Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Толмачев, О ладкости и сингулярности инвариантных мер и переходных вероятностей бесконечномерных диффузий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 798–808

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:18:34

Теоремы 1 и 2 естественным образом переносятся на случай, когда процесс $\xi(t)$ задан на конечном интервале, если заметить, что

$$P \left\{ \sup_{|t| \leq T} |S_a^b(t)| > x \right\} \leq P \left\{ \|c(t) S_a^b(t)\|_C > x |c(\beta)| \right\},$$

где $|c(\beta)| = \inf_{|t| \leq T} |c(t)| > 0$.

Оценки (2) и (5) совпадают по порядку с аналогичными оценками для гауссовских интегралов [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. — Теория вероятн. и матем. статистика, 1989, № 40, с. 37–44.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. А. Об оценках распределения супремума гауссовского стационарного процесса. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 3, с. 314–323.

Поступила в редакцию
2.VIII.1993

Исправленный вариант
20.IV.1998

© 1998 г.

ТОЛМАЧЕВ Н. А.*

О ГЛАДКОСТИ И СИНГУЛЯРНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР И ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИФFUЗИЙ¹⁾

В заметке построены два примера невырожденной диффузии, заданной стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + B(\xi_t) dt$$

в гильбертовом пространстве X , где $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$ и $B(x) = \Lambda x + v(x)$, Λ — непрерывный линейный оператор на X , а σ_0 и v — бесконечно дифференцируемые по Фреше отображения со значениями в пространстве ядерных операторов на X и в X соответственно, со всеми ограниченными производными, такие, что:

(i) в первом примере $\Lambda x = -\frac{1}{2}x$ и диффузия ξ_t обладает (единственной) инвариантной вероятностной мерой, которая вместе с переходными вероятностями не имеет направлений дифференцируемости (и даже непрерывности);

(ii) во втором примере ξ_t имеет две различные инвариантные вероятностные меры ν_1 и ν_2 , при этом ν_1 эквивалентна некоторой гауссовской мере и дифференцируема, а ν_2 не имеет направлений дифференцируемости (и даже непрерывности).

*Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия. e-mail: vbogach@mech.math.msu.su

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-15-96865 и 97-01-00932, и российско-германского гранта 436 RUS 113/343/O(R).

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать σ_0 и v равными нулю вне ε -шара и с нормами, не превосходящими ε (в пространствах ядерных операторов на X и в X соответственно).

Ключевые слова и фразы: бесконечномерное пространство, диффузия, переходные вероятности, инвариантная мера, гладкость и сингулярность мер, исключительное множество, гильбертово пространство.

1. Введение. Аналитические свойства переходных вероятностей и инвариантных мер бесконечномерных диффузий активно изучались в последние три десятилетия. При разнообразных ограничениях на коэффициенты различные результаты были получены в работах [16], [18], [19], [21], [1], [17], [23], [2], [13]–[15], [24], [10], [11], [8], [9] (см. также библиографию в [7]).

В [10] и [11] было показано, что если μ — инвариантная вероятность для диффузии ξ на $\mathbf{R}^n$ с единичным диффузионным оператором и сносом $B \in L^2(\mu, \mathbf{R}^n)$, то μ обладает плотностью p из соболевского класса $H^{1,1}(\mathbf{R}^n)$, и, более того, ее логарифмическая производная $\beta^\mu := \nabla p/p$ лежит в $L^2(\mu, \mathbf{R}^n)$. Этот результат был перенесен в [9] на случай диффузии с непостоянным равномерно липшицевым и равномерно невырожденным диффузионным оператором σ . На самом деле соответствующие результаты о инвариантных мерах были найдены в более общей постановке — для эллиптического уравнения

$$L^* \mu = 0, \quad (*)$$

где $Lf = \text{tr}(\sigma f'') + (B, f')$ и уравнение $(*)$ понимается в смысле слабого решения

$$\int Lf(x) \mu(dx) = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

В работах [9] и [11] были получены некоторые бесконечномерные аналоги этих результатов.

А именно, пусть (X, H, γ) — абстрактное винеровское пространство (с централизованной гауссовской мерой γ), $B(x) = -x + v(x)$, где $v: X \rightarrow H$ — ограниченное борелевское отображение, и $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$, где $\sigma_0(\cdot)$ — измеримое отображение со значениями в пространстве симметричных ядерных операторов на H , удовлетворяющее дополнительным техническим требованиям. Предположим, что вероятностная мера μ на X удовлетворяет уравнению $(*)$ с $Lf = \text{tr}_H(\sigma f'') + (f', B)$, где класс $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ заменен классом $\mathcal{FC}^\infty$ всех функций вида

$$f(x) = \varphi(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^n), \quad l_i \in X^*.$$

Тогда мера μ абсолютно непрерывна относительно γ , представима в виде $\mu = \varrho^2 \gamma$ с ϱ из соболевского класса $H^{2,1}(\gamma)$, и μ обладает векторной логарифмической производной β^μ (в частности, μ дифференцируема по всем направлениям из H). Заметим, что этот результат представляет собой решение известной проблемы Шигекавы [23].

