Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калинин, Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 4, 773–780

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:38:03

З а м е ч а н и е 2. Если $\nu \geq 0$ — целочисленная случайная величина и $f(s) = \mathbf{E} s^\nu$ — ее производящая функция, а $\psi(\lambda) = \mathbf{E} e^{-\lambda \nu}$ — преобразование Лапласа, то $f(s) = \psi(-\ln s)$, и оценки для $f(s)$ можно получать из теоремы 4. В примере 3 в [4] оценки для $f(s)$ выводились непосредственно из приведенной выше теоремы 3 за счет рассмотрения вспомогательной целочисленной случайной величины μ с производящей функцией $\mathbf{E} u^\mu = f(s + (1-s)u)$ и моментами

$$\mathbf{E} \mu^{[k]} = \frac{d^k}{du^k} f(s + (1-s)u) |_{u=1} = (1-s)^k f^{(k)}(1) = (1-s)^k \mathbf{E} \nu^{[k]}.$$

При этом оценка $f(s)$ сводилась к оценке $\mathbf{P}\{\mu \geq 1\}$: $1-f(s) = 1-\mathbf{E} u^\mu |_{u=0} = 1-\mathbf{P}\{\mu = 0\} = \mathbf{P}\{\mu \geq 1\}$, а правая часть последнего равенства оценивалась с помощью (13) и (14). Аналогом (17) при этом оказывается неравенство

$$1 - z\mathbf{E} \nu + \frac{(z\mathbf{E} \nu^{[2]})^2}{z\mathbf{E} \nu^{[3]} + 2\mathbf{E} \nu^{[2]}} \leq f(1-z) \leq 1 - \frac{(z\mathbf{E} \nu)^2}{z\mathbf{E} \nu^{[2]} + \mathbf{E} \nu}.$$

Такой же прием использован в [4] и при оценивании производящих функций целочисленных случайных векторов с неотрицательными координатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963, 288 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
3. Galambos J., Simonelli I. Bonferroni-type inequalities with applications. New York e.a.: Springer-Verlag, 1996, ix+269 p.
4. Зубков А. М. Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. — Обзорение прикл. и промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1994, т. 1, в. 4, с. 638–666.
5. Зубков А. М. Неравенства для моментов отношения случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1996, т. 3, в. 4, с. 549–566.

Поступила в редакцию
2.II.1998

© 1998 г.

КАЛИНКИН А. В.*

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ И ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ

Предложенный в работах [6], [7] метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова применяется к модели эпидемии Вейса и ее обобщению. Получены интегральные представления для производящих функций финальных вероятностей.

*Московский государственный технический университет, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия.

Ключевые слова и фразы: эпидемии процесс, ветвящийся процесс с взаимодействием частиц, гиперболическое уравнение для двойной производящей функции, метод Римана, точные решения.

1. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1 , T_2 и двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1 = (1, 0)$, $\varepsilon^2 = (1, 1)$ [5]. На множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = P\{\mu(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \mu(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$. Пусть при $\Delta t \rightarrow 0$ переходные вероятности имеют вид ($\rho \geq 0$)

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) = 1 - (\alpha_1 \alpha_2 + \rho \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) = (p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2 + 1}^2 \alpha_1 \alpha_2 + p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2}^1 \rho \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t),$$

если $\alpha_1 \neq \beta_1$ или $\alpha_2 \neq \beta_2$. Здесь $p_{\gamma_1, \gamma_2}^i \geq 0$, $\sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1, \gamma_2}^i = 1$, $i = 1, 2$; $p_{10}^1 = 0$, $p_{11}^2 = 0$. Введем производящие функции

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2},$$

$$h_i(s_1, s_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1, \gamma_2}^i s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2}, \quad i = 1, 2; |s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ равносильна уравнению в частных производных (см. [5, теорема 1])

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial t} = (h_2(s_1, s_2) - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial s_1 \partial s_2} + \rho (h_1(s_1, s_2) - s_1) \frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial s_1}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Событие $\{\mu(t) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2 . Можно полагать, что через случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$, $P\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 < t\} = 1 - \exp(-\alpha_1 \alpha_2 t)$, происходит взаимодействие частицы типа T_1 с частицей типа T_2 . Эта пара частиц независимо от других частиц превращается в новую группу из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1, \gamma_2}^2\}$; процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + \gamma_1 - 1, \alpha_2 + \gamma_2 - 1)$. Кроме того, через случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$, $P\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1 < t\} = 1 - \exp(-\rho \alpha_1 t)$, частица типа T_1 превращается в группу частиц с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1, \gamma_2}^1\}$. Предполагается, что случайные величины $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$, $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$ независимы; в состоянии (α_1, α_2) процесс $\mu(t)$ находится случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \min(\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2)$.

