\infty} \frac{e^{\mu u}}{\varphi(\mu)} dV(u) = \frac{1}{\varphi(\mu)} \int_{t+\alpha_+}^{\infty} [\mu V^0(u) du - dV^0(u)] \\ &= \frac{1}{\varphi(\mu)} \left[\mu \int_{t+\alpha_+}^{\infty} V^0(u) du + V^0(t + \alpha_+) \right] \sim \frac{\mu}{\beta \varphi(\mu)} t V^0(t) \quad (25) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ по теореме Карамата (см., например, [1]); отметим, что главный вклад в асимптотическое поведение W вносит абсолютно непрерывный член с плотностью, пропорциональной $V^0(t + \alpha_+)$.

Далее, ясно, что $\mathbf{E}|\zeta_j|^b < \infty$ для любого $b \in (0, \beta)$. Стало быть, н.о.р. случайные величины ζ_j удовлетворяют условию (1) (лишь с тем — несущественным для нас в данной ситуации — отличием, что в общем случае $\mathbf{E}\zeta_j^2 \neq 1$), так что мы можем применить лемму 2 из [10] и получить, что для любого $b \in [2, \beta)$, некоторого $c > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(u) \downarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ имеем

$$W_n(u) = n\mathbf{E}[W(u - Z_{n-1}); |Z_{n-1}| < \varepsilon u] + o(n^2 W(u) u^{-b}) \quad (26)$$

равномерно по $n \leq cu^2 / \ln u$.

Теперь, чтобы использовать (26) в (24), заметим, что $W(u) \sim cuV^0(u)$ в силу (25) и, значит, при $u \geq z$ остаточный член

$$n^2 W(u) u^{-b} \sim cn^2 V^0(u) u^{-b+1} = o(nV^0(z)), \quad (27)$$

коль скоро $nz^{-b+1} = o(1)$, что вытекает из нашего условия $x > \alpha_+ n + cn^\kappa$, если выбрать $b \in (\max\{2, 1 + 1/\kappa\}, \beta)$, а это всегда возможно в силу выбора κ .

Более того, для $\delta = (3 \ln z)/(\mu z)$ аналогично получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta z}^{\infty} e^{-\mu t} [W_n(z) - W_n(z+t)] dt &= O(W_n(z) e^{-\mu \delta z}) \\ &= O(nzV^0(z) z^{-3}) = o(nV^0(z)) \quad (28) \end{aligned}$$

из (25) и хорошо известного факта, что $W_n(z) \sim nW(z)$, ср. с (2).

Принимая все это во внимание, мы выводим из (24) и (26), что

$$\begin{aligned} V_n(x) &= n\mu e^{-n\Lambda(\alpha)} \left[\int_0^{\delta z} e^{-\mu t} \mathbf{E}[W(z - Z_{n-1}) - W(z+t - Z_{n-1}); \right. \\ &\quad \left. |Z_{n-1}| < \varepsilon z] dt + o(V^0(z)) \right], \quad (29) \end{aligned}$$

где последний интеграл равен, в силу (25), выражению

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta z} e^{-\mu t} \mathbf{E} \left[\frac{\mu}{\varphi(\mu)} \int_{z-Z_{n-1}+t+\alpha_+}^{z-Z_{n-1}+t+\alpha_+} V^0(u) du + \frac{1}{\varphi(\mu)} [V^0(z-Z_{n-1}+\alpha_+) \right. \\ & \quad \left. - V^0(z-Z_{n-1}+t+\alpha_+)] ; |Z_{n-1}| < \varepsilon z \right] dt \\ & = \frac{\mu}{\varphi(\mu)} \int_0^{\delta z} e^{-\mu t} t V^0(z)(1+o(1)) dt + o(V^0(z)) = \frac{V^0(z)(1+o(1))}{\mu \varphi(\mu)}, \quad (30) \end{aligned}$$

ибо V^0 есть правильно меняющаяся функция и $\mu^2 \int_0^{\delta z} e^{-\mu t} t dt = 1 + o(1)$.

Поскольку $e^{-n\Lambda(\alpha)} = \varphi^n(\mu) e^{-\mu x}$, первое утверждение теоремы теперь следует из (29) и (30).

Второе утверждение теоремы следует из соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \in \Delta(x)\} &= V_n(x) \left(1 - \frac{V_n(x+\Delta)}{V_n(x)} \right) \\ &\sim V_n(x) \left(1 - e^{n(\Lambda(\alpha)-\Lambda(\alpha+\Delta/n))} \frac{V^0(z+\Delta)}{V^0(z)} \right) \end{aligned}$$

(в силу уже установленной асимптотики для V_n), соотношения (6), в силу которого $\Lambda(\alpha+t) - \Lambda(\alpha) = \mu t$ при $\alpha > \alpha_+$, $t > 0$, а также того, что $V^0(z+\Delta)/V^0(z) \rightarrow 1$ в силу предположения (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Мы отправляемся от соотношений (29) и (30). Полагая $q_u = u - Z_{n-1} + \alpha_+$, видим из (21), что внутренний интеграл в левой части (30) равен

$$\int_0^t V^0(z(1+z^{-1}q_u)) du = V^0(z) \int_0^t \left[1 + \frac{U_1(z)}{z} q_u + \frac{U_2(z)}{z^2} q_u^2 (1+o(1)) \right] du.$$