Естественно, возникает вопрос: можно ли перенести конечномерные результаты во всей их общности на бесконечномерный случай? Цель этой работы — привести два примера, из которых следует, что в бесконечномерном случае необходимы определенные дополнительные предположения (типа рассмотренных в [9]). Оба примера построены для диффузий в гильбертовом пространстве X , но могут быть перенесены и на более общие локально выпуклые пространства.

В первом примере для произвольного $\varepsilon > 0$ мы строим гладкое отображение σ_0 со значениями в пространстве ядерных операторов на X и гладкое отображение $v: X \rightarrow X$ с $\|\sigma_0(\cdot)\|_{L(1)(X)} \leq \varepsilon$ и $\|v(\cdot)\| \leq \varepsilon$ такие, что существует единственная вероятностная мера μ , инвариантная для диффузии ξ , заданной стохастическим

дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + B(\xi_t) dt,$$

где $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$, $B(x) = -\frac{1}{2}x + v(x)$, но μ не имеет направлений дифференцируемости (и даже непрерывности).

Во втором примере мы строим σ и v такого же типа, $B(x) = \Lambda x + v(x)$, где Λ — непрерывный линейный оператор на X , а диффузия ξ имеет две различные инвариантные вероятности ν_1 и ν_2 , причем ν_1 эквивалентна гауссовской вероятности и имеет векторную логарифмическую производную β^{ν_1} , в то время как ν_2 не имеет направлений дифференцируемости.

Вопрос остается открытым для $\sigma = I$.

2. Вспомогательные результаты. Пусть X здесь и далее обозначает бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, а $L^{(1)}(X)$ — пространство ядерных операторов на X с его естественной нормой.

Скажем, что H — гильбертово пространство, плотно вложенное в X оператором Гильберта–Шмидта, если $H = T(X)$ для некоторого инъективного неотрицательно-го самосопряженного оператора Гильберта–Шмидта на X и на H задано скалярное произведение $(a, b)_H = (T^{-1}a, T^{-1}b)_X$.

С каждым таким H связан винеровский процесс W_t на X , заданный формулой

$$W_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} w_t^n(\omega) e_n,$$

где $\{w_t^n\}$ — последовательность независимых стандартных винеровских процессов на некотором вероятностном пространстве, а $\{e_n\}$ — произвольный ортонормальный базис в H . Заметим, что можно взять $e_n = t_n \varphi_n$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормальный базис в X , состоящий из собственных векторов оператора T , и t_n — соответствующие им собственные значения. Пару (H, X) иногда называют оснащенным гильбертовым пространством.

Дадим теперь определения, связанные с интуитивным понятием «тонкого» множества.

Для любого вектора e из X обозначим через $\mathcal{A}_e^{\mathcal{B}}$ класс всех борелевских множеств A таких, что $\text{mes}(t: x + te \in A) = 0$ для всех $x \in X$, где mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность в X и $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}\{e_n\}$ обозначает класс всех множеств вида $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathcal{A}_{e_n}^{\mathcal{B}}$ для всех n .

Множество A называется *исключительным* (в смысле Ароншайна) ($A \in \mathcal{A}^{\mathcal{B}}$), если оно является элементом класса $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}\{e_n\}$ для каждой последовательности $\{e_n\}$ с плотной в X линейной оболочкой.

Борелевское множество A называется *нуль-гауссовским* ($A \in \mathcal{G}^{\mathcal{B}}$), если каждая невырожденная гауссовская мера на X (т.е. мера, топологический носитель которой совпадает со всем X) обращается на нем в нуль.

Борелевское множество A называется *пренебрежимым* ($A \in \mathcal{P}^{\mathcal{B}}$), если на нем обращается в нуль каждая мера, дифференцируемая по всем направлениям из некоторого плотного в X подпространства.

Все эти классы совпадают с классом борелевских множеств лебеговой меры нуль в конечномерном случае. Известно также [3], [7], что $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} \subset \mathcal{G}^{\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{\mathcal{B}}$, но остается открытым вопрос: всегда ли последнее включение строгое?

Борелевская мера μ на X называется *дифференцируемой* по направлению h , если для каждого борелевского B функция

$$t \mapsto \mu(B + th) \quad (1)$$

дифференцируема в каждой точке.

Если для всех $B \in \mathcal{B}(X)$ функция (1) непрерывна, то μ называется *непрерывной* по направлению h .

Плотно непрерывной называют меру, непрерывную по направлениям из плотного в X подпространства.

Заметим, что указанная дифференцируемость равносильна существованию μ -интегрируемой функции β_h^μ (называемой логарифмической производной μ по направлению h) такой, что

$$\int \partial_h f(x) \mu(dx) = - \int f(x) \beta_h^\mu(x) \mu(dx)$$

для каждой гладкой цилиндрической функции f (т.е. $f(x) = \varphi(l_1(x), \dots, l_n(x))$, где $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $l_i \in X^*$).

Пусть H вложено в X как описано выше. Скажем, что μ имеет векторную логарифмическую производную β_H^μ по H , если $\beta_H^\mu: X \rightarrow X$ — борелевское отображение и для всех $k \in X$ функция $(k, \beta_H^\mu)_X$ — логарифмическая производная μ по направлению $T^2 k$.