2. Частные случаи. Задача о финальных вероятностях. Процесс $\mu(t)$ принадлежит классу ветвящихся процессов с взаимодействием частиц, определенных Б. А. Севастьяновым [5]. В. И. Дороговым и В. П. Чистяковым [3] ветвящийся процесс $\mu(t)$ определялся как модель цепной реакции размножения нейтронов (частицы типа T_1) с учетом ядер тяжелых элементов (частицы типа T_2); в [3] полагалось $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = h_2(s_1)$.

Статья А. Н. Старцева [2] содержит подробный обзор работ по марковским моделям процессов распространения эпидемии, когда частицы типа T_1 интерпретируются

как больные особи, частицы типа T_2 — как особи, восприимчивые к инфекционному заболеванию. При $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1^2$ получаем модель эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [1], при $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$ — модель эпидемии Вейса [2]. Для этих моделей известны (приведены в [2]) явные, но громоздкие выражения для финальных вероятностей попадания процесса $\mu(t)$ в одно из поглощающих состояний $(0, 0)$, $(0, 1)$, $\dots$, $(0, \gamma_2)$, $\dots$,

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t). \quad (1)$$

В настоящей работе получено интегральное представление для финальных вероятностей (1) в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$.

3. Уравнение в частных производных для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей. Введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_i \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^i \frac{\partial^{\gamma_1 + \gamma_2}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2}}, \quad i = 1, 2.$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ приводится к виду ([5, теорема 2]; ср. [6, теорема 1])

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \left[z_1 z_2 \left(h_2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \rho z_1 \left(h_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right] \mathcal{F},$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Для финальных вероятностей (1) вводим функцию

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s_2^{\gamma_2} \quad (2)$$

и двойную производящую функцию

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s); \quad |s| \leq 1. \quad (3)$$

Заметим, что $\Phi(z_1, z_2; s)$ — функция, аналитическая по переменным z_1, z_2 , так как

$$\left| \Phi(z_1, z_2; s) \right| \leq \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{|z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} \left| \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) \right| \leq e^{|z_1| + |z_2|}. \quad (4)$$

Аналогично теореме 2 работы [6] показывается, что

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s),$$

и $\Phi(z_1, z_2; s)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left[z_2 \left(h_2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \rho \left(h_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right] \Phi = 0. \quad (5)$$

Из равенств $q_{(0, \gamma_2)}^{(0, \gamma_2)} = 1$, $q_{(0, \alpha_2)}^{(0, \gamma_2)} = 0$ при $\alpha_2 \neq \gamma_2$ следует граничное условие $\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}$.

4. Вывод интегрального представления для $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$. Уравнение (5) принимает вид

$$z_2 \Phi_{z_1 z_2} + (\rho - z_2) \Phi_{z_1} - \rho \Phi = 0. \quad (6)$$

Линейные уравнения гиперболического типа, когда коэффициенты являются линейными функциями независимых переменных, рассматривались, например, в [9]. В настоящей работе для решения уравнения (6) применяется метод Римана [8], [9]. Возможно применение методов операционного исчисления.

Пусть процесс $\mu(t)$ находится в начальном состоянии $(\alpha_1, 0)$. Тогда происходит скачок процесса только в состояние $(\alpha_1 - 1, 0)$; следовательно, финальные вероятности равны: $q_{(0, 0)}^{(\alpha_1, 0)} = 1$ при $\alpha_1 = 0, 1, \dots$, $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, 0)} = 0$ при $\gamma_2 = 1, 2, \dots$ и $\alpha_1 = 0, 1, \dots$. Отсюда $\Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}$. Таким образом, для линейного гиперболического уравнения (6) решаем задачу Гурса: заданы граничные условия на характеристиках $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$,

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \quad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}. \quad (7)$$