Вычисляя математическое ожидание последнего выражения по событию $\{|Z_{n-1}| < \varepsilon z\}$ и используя оценку (31) из [10], мы получаем (здесь присутствующая в той оценке величина $R = nz^{-b}$, $b \in (3, \beta)$)

$$\begin{aligned} & V^0(z) \int_0^t \left[1 + \frac{U_1(z)}{z} (\alpha_+ + u) + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2z^2} n\sigma^2 (1+o(1)) + o(nz^{-b}) \right] du \\ & = V^0(z) \left[t \left(1 + \frac{U_1(z)}{z} \alpha_+ + \frac{(\beta+1)(\beta+2) n\sigma^2}{2z^2} (1+o(1)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{U_1(z)t^2}{2z} + o(tnz^{-2}) \right], \quad (31) \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{E}Z_{n-1} = 0$ и $\mathbf{D}\zeta_j = \sigma^2$.

С другой стороны, из (21) мы также имеем

$$\begin{aligned} & V^0(z - Z_{n-1} + \alpha_+) - V^0(z - Z_{n-1} + t + \alpha_+) \\ & = V^0(z) \left[-\frac{U_1(z)}{z} t - \frac{U_2(z)}{z^2} [2(\alpha_+ - Z_{n-1})t + t^2] (1+o(1)) \right. \\ & \quad \left. + o\left(\frac{U_2(z)}{z^2} [(\alpha_+ - Z_{n-1})^2 + t^2]\right) \right], \end{aligned}$$

так что математическое ожидание этой разности на событии $\{|Z_{n-1}| < \varepsilon z\}$ есть

$$-V^0(z) t U_1(z) z^{-1} + o\left(V^0(z) [(n + n^{1/2}t + t^2) z^{-2} + tnz^{-b}]\right), \quad (32)$$

где последняя оценка следует из соотношения (31) в [10] и того факта, что $U_j(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Воспользуемся теперь результатами (31) и (32) для вычисления левой части (30). Интегрируя и замечая, что, не изменяя вид остаточного члена, можно заменить интеграл $\int_0^{\delta z}$ на $\int_0^\infty$, поскольку

$$\int_{\delta z}^\infty (t + t^2/z) e^{-\mu t} dt = o(z^{-2}),$$

мы получаем, что левая часть (30) равна

$$\begin{aligned} & \frac{V^0(z)}{\mu\varphi(\mu)} \int_0^\infty e^{-\mu t} \left[\left(1 + \frac{U_1(z)}{z} \alpha_+ + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2z^2} n\sigma^2 \right) \mu^2 t \right. \\ & \quad \left. + \frac{\mu^2 U_1(z)}{2z} t^2 - \frac{\mu U_1(z)}{z} t \right] dt \\ & = \frac{V^0(z)}{\mu\varphi(\mu)} \left(1 + \frac{U_1(z)}{z} \alpha_+ + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2z^2} n\sigma^2 \right) \end{aligned}$$

с точностью до аддитивной ошибки величины $o(V^0(z) n z^{-2})$.

Для завершения доказательства нам остается лишь подставить эту оценку в правую часть представления (29) и заменить в нем остаточный член на $o(n^2 V^0(z) z^{-2})$, что возможно в силу второго равенства в (28) и того факта, что остаток в (26) есть

$$o(n^2 W(u) u^{-b}) = o(n^2 V^0(z) z^{-2}), \quad u \geq z.$$

3. Вероятности пересечения границ

В этом разделе мы сосредоточимся, главным образом, на изучении вероятностей пересечения линейных границ. Как мы увидим, когда выполнены наши условия $[B...]$, общий случай можно часто свести к случаю линейной границы.

К сожалению, в условиях настоящего раздела, для вероятности $\mathbf{P}(G_n)$ не существует простого *общего* асимптотического закона, подобного нашим теоремам 1 и 2 или результатам [4] и [10]. Различные случаи $[B_0]$, $[B_1]$, $[B_v]$ и $[B_{0,0}]$ показывают, сколь разнообразным может быть асимптотическое поведение $\mathbf{P}(G_n)$. Включение в рассмотрение общего случая «гладкого контакта» линий уровня с границей привело бы к еще большему разнообразию видов асимптотического поведения и к гораздо более сложным доказательствам.

1. Вначале мы рассмотрим случай линейной границы, для которой выполнено условие $[B_0]$:

$$g(k) = x + gk, \quad g = g_+ + \epsilon, \quad (33)$$

$\epsilon > 0$ фиксировано, $x \rightarrow \infty$. Как мы увидим ниже, в этом случае граница возрастает столь быстро, что наиболее вероятным сценарием пересечения ее будет прохождение блуждания через границу в самом начале временного интервала (и, следовательно, асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(G_n)$ будет таким же, как для вероятности $\mathbf{P}(G_\infty)$ когда-либо пересечь линейную границу (33)).