Например, если μ — центрированная гауссовская мера на X с пространством Камерона–Мартина H , то $\beta_H^\mu(x) = -x$. Подробнее векторные логарифмические производные описаны в работах [6], [7] и [11].

В качестве вспомогательного результата рассмотрим пример квадратичного преобразования F на X , которое отображает борелевское множество положительной меры для некоторой невырожденной гауссовой меры в исключительное множество. Здесь мы используем идею из [3].

Для произвольного самосопряженного ядерного оператора A на X обозначим через α_n собственные значения оператора A и через e_n — его собственные векторы. Пусть $\Phi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(y, e_n)e_n$ и $\Phi(x) = \Phi_2(x, x)$. Очевидно, что Φ_2 — непрерывная билинейная форма на X и Φ — квадратичная форма. Рассмотрим отображение $F(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n)^2 e_n$ (т.е. $F = I + A\Phi$ является квадратичным возмущением тождественного отображения).

Предложение 1. *Преобразование F осуществляет диффеоморфизм некоторых окрестностей нуля U и V , который отображает некоторое борелевское подмножество окрестности U , не являющееся пренебрежимым, на исключительное борелевское подмножество V .*

Доказательство. Возьмем самосопряженный инъективный компактный оператор K на X с плотным образом так, что $A(X) \cap K(X) = 0$. Это можно сделать согласно первому следствию теоремы 1 из [27]. Преобразование F бесконечно дифференцируемо по Фреше, $F(0) = 0$, и $F'(0)$ — тождественное отображение. По теореме об обратной функции F является локальным диффеоморфизмом некоторых окрестностей нуля U и V . Пусть γ — такая невырожденная центрированная гауссовская мера, что $\gamma(K(X)) = 1$ (например, мера γ с преобразованием Фурье $\tilde{\gamma}(x) = \exp\{-(Qx, x)\}$, где Q — ядерный оператор с теми же собственными векторами, что и у K , и собственными значениями $q_n = n^{-2}k_n^2$, где k_n — соответствующие собственные значения оператора K).

С одной стороны, $\gamma(U \cap K(X)) = \gamma(U) > 0$, поэтому $U \cap K(X)$ не пренебрежимо. С другой стороны, мы покажем, что $F(K(X))$ является исключительным множеством, а значит, $F(U \cap K(X))$ также исключительно. То, что наши множества измеримы, следует из известной теоремы Лузина–Куратовского (см., например, § 2.2 из [26]).

Достаточно показать, что любая прямая пересекает $F(K(X))$ не более чем в двух точках. Пусть $F(y) - F(x) = t\ell$, $t \in \mathbb{R}$, $\ell \in X$, где $x, y \in K(X)$. Поскольку $F(K(X)) \subset K(X) + A(X)$, можно положить $\ell = a + Ab$, где $a \in K(X)$, $b \in X$. Напомним, что $K(X) \cap A(X) = 0$ и A — инъективный оператор, следовательно, равенство $y - x +$

$A\Phi(y) - A\Phi(x) = ta + tAb$ влечет

$$y = x + ta \quad \text{и} \quad \Phi(y) - \Phi(x) = tb. \quad (2)$$

Итак, $\Phi(x + ta) - \Phi(x) = tb$, т.е. $t\Phi(a) + 2\Phi_2(x, a) = b$ при $t \neq 0$. Если найдутся два других значения t , при которых выполнено последнее уравнение, то $\Phi(a)$ должно быть нулем, что влечет $a = 0$ и $\Phi_2(x, a) = 0$, т.е. $b = 0$ и $\ell = 0$ — противоречие.

Пусть $\varphi: \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция ($\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$) такая, что $\varphi(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \delta/2$, $\varphi(t) = 0$ при $t \geq \delta$ и $\varphi'(t) < 0$ при $\delta/2 < t < \delta$. Пусть также $V_\delta = \{x: \|x\| \leq \delta\}$, $0 < \delta < 1$, и $\|\cdot\|_0$ — равномерная норма в пространстве $C[0, 1]$. Положим

$$F(x) = x + G(x) \equiv x + \varepsilon \cdot \varphi(\|x\|) \cdot A\Phi(x). \quad (3)$$

Предложение 2. Пусть F определено посредством (3), где A и Φ те же, что в предложении 1 и ε достаточно мало. Тогда

- (i) преобразования $F: X \rightarrow X$ и $F: V_\delta \rightarrow V_\delta$ биективны и $F(x)|_{V_\delta^c} = x$;
- (ii) F бесконечно дифференцируемо по Фреше в X и является локальным диффеоморфизмом;

(iii) F обладает всеми свойствами, указанными в предложении 1, т.е. F осуществляет диффеоморфизм некоторых окрестностей нуля U и V , который отображает некоторое борелевское подмножество окрестности U , не являющееся пренебрежимым, на исключительное борелевское подмножество V .