Функция Римана $R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0)$ определяется как решение уравнения, сопряженного с (6),

$$R_{z_1 z_2} - \left(\left(\frac{\rho}{z_2} - 1 \right) R \right)'_{z_1} + \frac{\rho}{z_2} R = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее на характеристиках $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ условиям

$$\begin{aligned} R(z_1^0, z_2; z_1^0, z_2^0) &= \exp \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\frac{\rho}{t} - 1 \right) dt = \left(\frac{z_2}{z_2^0} \right)^{\rho} e^{-(z_2 - z_2^0)}, \\ R(z_1, z_2^0; z_1^0, z_2^0) &= \exp \int_{z_1^0}^{z_1} 0 dt = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановкой в уравнение (8) и проверкой условий (9) устанавливается, что функция Римана равна

$$R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \left(\frac{z_2}{z_2^0} \right)^{\rho} e^{-(z_2 - z_2^0)} J_0 \left(2 \sqrt{-(z_1 - z_1^0) \rho \ln(z_2/z_2^0)} \right), \quad (10)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуля. Функция Римана находится изложенным в [9] методом представления в виде ряда

$$R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) \frac{(z_1 - z_1^0)^j (z_2 - z_2^0)^j}{j! j!}. \quad (11)$$

Ряд (11) подставляется в уравнение (8), для функций $v_j(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0)$ решается рекуррентное дифференциальное соотношение.

Для уравнения (6) решение задачи Гурса

$$\Phi(z_1^0, z_2; s) = e^{(z_2 - z_2^0)s}, \quad \Phi(z_1, z_2^0; s) = e^{z_1 - z_1^0}$$

обозначим $\Phi^0(z_1, z_2; s)$. Решение дается формулой Римана, $z_1 > z_1^0 > 0$, $z_2 > z_2^0 > 0$,

$$\begin{aligned} \Phi^0(z_1, z_2; s) = & R(z_1, z_2^0; z_1, z_2) e^{z_1 - z_1^0} + R(z_1^0, z_2; z_1, z_2) e^{(z_2 - z_2^0)s} \\ & - R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) - \int_{z_1^0}^{z_1} R_t(t, z_2^0; z_1, z_2) e^{t - z_1^0} dt \\ & + \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\left(\frac{\rho}{\tau} - 1 \right) R(z_1^0 \tau; z_1, z_2) - R_\tau(z_1^0, \tau; z_1, z_2) \right) e^{(\tau - z_2^0)s} d\tau. \end{aligned}$$

Вычисляя интегрированием по частям интегралы, содержащие частные производные, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Phi^0(z_1, z_2; s) = & R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) + \int_{z_1^0}^{z_1} R(t, z_2^0; z_1, z_2) e^{t - z_1^0} dt \\ & + \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\frac{\rho}{\tau} - 1 + s \right) R(z_1^0, \tau; z_1, z_2) e^{(\tau - z_2^0)s} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{z_1^0 \rightarrow 0} R(z_1^0, \tau; z_1, z_2) &= \left(\frac{\tau}{z_2} \right)^\rho e^{-(\tau - z_2)} J_0 \left(2\sqrt{z_1 \rho \ln(\tau/z_2)} \right), \\ \lim_{z_2^0 \rightarrow 0} R(t, z_2^0; z_1, z_2) &= 0, \quad \lim_{z_1^0 \rightarrow 0, z_2^0 \rightarrow 0} R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, из (12) при $z_1^0 \rightarrow 0$, $z_2^0 \rightarrow 0$ получаем решение задачи (6) с условиями (7),

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \int_0^{z_2} \left(\frac{\rho}{\tau} - 1 + s \right) \left(\frac{\tau}{z_2} \right)^\rho e^{-(\tau - z_2) + \tau s} J_0 \left(2\sqrt{z_1 \rho \ln \left(\frac{\tau}{z_2} \right)} \right) d\tau$$

(сходимость несобственного интеграла очевидна; $\rho > 0$). После замены переменной интегрирования, $\tau = z_2 e^{-x/\rho}$,

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2; s) = & \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{\rho}(s - 1)e^{-x/\rho} z_2 \right) e^{-x + (1 - e^{-x/\rho} + s e^{-x/\rho})z_2} \\ & \times J_0(2\sqrt{-z_1 x}) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Совершенный выше предельный переход $z_1^0 \rightarrow 0$, $z_2^0 \rightarrow 0$ нуждается в обосновании; однако непосредственной подстановкой выражения (13) в уравнение (6) и проверкой условий (7) убеждаемся, что (13) является решением задачи (6), (7). Выполнено требование (4) — решение (13) является аналитической функцией переменных z_1 , z_2 ; единственность решения (13) устанавливается, исходя из условия аналитичности решения (ср. [9]).