Для случайного блуждания $S_k^* = S_k - gk$, порожденного величинами $X_j^* = X_j - g$, имеем $\varphi^*(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X^*} = e^{-\lambda g} \varphi(\lambda)$ и, следовательно,

$$\varphi^*(\mu) = \exp(-\mu(\mu^{-1} \ln \varphi(\mu) + \epsilon)) \varphi(\mu) = e^{-\mu\epsilon} < 1 \quad (34)$$

из (13) при $\lambda_+ = \mu$. Соотношение (34), очевидно, влечет $\sup_{j \geq 1} S_j^* < \infty$ п.н., так что первый лестничный момент $\eta := \inf\{j \geq 1: S_j^* > 0\}$ является несобственной случайной величиной: $\mathbf{P}\{\eta < \infty\} < 1$.

Теорема 3. (i) Для границы (33) при $x \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(G_n) = rV(x)(1 + o(1)), \quad (35)$$

где

$$r = \frac{1 - \mathbf{P}\{\eta < \infty\}}{e^{\mu g}(1 - e^{-\mu\epsilon})(1 - \mathbf{E}(e^{\mu S_n^*}; \eta < \infty))}.$$

В частности, вероятность $\mathbf{P}(G_\infty) = \mathbf{P}\{\sup_k (S_k - g(k)) > x\}$ имеет при $x \rightarrow \infty$ ту же асимптотику (35).

(ii) В случае общей границы $g(k)$, удовлетворяющей условию $[B_0]$ с $g(1) = x + g$, при $x \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$e^{-\mu g} V(x)(1 + o(1)) \leq \mathbf{P}(G_n) \sim \mathbf{P}\{Y_n > x\} \leq rV(x)(1 + o(1)), \quad (36)$$

где мы положили $Y_n := \sup_{k \geq 1} [S_k - (g(k) - x)]$ (мы продолжили границу вправо, полагая $g(k) = x + gk$ при $k > n$).

Доказательство. (i) Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n) &= \mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} S_k^* > x\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq 0} S_k^* > x\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} S_k^* > x\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} S_k^* \leq x; \sup_{k \geq 0} S_k^* > x\right\} \\ &\leq \mathbf{P}(G_n) + \mathbf{P}\left\{\sup_{k > n} S_k^* > x\right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы оценить хвост глобального супремума, заметим, что в силу (3)

$$V^*(t) := \mathbf{P}\{X^* > t\} = V(t + g) \sim e^{-\mu g} V(t) \quad (38)$$

при $t \rightarrow \infty$ и, стало быть, нетрудно видеть, что

$$\int_t^\infty V^*(u) du \sim \mu^{-1} e^{-\mu g} V(t).$$

Последнее соотношение вместе с (34) означает, что условия теоремы 12 из гл. 4 в [6] выполнены, так что в силу упомянутой теоремы при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq 0} S_k^* > x\right\} &= \frac{\mu^{-1} V^*(x)(1 + o(1))}{\mu^{-1}(1 - \varphi^*(\mu))(1 - \mathbf{E}(e^{\mu S_n^*}; \eta < \infty))/(1 - \mathbf{P}\{\eta < \infty\})} \\ &= rV(x)(1 + o(1)) \end{aligned}$$

ввиду (34) и (38).

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы, нам остается показать, что последняя вероятность в (37) пренебрежимо мала. Заметим для этого, что

$$\begin{aligned} \Lambda(xk^{-1} + g) &= \sup_{\lambda} \{(xk^{-1} + g)\lambda - \ln \varphi(\lambda)\} \\ &\geq (xk^{-1} + \mu^{-1} \ln \varphi(\mu) + \epsilon)\mu - \ln \varphi(\mu) = \mu x k^{-1} + \mu \epsilon \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{P}\{S_k > t\} \leq \inf_{\lambda} e^{-t\lambda + k \ln \varphi(\lambda)} = e^{-k\Lambda(t/k)}, \quad t > 0, \quad (39)$$

по неравенству Чебышева, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{k > n} S_k^* > x\right\} &\leq \sum_{k > n} \mathbf{P}\{S_k > x + gk\} \leq \sum_{k > n} e^{-k\Lambda(x/k + g)} \\ &\leq e^{-\mu x} \sum_{k > n} e^{-\epsilon \mu k} = O(e^{-\mu x} e^{-\epsilon \mu n}) = o(V(x)), \quad (40) \end{aligned}$$

когда $x = O(e^{n\mu\epsilon_1/(\beta+1)})$ при некотором $\epsilon_1 < \epsilon$. Если же это условие не выполняется, то мы просто должны выбрать достаточно большое $C > 0$, разбить первый ряд в формуле (40) на две суммы

$$\sum_{n < k \leq C \ln x} + \sum_{k > C \ln x}$$

и воспользоваться нашей теоремой 1 для оценки вероятностей в первой сумме, тогда как вероятности во второй сумме могут быть оценены, используя грубую оценку (39). Часть (i) доказана.