Доказательство. Выпишем оценку для приращения $G(x) - G(y)$:

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \left\| \varepsilon A [\varphi(\|x\|) \Phi(x) - \varphi(\|y\|) \Phi(y)] \right\| \\ &\leq \varepsilon \|A\| \cdot \left[|\varphi(\|x\|)| \|\Phi(x) - \Phi(y)\| + \|\Phi(y)\| \cdot |\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|)| \right]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|^2 &= \left\| \sum_1^\infty (x_n^2 - y_n^2) e_n \right\|^2 = \sum_1^\infty (x_n^2 - y_n^2)^2 \\ &= \sum_1^\infty (x_n + y_n)^2 (x_n - y_n)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

где $x_n = (x, e_n)$, $y_n = (y, e_n)$, а $|\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|)| \leq \|\varphi'\|_0 \cdot \|x\| - \|y\| \leq \|\varphi'\|_0 \cdot \|x - y\|$. Пусть $\varepsilon = \alpha(\|A\| \cdot \|\varphi'\|_0 \delta(2 + \delta))^{-1}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &\leq \varepsilon \|A\| \cdot [\|\varphi\|_0 \cdot 2\delta \|x - y\| + \delta^2 \|\varphi'\|_0 \cdot \|x - y\|] \\ &\leq \varepsilon \|A\| \cdot \|\varphi'\|_0 (2\delta + \delta^2) \|x - y\| < \alpha \|x - y\| \end{aligned} \quad (G)$$

при $x, y \in V_\delta$.

Покажем, что F инъективно. Если $x, y \in V_\delta$, то $F(x) - F(y) = 0$ и (G) дает $\|x - y\| = \|G(x) - G(y)\| < \alpha \|x - y\|$, т.е. $x = y$; при $x \in V_\delta, y \notin V_\delta$ имеем $F(x) - F(y) = x - y + G(x) = 0$ и, учитывая $\varphi(\|x\|) = \varphi(\|y\|) = 0$ и $\|\Phi(x)\| \leq \|x\|^2$, получаем оценку $\|x - y\| < \alpha \|x - y\|$; наконец, при $x, y \notin V_\delta$ отображение F является тождественным.

Для завершения доказательства (i) нам надо показать, что для любого $y \in V_\delta$ найдется такой элемент x , что $F(x) = y$. Рассмотрим отображение $f(x) = y - G(x)$ в $V_{2\delta}$. Утверждение (i) следует из теоремы о сжимающих отображениях, примененной

к f . В самом деле, как видно из (G), f — сжатие, кроме того, $f(V_{2\delta}) \subset V_{2\delta}$, поскольку для таких x имеем

$$\|G(x)\| = \varepsilon \|A\| \cdot \|\varphi\|_0 \cdot 4\delta^2 \leq \varepsilon (\|A\| \cdot 2\delta \|\varphi'\|_0) \delta < \delta,$$

и, значит, $\|f(x)\| \leq \|y\| + \|G(x)\| < 2\delta$.

К пунктам (ii) и (iii) применимы те же рассуждения, что и в предложении 1, причем при доказательстве (iii) в качестве непренебрежимого подмножества окрестности U можно взять $V_{\delta'} \subset U$, где $\delta' \leq \delta/2$. В этом случае уравнения (2) перейдут в

$$y = x + ta \quad \text{и} \quad \varepsilon(\Phi(y) - \Phi(x)) = tb. \quad (2')$$

З а м е ч а н и е 1. В представленной ниже конструкции существенно, что для любой гауссовской меры γ на X всегда найдется компактный самосопряженный оператор K на X с $\gamma(K(X)) = 1$. В соответствии с [27], существует другой инъективный самосопряженный компактный оператор K_0 с плотным образом в X такой, что $K_0(X) \cap K(X) = 0$, и, следовательно, существует такой инъективный симметричный положительный ядерный оператор A с плотным образом, что $A(X) \cap K(X) = 0$. Поэтому для всякой невырожденной гауссовской меры γ ядерный оператор A со свойствами, описанными в предложениях 1 и 2, может быть выбран так, что F отображает множество положительной γ -меры на исключительное множество.

Обратно, для любого инъективного симметричного ядерного оператора A всегда найдется оператор K с описанными выше свойствами.

3. Основные результаты. Теперь мы готовы перейти к основным результатам статьи.

Теорема 1. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют гильбертово пространство H , плотно вложенное в X посредством оператора Гильберта–Шмидта, гладкое отображение σ_0 со значениями в пространстве симметричных неотрицательных ядерных операторов в X и гладкое отображение $v: X \rightarrow X$ такие, что диффузия ξ , порожденная стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + B(\xi_t) dt, \quad (4)$$

где $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$, $B(x) = -\frac{1}{2}x + v(x)$ и W_t — винеровский процесс в X , ассоциированный с H , обладает единственной инвариантной мерой μ , которая не имеет отличных от нулевых направлений дифференцируемости (и даже непрерывности). Кроме того, переходные вероятности $P_t(x, \cdot)$ диффузии ξ также не имеют нетривиальных направлений дифференцируемости и непрерывности. При этом отображения $\sigma_0(x)$ и $v(x)$ равны нулю вне V_δ , $\|\sigma_0(\cdot)\|_1 \leq \varepsilon$ и $\|v(\cdot)\| \leq \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и K — те же, что и в предыдущем пункте, и пусть W_t — винеровский процесс в $K(X)$, ассоциированный с $H := K^2(X)$, а X_t — соответствующий процесс Орнштейна–Уленбека в $K(X)$, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = dW_t - \frac{1}{2} X_t dt.$$

Как известно, существует единственная инвариантная мера γ для X_t , причем γ — центрированная гауссовская мера с воспроизводящим ядром H (а именно, γ — распределение W_1).