Из определения экспоненциальной производящей функции (3) и равенства (13), учитывая разложения в ряды

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}, \quad J_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j! j!},$$

получаем интегральное представление для $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$,

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \frac{1}{\alpha_1!} \int_0^\infty x^{\alpha_1} \left[(1 - e^{-x/\rho} + s e^{-x/\rho})^{\alpha_2} + \frac{1}{\rho} \alpha_2 (s-1) \times e^{-x/\rho} (1 - e^{-x/\rho} + s e^{-x/\rho})^{\alpha_2-1} \right] e^{-x} dx. \quad (14)$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям; приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Производящая функция финальных вероятностей в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$ равна ($\rho > 0$, $\alpha_1 \neq 0$)

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} (1 - e^{-x/\rho} + s e^{-x/\rho})^{\alpha_2} e^{-x} dx. \quad (15)$$

Формула (15) доказывается также непосредственными вычислениями. Из определения производящей функции (2) и (15) получаем

$$\begin{aligned} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} C_{\alpha_2}^{\gamma_2} (1 - e^{-x/\rho})^{\alpha_2-\gamma_2} (e^{-x/\rho})^{\gamma_2} e^{-x} dx \\ &= \frac{C_{\alpha_2}^{\gamma_2}}{(\alpha_1 - 1)!} \sum_{i=0}^{\alpha_2-\gamma_2} (-1)^i C_{\alpha_2-\gamma_2}^i \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-x(i/\rho + \gamma_2/\rho + 1)} dx \\ &= C_{\alpha_2}^{\gamma_2} \sum_{i=0}^{\alpha_2-\gamma_2} (-1)^i C_{\alpha_2-\gamma_2}^i \left(\frac{\rho}{i + \gamma_2 + \rho} \right)^{\alpha_1}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots, \alpha_2, \end{aligned} \quad (16)$$

что совпадает с приведенными в [2] явными выражениями для финальных вероятностей в модели эпидемии Вейса.

Сделаем в (15) замену переменной интегрирования $1 - e^{-x/\rho} = e^{-y}$. Получаем выражение для финальных вероятностей в виде преобразования Лапласа,

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{\rho C_{\alpha_2}^{\gamma_2}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty e^{-(\alpha_2-\gamma_2+1)y} (1 - e^{-y})^{\gamma_2+\rho-1} (-\rho \ln(1 - e^{-y}))^{\alpha_1-1} dy.$$

Выполнены условия применения тауберовой теоремы ([10, гл. 13, § 5]). Получаем

Следствие 1. При $\alpha_2 \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \sim C \cdot \frac{(\ln \alpha_2)^{\alpha_1-1}}{\alpha_2^\rho}, \quad C = \frac{\rho^{\alpha_1} \Gamma(\gamma_2 + \rho)}{(\alpha_1 - 1)! \gamma_2!},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

В рассматриваемом специальном случае ветвящегося процесса с взаимодействием частиц частицы типа T_2 называются финальными [4]. Обозначим $\eta^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ число финальных частиц, которые останутся после того, как процесс вырождается, т. е. не останется частиц типа T_1 . Случайная величина $\eta^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \gamma_2 = 0, \dots, \alpha_2\}$, которое определяется производящей функцией (15). Из (15) получаем

$$\begin{aligned} E \eta^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2)}(1) = \alpha_2 \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^{\alpha_1}, \\ E \eta^{(\alpha_1, \alpha_2)} (\eta^{(\alpha_1, \alpha_2)} - 1) &= \Phi''_{(\alpha_1, \alpha_2)}(1) = \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \left(\frac{\rho}{2 + \rho} \right)^{\alpha_1}; \\ D \eta^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \Phi''_{(\alpha_1, \alpha_2)}(1) + \Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2)}(1) - (\Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2)}(1))^2 \\ &\sim \alpha_2^2 \left(\left(\frac{\rho}{2 + \rho} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^{2\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

при $\alpha_2 \rightarrow \infty$. Используя выражение (15), стандартным образом применив метод характеристических функций (см. [4, гл. 5, § 5]; [7]), получаем

Следствие 2. Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\alpha_2} \leq x \right\} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \int_{-\rho \ln x}^{\infty} y^{\alpha_1 - 1} e^{-y} dy.$$

В частности, при $\alpha_1 = 1$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{(1, \alpha_2)}}{\alpha_2} \leq x \right\} = x^\rho.$$

В работе [2] установлен ряд предельных теорем для числа финальных частиц, исходя из явного выражения (16), и его обобщения на одну немарковскую модель эпидемии.