(ii) Левое неравенство в (36) очевидно в силу (38), тогда как вышеприведенные рассуждения вкупе с соотношением вида (37) показывают, что $\mathbf{P}(G_n) \sim \mathbf{P}\{Y_n > x\}$. Правое неравенство в (36) следует из неравенства $g(k) \geq x + (k-1)g$ и части (i), что и завершает доказательство теоремы.

2. Рассмотрение случая, когда выполнено условие $[B_1]$, мы начнем с линейной границы

$$g(k) = x - (n - k)g, \quad k = 1, \dots, n; \quad g = g_+ - \epsilon, \quad (41)$$

где $\epsilon > 0$ фиксировано и $x \rightarrow \infty$ (поскольку, как мы отметили во введении, для такой границы «наиболее вероятное» время пересечения будет вблизи ее правой крайней точки, нам будет удобно положить теперь $x = g(n)$).

Вспоминая (7) и (23), положим

$$\tau_j := -\zeta_j - (\alpha_+ - g) = -X_j^{(\alpha_+)} + g, \quad T_k := \tau_1 + \dots + \tau_k. \quad (42)$$

Очевидно,

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} = e^{\mu g} \frac{\varphi(\mu - \lambda)}{\varphi(\mu)} = e^{-\mu\epsilon} \varphi(\mu - \lambda),$$

так что

$$\psi(\mu) = e^{-\mu\epsilon} < 1, \quad \psi(\lambda) < 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in (0, \mu) \quad (43)$$

в силу выпуклости ψ . Соотношение (43) влечет, что $\bar{T} := \sup_{k \geq 0} T_k$ есть собственная случайная величина.

Теорема 4. (i) Пусть выполнено условие (3), граница g имеет вид (41), $\alpha = x/n$ и $z = (\alpha - \alpha_+)n$. Тогда (для некоторого $c > 0$ и любого $\kappa > 1/(\beta - 1)$) для фиксированного $s > 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x > \alpha_+n + c(n^\kappa + (n \ln n)^{1/2})$ выполняется

$$\mathbf{P}(G_n; S_n > x - s) \sim e^{-n\Lambda(\alpha)} \frac{nV^0(z)}{\varphi(\mu)} \left[\mathbf{E}(e^{\mu\bar{T}}; \bar{T} \leq s) + e^{\mu s} \mathbf{P}\{\bar{T} > s\} \right] \quad (44)$$

и

$$\mathbf{P}(G_n) \sim e^{-n\Lambda(\alpha)} \frac{nV^0(z)}{\varphi(\mu)} \mathbf{E}e^{\mu\bar{T}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{E}e^{\mu\bar{T}} < \infty. \quad (45)$$

(ii) В случае произвольной границы $g(k)$, удовлетворяющей условию $[B_1]$ с $g(n) = x$, соотношения (44) и (45) остаются справедливыми, если заменить $\bar{T}$ на $\bar{T}^{(g)} := \sup_{k \geq 0} (T_k + g(n) - g(n - k) - gk)$. Здесь мы продолжили границу $g(\cdot)$ влево, полагая $g(k) = x - (n - k)g$, $k < 0$.

Доказательство. (i) Вначале мы покажем, что если наше блуждание пересекло линейную границу рассматриваемого вида на временном интервале $[0, n]$, то, скорее всего, это произошло у самого конца этого интервала. Введем в рассмотрение при $j \leq n$ (выбор j будет осуществлен позже) событие

$$G_{n,j} = \left\{ \max_{n-j \leq i \leq n} (S_i - g(i)) > 0 \right\}.$$

Ясно, что $\mathbf{P}(G_n) \geq \mathbf{P}(G_{n,j}) \geq V_n(x)$. С другой стороны, для разности $G'_{n,j} := G_n \setminus G_{n,j}$ имеем в силу теоремы 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G'_{n,j}) &\leq \sum_{k=1}^{n-j} \mathbf{P}\{S_k > g(k)\} \leq cnV^0(z) \sum_{k=1}^{n-j} e^{-k\Lambda(g(k)/k)} \\ &= cnV^0(z) e^{-n\Lambda(\alpha)} \sum_{k=1}^{n-j} \exp \left\{ n\Lambda(\alpha) - k\Lambda \left(\frac{g(k)}{k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Поскольку оба значения аргументов $\alpha, g(k)/k > \alpha_+$ функции Λ в рассматриваемом случае лежат в диапазоне, где эта функция линейна (см. (6)), аргумент в последней экспоненте есть

$$\begin{aligned} n\left(\frac{\mu x}{n} - \ln \varphi(\mu)\right) - k\left(\frac{\mu(x - (n-k)g)}{k} - \ln \varphi(\mu)\right) \\ = (n-k)\mu(g - g_+) = -\epsilon\mu(n-k). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\mathbf{P}(G'_{n,j}) \leq cnV^0(z)e^{-n\Lambda(\alpha)} \sum_{k=1}^{n-j} e^{-\epsilon\mu(n-k)} \leq c_1 e^{-\epsilon\mu j} V_n(x).$$

Выбором достаточно большого j эта вероятность может быть сделана сколь угодно малой относительно $V_n(x)$, а стало быть, и относительно $\mathbf{P}(G_n)$ и $\mathbf{P}(G_n; S_n > x - s) \geq V_n(x - s)$. Поэтому нам надо лишь оценить соответствующие вероятности с G_n , замененным на $G_{n,j}$.