В соответствии с формулой Ито (см., например, теорему 5.4 из [19]), для отображения F из предложения 2 имеем

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t [F'(X_s) \circ I] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [F'(X_s)(X_s) + \zeta] ds,$$

где $\zeta = \text{trase} \{F''(X_s) \circ [I \times I]\}$ — след ядерной билинейной формы на H со значениями в X (так как ζ является композицией непрерывной билинейной формы на $K(X)$ с оператором Гильберта–Шмидта естественного вложения $I: H \rightarrow K(X)$).

Таким образом, процесс $\xi_t := F(X_t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(\xi_s) dW_s + \int_0^t B(\xi_s) ds,$$

где

$$\sigma(x) = F'(F^{-1}(x)), \quad B(x) = -\frac{1}{2} F'(F^{-1}(x)) F^{-1}(x) - \frac{1}{2} \zeta(F^{-1}(x)).$$

Поскольку $F(x) = x$ вне шара V_δ , то $F' = I$ и $F'' = 0$ вне V_δ . Значит, $\sigma(x)$ и $B(x)$ могут быть записаны в виде $I + \sigma_0(x)$ и $-\frac{1}{2}x + v(x)$ соответственно, с $\sup_x \|\sigma_0(x)\|_{L^1(X)}$ и $\sup_x \|v(x)\|_X$ произвольно малыми, если нормы оператора A и функции φ из (3) достаточно малы.

Поскольку $\gamma(K(X)) = 1$ и $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, где $\gamma_1(\cdot) = \gamma(\cdot \cap V_{\delta/2})$ и $\gamma_2(\cdot) = \gamma(\cdot \cap V_{\delta/2}^c)$, инвариантная мера $\mu = \gamma \circ F^{-1}$ для $F(X_t)$ может быть представлена в виде: $\mu_1 + \mu_2$, где носитель меры μ_1 — исключительное множество. Как показано в [3], мера Радона μ на X непрерывна вдоль $\{e_n\}$ в точности тогда, когда она обращается в нуль на всех множествах вида $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}\{e_n\}$. Поэтому μ_1 не имеет ненулевых направлений непрерывности, а значит, μ также их не имеет.

Применяя то же разложение к переходным вероятностям $Q_t(x, dy)$ процесса Орнштейна–Уленбека и к переходным вероятностям $P_t(x, dy)$ процесса $F(X_t)$ и замечая, что

$$\begin{aligned} P_t(x, B) &= \mathbf{P}\{F(X_t) \in B | F(X_0) = x\} \\ &= \mathbf{P}\{X_t \in F^{-1}B | X_0 = F^{-1}(x)\} = Q_t(F^{-1}(x), F^{-1}B), \end{aligned}$$

мы получаем, что $P_t(x, \cdot)$ также не имеют ненулевых направлений непрерывности. ($Q_t(y, \cdot)$ — гауссовские меры с тем же линейным пространством Камерона–Мартина H , что и γ .)

Теорема 2. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют гильбертово пространство H , плотно вложенное в X посредством оператора Гильберта–Шмидта, гладкое отображение σ_0 со значениями в пространстве симметричных неотрицательных ядерных операторов в X , гладкое отображение $v: X \rightarrow X$ и непрерывный линейный оператор Λ на X такие, что:

(i) существуют две вероятностные меры ν_1 и ν_2 , инвариантные для диффузии ξ , порожденной стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + B(\xi_t) dt$$

с $\sigma(x) = I + \sigma_0(x)$, $B(x) = \Lambda x + v(x)$ и винеровским процессом W_t , ассоциированным с H ;

(ii) $\|\sigma_0(\cdot)\|_1 \leq \varepsilon$ и $\|v(\cdot)\| \leq \varepsilon$, причем $\sigma_0(x)$ и $v(x)$ равны нулю вне V_δ ;

(iii) мера ν_1 эквивалентна некоторой гауссовской мере и обладает векторной логарифмической производной $\beta_H^{\nu_1}$, в то время как ν_2 не имеет отличных от нулевых направлений дифференцируемости (и даже непрерывности).

Доказательство. Воспользуемся конструкцией из работы [11], где было показано, что найдутся гильбертово пространство H , плотно вложенное в X посредством оператора Гильберта–Шмидта, и две различные центрированные гауссовские меры λ_1, λ_2 на X такие, что существует непрерывный линейный оператор L на X — общий представитель классов $\beta_H^{\lambda_1}$ и $\beta_H^{\lambda_2}$.

Пусть $X = L^2[0, 1]$, $H = W_0^{4,2}[0, 1]$, т.е. соболевское пространство функций, имеющих третью абсолютно непрерывную производную, таких, что

$$f^{(4)} \in L^2[0, 1], \quad f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad 0 \leq j \leq 3.$$

Определим операторы $(A_i, D(A_i))$, $i = 1, 2$, на X следующим образом:

$$A_1 := -\Delta, \quad D(A_1) := \{u \in W^{2,2}[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\},$$

$$A_2 := -\Delta, \quad D(A_2) := \{u \in W^{2,2}[0, 1] \mid u(1) - u'(1) = 0 = u(0) + u'(0)\}.$$

Тогда, как известно, $(A_i, D(A_i))$, $i = 1, 2$, суть инъективные неотрицательные самосопряженные операторы на X , причем $T_i := A_i^{-1}$, $i = 1, 2$, — инъективные неотрицательные самосопряженные операторы Гильберта–Шмидта на X . Для доказательства инъективности заметим, что для всех $u \in D(A_1)$

$$-\int_0^1 u''(t) u(t) dt = \int_0^1 (u'(t))^2 dt + u'u|_0^1 = \int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \int_0^1 (u(t))^2 dt,$$

а для всех $u \in D(A_2)$ имеем

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''(t) u(t) dt &= \int_0^1 (u'(t))^2 dt + u'u|_0^1 = \int_0^1 (u'(t))^2 dt + (u(1))^2 + (u(0))^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (u(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку вложение $H \subset X$ — оператор Гильберта–Шмидта, то найдется инъективный неотрицательный самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта Q на X такой, что $Q(X) = H$ и $|\cdot|_H = |Q^{-1} \cdot|_X$. Легко видеть, что

$$Q(X) = H \subset T_1^2(X) \cap T_2^2(X) \quad \text{и} \quad T_1^{-2}h = T_2^{-2}h \quad \forall h \in H.$$

Через X_n обозначим последовательность, состоящую из указанных пространств X с $A_i^{(n)} := n^2 A_i$ на области определения $D(A_i)$ и $T_i^{(n)} := (A_i^{(n)})^{-1} = n^{-2} T_i$. Пусть Y — гильбертово пространство, являющееся прямой гильбертовой суммой пространств X_n , т.е. Y состоит из всех последовательностей (x_n) , $x_n \in X$, с $\|x\|_0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$; определим операторы S_i , $i = 1, 2$, на Y как прямые суммы операторов $T_i^{(n)}$, т.е. $S_i x = (T_i^{(1)} x_1, T_i^{(2)} x_2, \dots, T_i^{(n)} x_n, \dots)$. Поскольку последовательность норм Гильберта–Шмидта операторов $T_i^{(n)}$ сходится, S_i — также операторы Гильберта–Шмидта. Обозначим через $\tilde{Q}$ следующий оператор Гильберта–Шмидта на Y : $\tilde{Q}(x) = (Qx_1, \dots, n^{-2} Qx_n, \dots)$. Заметим, что пространство $H_0 = \tilde{Q}(Y) = \{(h_n) \in Y: h_n \in H\}$ плотно в Y и, согласно описанной конструкции, $S_1^{-1}h = S_2^{-1}h$ для всех $h \in H_0$. Кроме того, $\tilde{Q}^2(Y) \subset \tilde{Q}(Y)$ и $S_i^2(Y) \subset S_i(Y)$, поскольку $Q^2(X) \subset Q(X)$ и $T_i^2(X) \subset T_i(X)$, $i = 1, 2$.

Пусть μ_i — центрированные гауссовские меры на Y с пространствами Камерона–Мартина $S_i(Y)$, $i = 1, 2$. Принимая во внимание пример 2.5 из [11], непрерывный оператор $\Lambda = -R^* \subset R = S_1^{-2} \tilde{Q}^2 = S_2^{-2} \tilde{Q}^2$ есть общий представитель классов $\beta_{H_0}^{\mu_1}$ и $\beta_{H_0}^{\mu_2}$. Кроме того, μ_1 и μ_2 — инвариантные меры для диффузии η_t , заданной стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\eta_t = dW_t + \Lambda \eta_t dt, \quad \eta_0 = y \in Y,$$

где W_t — винеровский процесс со значениями в Y , порожденный пространством H_0 (т.е. H_0 — пространство Камерона–Мартина для распределения W_1 ; ясно, что W_t

может быть представлен как счетный набор независимых винеровских процессов в пространствах X_n).

Линейное пространство $E = S_1(Y) \cap S_2(Y)$ имеет бесконечную коразмерность в $S_1(Y)$. Действительно, оно содержит ненулевые векторы $v_n = (0, \dots, 0, \varphi, 0, \dots)$, где $\varphi(t) = t(1-t) \in D(A_1) \setminus D(A_2)$. Более того, существует компактный оператор K на Y со следующими свойствами:

- 1) $\mu_2(K(Y)) = 1$,
- 2) $K(Y) \cap S_1(Y)$ имеет бесконечную коразмерность в $S_1(Y)$.