Заметим теперь, что для любого $s > 0$ выполнено

$$\mathbf{P}(G_{n,j}; S_n > x - s) = \mathbf{P}\{S_n > x\} + \int_{-s}^0 \mathbf{P}(G_{n,j}; S_n \in x + dy). \quad (47)$$

В рассматриваемом диапазоне значений x мы можем вновь провести замену меры согласно (7) и переключиться на случайные величины, введенные в (23). Тогда для $y < 0$, полагая $s_k = x_1 + \dots + x_k$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n): \max_{n-j \leq k \leq n} (s_k - g(k)) > 0, s_n \in x + dy \right\},$$

мы получаем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_{n,j}; S_n \in x + dy) &= \int_A \mathbf{P}\{X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n\} \\ &= \varphi^n(\mu) \int_A e^{-\mu s_n} \mathbf{P}\{X_1^{(\alpha_+)} \in dx_1, \dots, X_n^{(\alpha_+)} \in dx_n\} \\ &= e^{-n\Lambda(\alpha)} e^{-\mu y} \mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n = z + y) \mathbf{P}\{Z_n \in z + dy\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где событие $H_{n,j} = \{\max_{n-j \leq i \leq n} (Z_i - h(i)) > 0\}$ означает, что случайное блуждание $\{Z_i\}$ пересекло границу

$$h(i) = g(i) - \alpha_+ i = z + (\alpha_+ - g)(n - i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (49)$$

на интервале времени $[n - j, n]$, причем заметим, что коэффициент наклона этой линейной границы отрицателен:

$$g - \alpha_+ < g_+ - \alpha_+ = \mu^{-1}(\ln \varphi(\mu) - \alpha_+ \mu) = -\mu^{-1}\Lambda(\alpha_+) < 0. \quad (50)$$

Итак, интеграл в (47) принимает вид

$$e^{-n\Lambda(\alpha)} \int_{-s}^0 e^{-\mu y} \mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n = z + y) \mathbf{P}\{Z_n \in z + dy\}. \quad (51)$$

Поскольку мы не предполагали, что $V^0(t)$ абсолютно непрерывна (хотя бы лишь для достаточно больших значений t), для следующего шага доказательства нам придется аппроксимировать последний интеграл конечной суммой. Зафиксируем Δ такое, что $k := s/\Delta$ есть целое число, вспомним (19) и положим $z_m = z - m\Delta$, $m = 1, 2, \dots$. Очевидно, что относительная ошибка приближения интеграла в (51) суммой

$$S := \sum_{m=1}^k e^{\mu m \Delta} \mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n \in \Delta(z_m)) \mathbf{P}\{Z_n \in \Delta(z_m)\} \quad (52)$$

не превосходит $\max_{m \leq k} (e^{\mu m \Delta} - e^{\mu(m-1)\Delta}) \leq \mu e^{\mu s} \Delta$ и, стало быть, может быть сделана равномерно произвольно малой выбором достаточно малого Δ .

Покажем теперь, что при $m = 1, \dots, k$

$$\mathbf{P}\{Z_n \in \Delta(z_m)\} = W_n(z_m) - W_n(z_m + \Delta) \sim \frac{n\mu\Delta}{\varphi(\mu)} V^0(z). \quad (53)$$

Мы отправляемся от представления (26), которое вместе с (25) влечет, что левая часть в (53) есть

$$\begin{aligned} \frac{n}{\varphi(\mu)} \mathbf{E} \left[\mu \int_{z_m + \alpha_+ - Z_{n-1}}^{z_m + \Delta + \alpha_+ - Z_{n-1}} V^0(u) du + V^0(z_m + \alpha_+ - Z_{n-1}) \right. \\ \left. - V^0(z_m + \Delta + \alpha_+ - Z_{n-1}); |Z_{n-1}| < \varepsilon z \right] + o(n^2 z^{1-b} V^0(z)). \end{aligned}$$

Математическое ожидание первого члена внутри квадратных скобок по указанному событию, очевидно, асимптотически эквивалентно $\mu V^0(z)\Delta$, тогда как в силу (3)

$$\begin{aligned} V^0(t) - V^0(t + \Delta) &= V^0(t) \left[1 - \left(1 + \frac{\Delta}{t} \right)^{-\beta-1} \right] + V^0(t + \Delta) \left[\frac{L(t)}{L(t + \Delta)} - 1 \right] \\ &= o(V^0(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что вклад двух последних членов под знаком ожидания будет пренебрежимо мал. Что касается остаточного члена, так как по предположению $z > cn^\kappa$, $\kappa > 1/(\beta-1)$, то можно выбрать b так, чтобы $\kappa = 1/(b-1)$ и тем самым $z^{1-b} < cn^{-1}$. Это показывает, что остаточный член в нашем представлении есть $o(nV_0(z))$.

Тем самым соотношение (53) установлено, и для вычисления (52) нам осталось рассмотреть условные вероятности

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n \in \Delta(z_m)) \\ &= \mathbf{P}\left\{ \max_{n-j \leq i \leq n} [Z_i - z - (\alpha_+ - g)(n-i)] > 0 \mid Z_n \in \Delta(z_m) \right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{ \max_{n-j \leq i \leq n} [Z_i - Z_n - (m-1)\Delta - (\alpha_+ - g)(n-i)] > 0 \mid Z_n \in \Delta(z_m) \right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ \max_{i \leq j} T_i^{(n)} > (m-1)\Delta \mid Z_n \in \Delta(z_m) \right\}, \quad (54) \end{aligned}$$

где $T_i^{(n)}$ — обращенное во времени блуждание со скачками $\tau_i^{(n)} = \tau_{n-i+1}$:

$$T_i^{(n)} = \tau_1^{(n)} + \dots + \tau_i^{(n)} = T_n - T_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Заметим, что событие под знаком последней вероятности выражается лишь через случайные величины $\zeta_{n-j+1}, \zeta_{n-j+2}, \dots, \zeta_n$, тогда как совместное условное распределение последних будет близко к безусловному распределению $\zeta_1, \dots, \zeta_j$. Действительно, следуя замечанию в начале § 4 [7], для любого фиксированного ограниченного борелевского множества B мы можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_n \in B | Z_n \in \Delta(z_m)) &= \int_B \mathbf{P}(\zeta_n \in du | Z_n \in \Delta(z_m)) \\ &= \int_B \mathbf{P}\{\zeta_n \in du\} \frac{\mathbf{P}\{Z_{n-1} \in \Delta(z_m - u)\}}{\mathbf{P}\{Z_n \in \Delta(z_m)\}} \\ &\rightarrow \mathbf{P}\{\zeta_1 \in B\}, \end{aligned}$$

поскольку отношение вероятностей под знаком интеграла стремится к единице в силу (53). Точно так же устанавливается, что для любого фиксированного j совместное условное распределение вектора $(\zeta_{n-j+1}, \zeta_{n-j+2}, \dots, \zeta_n)$ при условии $Z_n \in \Delta(z_m)$ сходится к безусловному распределению $(\zeta_1, \dots, \zeta_j)$. Стало быть,

$$\mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n \in \Delta(z_m)) \leq \mathbf{P}\left\{\max_{i \leq j} T_i > (m-1)\Delta\right\}(1 + o(1)). \quad (55)$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n \in \Delta(z_m)) \geq \mathbf{P}\left\{\max_{i \leq j} T_i > m\Delta\right\}(1 + o(1)). \quad (56)$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}\left\{\max_{i \leq j} T_i > y\right\} = \mathbf{P}\{\bar{T} > y\} + \gamma_j, \quad (57)$$

где $\gamma_j = \gamma_j(y) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in [0, s]$, поскольку $\bar{T} < \infty$ п.н.

Собирая теперь вместе соотношения (53), (55) и (57), мы получаем для суммы (52) верхнюю оценку

$$S \leq (1 + o(1)) n \frac{\mu V^0(z)}{\varphi(\mu)} \sum_{m=1}^k \Delta e^{\mu m \Delta} [\mathbf{P}\{\bar{T} > (m-1)\Delta\} + \gamma_j].$$

Фиксируя произвольно малое $\delta > 0$, всегда можно выбрать j столь большим, чтобы $\gamma_j < \delta$, а Δ — столь малым, чтобы и относительная погрешность аппроксимации интеграла в (51) суммой (52), и таковая для аппроксимации

$$\sum_{m=1}^k \Delta e^{\mu m \Delta} \mathbf{P}\{\bar{T} > (m-1)\Delta\} \approx \int_0^s e^{\mu y} \mathbf{P}\{\bar{T} > y\} dy$$

каждая не превосходили δ . Вместе с аналогичным рассуждением для нижней оценки (использующим (56) вместо (55)) это показывает, что при $j = j(n)$, стремящемся к ∞ достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, интеграл в (51) асимптотически эквивалентен величине

$$\frac{nV^0(z)}{\varphi(\mu)} \int_0^s \mu e^{\mu y} \mathbf{P}\{\bar{T} > y\} dy = \frac{nV^0(z)}{\varphi(\mu)} [\mathbf{E}(e^{\mu \bar{T}}; \bar{T} \leq s) + e^{\mu s} \mathbf{P}\{\bar{T} > s\} - 1]$$

(здесь использовано интегрирование по частям). Тем самым установлено асимптотическое поведение второго члена в правой части (47), тогда как для первого оно найдено в теореме 1. Сумма этих асимптотик, с учетом сделанного в начале доказательства замечания о возможности замены G_n на $G_{n,j}$, и дает желаемое представление (44).