В самом деле, мера μ_2 есть прямое произведение мер γ_n на X_n с пространствами Камерона–Мартина $T_2^{(n)}(X_n)$. Для каждого фиксированного n найдется ненулевой вектор $u_n \in T_1^{(n)}(X_n) \setminus T_2^{(n)}(X_n)$. Известно и может быть проверено непосредственно (см., например, [6]), что существует компактный линейный инъективный оператор K_n на X_n такой, что $u_n \notin K_n(X_n)$ и $\gamma_n(K_n(X_n)) = 1$. Пусть K_0 — прямая сумма операторов K_n . Тогда $\mu_2(K_0(Y)) = 1$ и $K_0(Y) \cap S_1(Y)$ имеет бесконечную коразмерность в $S_1(Y)$. Наконец, найдется меньшее подпространство полной меры в $K_0(Y)$ вида $K(Y)$, где K — компактный оператор на Y (заметим, что $K_0(Y)$ — гильбертово пространство с нормой $\|K_0^{-1} \cdot\|_Y$, а значит, каждая мера на нем сосредоточена на образе некоторого компактного оператора).

Рассмотрим пространство $Y_1 := S_1(Y)$ с гильбертовой нормой $\|S_1^{-1} \cdot\|_Y$. Согласно [27], мы можем взять инъективный симметричный ядерный оператор $A_{00}: Y_1 \rightarrow Y_1$ такой, что $A_{00}(Y_1) \cap K_0(Y) = 0$. Следовательно, существует инъективный неотрицательный самосопряженный ядерный оператор A на Y такой, что $A(Y) \subset S_1(Y)$ и $A(Y) \cap K(Y) = 0$ (а именно, найдется инъективный неотрицательно определенный оператор A на Y такой, что $A(Y) = A_{00}(Y_1)$; тогда A — ядерный, поскольку таков A_{00} и естественное вложение $Y_1 \rightarrow Y$ непрерывно).

Возьмем Y в качестве пространства X в формулировке теоремы. Рассмотрим процесс $\xi_t = F(\eta_t)$ на Y , где F определено согласно (3) с построенным ранее оператором A . Теперь все, сказанное о мере γ в теореме 1, применимо к мере μ_2 . Поэтому мера $\nu_2 := \mu_2 \circ F^{-1}$ не имеет направлений непрерывности. Иначе обстоит дело с мерой μ_1 . Действительно, гладкое отображение $F - I$ принимает значения в пространстве Камерона–Мартина меры μ_1 и удовлетворяет всем условиям теоремы Рэймера (см. [19]; оно удовлетворяет даже условиям теоремы Кусуоки, см. [20]). Следовательно, мера $\nu_1 := \mu_1 \circ F^{-1}$ эквивалентна мере μ_1 ; более того, явное выражение для плотности Радона–Никодима меры $\mu_1 \circ F^{-1}$ относительно меры μ_1 позволяет явным образом проверить дифференцируемость этой меры. Остается заметить, что отображения σ и B со свойствами, указанными в условиях теоремы, получаются применением формулы Ито так, как и в теореме 1.

З а м е ч а н и е 2. В условиях теорем 1 и 2 все инвариантные меры и переходные вероятности обязательно имеют гладкие компоненты. Тем не менее, если отказаться от требования совпадения коэффициентов уравнения (4) вне некоторого ε -шара с коэффициентами процесса Орнштейна–Уленбека, то можно модифицировать отображение F так, что для диффузий из теорем 1 и 2 все упомянутые меры, не имеющие нетривиальных направлений непрерывности, перейдут в «крайне сингулярные» меры, т.е. меры, взаимно сингулярные со всеми мерами, которые такие направления имеют.

З а м е ч а н и е 3. В настоящей статье рассматриваются сингулярные меры на пространстве состояний диффузионных процессов. Если рассматривать меры, порожденные диффузионными процессами, на пространстве траекторий, то даже распределения одномерных диффузий с гладкими коэффициентами не имеют направлений дифференцируемости, если коэффициент диффузии отличен от постоянной. Этот результат, установленный в [4] (см. также [5], [12]), доказывает гипотезу, высказанную Питчером в [22]. Более того, в [25] показано, что в случае непостоянного

коэффициента диффузии распределение процесса сосредоточено на исключительном множестве, даже если коэффициент диффузии — ограниченная аналитическая функция.

З а м е ч а н и е 4. Если не требовать, чтобы пространство состояний диффузии было гильбертовым, можно построить более простой пример диффузии, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Для этого примем $C[0, 1]$ в качестве X и определим диффеоморфизм $F[x](t) := f(x(t))$, где f получено путем гладкого возмущения тождественного отображения на $[-\delta, \delta]$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. И. Богачеву за ценное обсуждение и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell D. The Malliavin Calculus. New York: Wiley, 1987.
2. Белополюская Я. И., Далецкий Ю. Л. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. Киев: Вища школа, 1989.
3. Богачев В. И. Несколько результатов о дифференцируемых мерах. — Матем. сб., 1985, т. 127, № 3, с. 336–351.
4. Bogachev V. I. Differential properties of measures on infinite dimensional spaces and the Malliavin calculus. — Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys., 1989, v. 30, № 2, p. 9–30.
5. Богачев В. И. Функционалы от случайных процессов и связанные с ними бесконечномерные осциллирующие интегралы. — Изв. АН СССР, 1992, v. 156, № 2, с. 243–278.
6. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
7. Bogachev V. I. Differential Measures and the Malliavin Calculus. Preprint № 16. Pisa: Scuola Normale Superiore di Pisa, 1995.
8. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. Regularity of invariant measures for a class of perturbed Ornstein–Uhlenbeck operators. — Nonlinear Diff. Equations Appl., 1996, v. 3, № 2, p. 261–268.
9. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Regularity of invariant measures: The case of nonconstant diffusion part. — J. Funct. Anal., 1996, v. 138, № 1, p. 223–242.
10. Bogachev V. I., Röckner M. Hypocoercivity and invariant measures for infinite dimensional diffusions. — C. R. Acad. Sci., Paris, 1994, v. 318, № 6, p. 553–558.
11. Bogachev V. I., Röckner M. Regularity of invariant measures in finite- and infinite-dimensional spaces and applications. — J. Funct. Anal., 1995, v. 133, № 1, p. 168–223.
12. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений. — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, № 3, с. 3–83.
13. Da Prato G., Elworthy D., Zabczyk J. Strong Feller property for stochastic semilinear equations. — Stochastic Anal. Appl., 1995, v. 13, № 1, p. 35–46.
14. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
15. Da Prato G., Zabczyk J. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
16. Gross L. Potential theory on Hilbert space. — J. Funct. Anal., 1967, v. 1, № 2, p. 123–181.
17. Gaveau B., Moulinier J. M. Régularité des mesures et perturbations stochastiques de champs de vecteurs sur des espaces de dimension infinie. — Publ. Res. Inst. Sci. Kyoto Univ., 1985, v. 21, № 3, p. 593–616.
18. Kuo H. Absolute continuity of measures corresponding to diffusion processes in Banach spaces. — Ann. Probab., 1973, v. 1, № 3, p. 513–518.
19. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

20. *Kusuoka S.* The nonlinear transformation of Gaussian measure on Banach space and its absolute continuity, I, II. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, sec. 1A, 1982, v. 29, № 3, p. 567–598; 1983, v. 30, № 1, p. 199–220.
21. *Piech M. A.* Differentiability of measures associated with parabolic equation on infinite dimensional spaces. — Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v. 253, p. 191–209.
22. *Pitcher T. S.* Likelihood ratios for diffusion processes with shifted mean value. — Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 101, p. 168–176.
23. *Shigekawa I.* Existence of invariant measures of diffusions on an abstract Wiener space. — Osaka J. Math., 1987, v. 24, № 1, p. 37–59.
24. *Simao I.* Regular transition densities for infinite-dimensional diffusions. — Stochastic Anal. Appl., 1993, v. 11, № 3, p. 309–336.
25. *Толмачев Н. А.* Об одном свойстве распределений диффузионных процессов. — Матем. заметки, 1993, т. 54, № 3, с. 106–113.
26. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
27. *Шевчик В. В.* О подпространствах банахова пространства, совпадающих с областями значений линейных непрерывных операторов. — Докл. АН СССР, 1982, т. 263, с. 817–819.

Поступила в редакцию
22.I.1998

© 1998 г.

ZANZOTTO P. A.*

REPRESENTATION OF A CLASS OF SEMIMARTINGALES AS STABLE INTEGRALS

Описывается класс семимартингалов, представимых в виде стохастического интеграла по α -устойчивому процессу Леви. Условия сформулированы в терминах характеристик семимартингалов.

Ключевые слова и фразы: семимартингалы без непрерывной мартингальной части, мера скачков, компенсатор, строго α -устойчивые процессы Леви, устойчивые интегралы.

Introduction. There are several similarities between the Itô's theory for Brownian integrals and the Itô-type stochastic integration theory with respect to strictly α -stable Lévy processes ($0 < \alpha \leq 2$) (these are also called α -stable Lévy motions). First of all from the point of view of the integrability conditions: let us consider indeed the real-valued processes X and H such that X is Lévy strictly α -stable while H is predictable. Then, for every X , the stochastic integral process $\int_0^t H dX$ exists if and only if the paths of H lie locally in $L^\alpha(dx)$ a.s. Also the inner clock property holds for the α -stable stochastic integrals, i.e., such integrals can be reduced to a standard form by a suitable time change. For example, if H is positive or X is symmetric, the integral process $\int_0^t H dX$ has the same distribution as X , when viewed on the time scale given by the process $\int_0^t |H_s|^\alpha ds$. More precisely, in these cases there exists a process X' having the same law as X such that a.s. $\int_0^t H_s dX_s = X' \circ \int_0^t |H_s|^\alpha ds$. (In other cases other representations hold, see [8].)

In the class of symmetric α -stable Lévy processes, Brownian motion corresponds to the parameter $\alpha = 2$, so the above properties can be viewed as extensions to such a class

*Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F. Buonarroti, 2, 56127 Pisa, Italy.