Чтобы доказать (45), заметим, что $\mathbf{P}(G_{n,j}) = \mathbf{P}(G_{n,j}; S_n > x - s) + \mathbf{P}(G_{n,j}; S_n \leq x - s)$, где

$$\mathbf{P}(G_{n,j}; S_n \leq x - s) \leq \mathbf{P}(G_{n,j}) \mathbf{P}\left\{\min_{k \leq j} S_k \leq (j - k)g - s\right\},$$

так что при фиксированном j второй сомножитель в правой части этого неравенства можно сделать произвольно малым, выбирая достаточно большое s . Вновь обращаясь к замечанию в начале доказательства теоремы (о возможности замены G_n на $G_{n,j}$), мы выводим, что желаемый результат будет немедленно следовать из (44), коль скоро мы установим соотношение

$$\mathbf{E}e^{\mu \bar{T}} < \infty, \quad (58)$$

поскольку в этом случае $\mathbf{E}(e^{\mu \bar{T}}; \bar{T} \leq s) + e^{\mu s} \mathbf{P}\{\bar{T} > s\} \rightarrow \mathbf{E}e^{\mu \bar{T}} < \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Чтобы доказать (58), заметим, что в силу неравенства Чебышева из (43) следует, что

$$\mathbf{P}\{\bar{T} > t\} \leq \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}\{T_k > t\} \leq e^{-\mu t} \sum_{k \geq 0} \psi^k(\mu) = \frac{e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu \varepsilon}},$$

так что $\mathbf{E}e^{\lambda \bar{T}} < \infty$ для любого $\lambda \in [0, \mu)$. По теореме о монотонной сходимости нам осталось доказать, что и $\lim_{\lambda \uparrow \mu} \mathbf{E}e^{\lambda \bar{T}} < \infty$. Но последнее соотношение следует из факторизационного тождества (см., например, [6, § 18] или [8])

$$1 - \psi(\lambda) = \frac{w(\lambda)}{\mathbf{E}e^{\lambda \bar{T}}}, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где $w(\lambda)$ есть функция, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и непрерывная при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Действительно, из (43) мы видим, что функция $\mathbf{E}e^{\lambda \bar{T}} = w(\lambda)/(1 - \psi(\lambda))$ аналитична при $\operatorname{Re} \lambda \in (0, \mu)$ и непрерывна в замкнутой полосе $\operatorname{Re} \lambda \in [0, \mu]$. Тем самым доказательство соотношения (58), а вместе с ним и части (i) теоремы 4 завершено.

(ii) Доказательство этой части мало отличается от такового для части (i). В частности, представление (48) остается справедливым, в то время как, скажем, вместо (54) мы получим

$$\mathbf{P}(H_{n,j} | Z_n \in \Delta(z_m)) \leq \mathbf{P}\left\{\max_{i \leq j} [T_i^{(n)} + g(n) - g(n-i) - gi] > (m-1) \Delta | Z_n \in \Delta(z_m)\right\}.$$

В остальном рассуждение будет практически идентично проведенному для доказательства части (i).

3. Рассмотрим теперь случай, когда выполнено условие $[B_v]$. Так как этот случай по сути может быть сведен к комбинации случаев $[B_0]$ и $[B_1]$, мы не станем вначале рассматривать случай кусочно-линейной границы, а сразу приведем общий результат. Упрощения, которые могут быть сделаны в формулировке утверждения в вышеупомянутом частном случае, почти очевидны.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (3) и $[B_v]$, $x := g(m)$. Тогда для некоторого $c > 0$ и любого $\kappa > 1/(\beta - 1)$ мы имеем при $\alpha = x/t$ и $z = x - \alpha_+ t$ асимптотику

$$\mathbf{P}(G_n) \sim e^{-m\Lambda(\alpha)} \frac{mV^0(z)}{\varphi(\mu)} \mathbf{E} \exp\left(\mu \max(\bar{T}^{(g)}, Y^{(g)})\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x > \alpha_+ t + c(n^\kappa + (n \ln n)^{1/2})$, где случайные величины $\bar{T}^{(g)}$ и $Y^{(g)}$ независимы, причем

$$\bar{T}^{(g)} \stackrel{d}{=} \sup_{k \geq 0} (T_k + g(m) - g(m-k) - gk), \quad Y^{(g)} \stackrel{d}{=} \sup_{k \geq 1} (S_k - g(m+k) + x),$$

а экспоненциальный момент конечен. Здесь мы продолжили границу g влево, полагая $g(k) = x - (m-k)g$, $k < 0$.

Доказательство теоремы 5. Аналогично (48), но преобразуя лишь распределения первых m величин X_i , мы получаем для $y < 0$ и $A = \{\max_{k \leq n} (s_k - g(k)) > 0, s_m \in x + dy\}$ представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(G_n; S_m \in x + dy) \\ &= \varphi^m(\mu) \int_A e^{-\mu s_m} \mathbf{P}\{X_1^{(\alpha_+)} \in dx_1, \dots, X_m^{(\alpha_+)} \in dx_m, \\ & \quad X_{m+1} \in dx_{m+1}, \dots, X_n \in dx_n\} \\ &= e^{-m\Lambda(\alpha)} e^{-\mu y} \mathbf{P}(H_m \cup G_{m,n,y} | Z_m = z + y) \mathbf{P}\{Z_m \in z + dy\}, \quad (59) \end{aligned}$$

где события

$$H_m = \left\{ \max_{k \leq m} (Z_k - h(k)) > 0 \right\}$$

для границы $h(k) = g(k) - \alpha_+ k$, $k = 1, \dots, m$, и

$$G_{m,n,y} = \left\{ \max_{k \leq n-m} [(S_{m+k} - S_m) - (g(m+k) - x)] > -y \right\}$$

независимы.

Легко видеть, что при условии $Z_m = z + y$ справедливо

$$H_m = \left\{ \max_{k \leq m} [(T_m - T_{m-k}) + g(m) - g(m-k) - gk] > -y \right\}$$

и что, используя рассуждение из доказательства теоремы 4, мы получаем, грубо говоря, что $\mathbf{P}(H_m | Z_m = z + y) \rightarrow \mathbf{P}\{\bar{T}^{(g)} > -y\}$ (более аккуратно, здесь вновь требуется рассмотрение событий вида $G_{n,j}$ и $H_{n,j}$, аппроксимация интегралов конечными суммами и т.п.). Таким образом, правая часть (59) принимает вид

$$e^{-m\Lambda(\alpha)} e^{-\mu y} [\mathbf{P}\{\max(\bar{T}^{(g)}, Y^{(g)}) > -y\} + o(1)] \mathbf{P}\{Z_m \in z + dy\}.$$

В остальном доказательство близко следует рассуждению, устанавливающему теорему 4.

4. Случай $[B_{0,0}]$ в определенном смысле примыкает как к $[B_0]$, так и к $[B_1]$. Напомним, что мы рассматриваем здесь границу вида

$$g(k) = g(0) + g_+ k$$

и что для случайных величин $X_j^* = X_j - g_+$ мы имеем теперь $\varphi^*(\mu) = 1$. Мы воспользуемся величинами S_k^* и η , определенными перед формулировкой теоремы 3.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (3) и $[B_{0,0}]$. Если $g(0)/n + g_+ < \alpha_+ - \epsilon$ для фиксированного $\epsilon > 0$, то при $x := g(0) \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(G_n) = r_1 e^{-\mu x} (1 + o(1)), \quad (60)$$

где

$$r_1 = \frac{1 - \mathbf{P}\{\eta < \infty\}}{\mu \mathbf{E}(S_\eta^* e^{\mu S_\eta^*}; \eta < \infty)}. \quad (61)$$

Доказательство. Из определения величины α' (данного после (14); оно распространяется очевидным образом и на общие границы $g(k)$), вогнутости линий уровня и (13) следует, что $\alpha' = p_{\alpha'}(1) \leq x/n + g_+ < \alpha_+ - \epsilon$ в силу предположений теоремы. Стало быть, $\Lambda(\alpha')/\Lambda(\alpha_+) < 1$, так что $t_{\alpha'} < 1$ (см. (12)). Следовательно, при $t \in (t_{\alpha'}, 1]$ линия уровня $p_{\alpha'}(\cdot)$ проходит строго ниже прямой линии, заданной уравнением (13), и в силу вогнутости мы получаем $p_{\alpha'}(t) < x/n + g_+ t - \epsilon'$, $\epsilon' > 0$, при всех t , близких к 1.

Поэтому, аналогично доказательству теоремы 3, можно показать, что вероятность пересечения рассматриваемой границы в момент k , близкий к n или наступающий после n , будет пренебрежимо мала, так что

$$\mathbf{P}(G_n) \equiv \mathbf{P}\left\{ \max_{k \leq n} (S_k - g_+ k) > x \right\} \sim \mathbf{P}\left\{ \sup_{k \geq 0} S_k^* > x \right\}.$$

Теперь желаемое представление (60)–(61) следует непосредственно из [6, теорема 11, гл. 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p.
2. *Боровков А. А.* Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 2, с. 137–171; в. 4, с. 377–392.
3. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. — Сиб. матем. журн., 1965, т. 3, № 5, с. 645–694.
4. *Боровков А. А.* Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II. — Сиб. матем. журн., 1964, т. 5, № 2, с. 253–289; № 2, с. 750–767.
5. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
6. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
7. *Боровков А. А.* О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
8. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с.
9. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с регулярными распределениями скачков. — Докл. РАН, 2000, т. 371, № 1, с. 14–16.
10. *Боровков А. А., Боровков К. А.* О вероятностях больших уклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
11. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviation Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993, 346 p.
12. *Höglund T.* A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, v. 49, p. 105–117.
13. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых случайных слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 387–397.
14. *Нагаев А. В.* Крамеровские большие уклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
15. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
16. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
17. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
18. *Stone C.* On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II, part 2. Ed. by I. Negman. Berkeley: Univ. California Press, 1967, p. 217–224.
19. *Vinogradov V.* Refined Large Deviation Limit Theorems. Harlow: Longman, 1994, 212 p.

Поступила в редакцию
23.V.2000