5. Интегральное представление для $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$. Уравнение (5) принимает вид

$$z_2 \Phi_{z_1 z_2} + (\rho - p_{10}^2 z_2) \Phi_{z_1} - p_{01}^2 z_2 \Phi_{z_2} - (\rho + p_{00}^2 z_2) \Phi = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями $\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}$, $\Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}$. Функция Римана находится методом представления в виде (11),

$$R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \left(\frac{z_2}{z_2^0} \right)^\rho e^{-p_{01}^2(z_1 - z_1^0) - p_{10}^2(z_2 - z_2^0)} \times J_0 \left(2\sqrt{-(1 - p_{01}^2)(z_1 - z_1^0)((1 - p_{10}^2)(z_2 - z_2^0) + \rho \ln(z_2/z_2^0))} \right).$$

Аналогично п. 4 приходим к обобщению формулы (13).

Теорема 2. Двойная производящая функция финальных вероятностей в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$ равна ($\rho > 0$)

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{\rho} (s - p_{10}^2) e^{-x/\rho} z_2 \right) e^{-x + p_{01}^2 z_1 + (p_{10}^2(1 - e^{-x/\rho}) + s e^{-x/\rho}) z_2} \times J_0 \left(2\sqrt{(1 - p_{01}^2) z_1 ((1 - p_{10}^2)(e^{-x/\rho} - 1) z_2 - x)} \right) dx. \quad (18)$$

Доказательство теоремы состоит в подстановке выражения (18) в уравнение (17) и проверке граничных условий. Заменим в (18) функцию Бесселя интегралом

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} e^{z(u-1/u)/2} \frac{du}{u}.$$

После преобразований, аналогично п. 4, получаем обобщение интегрального представления (14),

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \varphi^{\alpha_1}(u) \left[\left((1 - e^{-x/\rho}) \psi(u) + s e^{-x/\rho} \right)^{\alpha_2} + \frac{1}{\rho} \alpha_2 (s - p_{10}^2) \times e^{-x/\rho} \left((1 - e^{-x/\rho}) \psi(u) + s e^{-x/\rho} \right)^{\alpha_2 - 1} \right] \times e^{xu} \frac{du}{u} \right) e^{-x} dx,$$

где $\varphi(u) = p_{01}^2 + (1 - p_{01}^2)/u$, $\psi(u) = p_{10}^2 + (1 - p_{10}^2)u$. Вычисление двукратного интеграла приводит к громоздким выражениям для финальных вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\gamma_2 = 0, 1, \dots, \alpha_2$.

6. Случай $h_1(s_1, s_2) = p_2^1 s_1^2 + p_0^1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{20}^2 s_1^2 + p_{02}^2 s_2^2 + p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$. Для линейного уравнения в частных производных второго порядка (5) решается задача Дарбу-Пикара: заданы граничные условия

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \quad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1 q}, \quad (19)$$

где q — ближайший к нулю корень уравнения $p_2^1 s_1^2 + p_0^1 = s_1$. Функция Римана находится методом разложения в ряд (11); применение формулы Римана в случае условий (19) на нехарактеристических кривых приводит к незамкнутому представлению для функции $\Phi(z_1, z_2; s)$ в виде интеграла от ряда по функциям Бесселя целого порядка. В случае $\rho = 0$ такое решение сведено к простому замкнутому интегральному представлению [11]; можно полагать, что при $\rho > 0$ существует замкнутое интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$. Вывод данного в [11] решения уравнения (5) при $\rho = 0$ и $h_2(s_1, s_2) = p_{20}^2 s_1^2 + p_{02}^2 s_2^2 + p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$ будет изложен в отдельной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985, с. 1008.
2. Старцев А. Н. О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 827–839.
3. Дорогов В. И., Чистяков В. П. Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988. 112 с.
4. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
5. Севастьянов Б. А., Калинкин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
6. Калинкин А. В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 1, с. 192–197.
7. Калинкин А. В. Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, в. 6, с. 1309–1312.
8. Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985, 312 с.
9. Copson E. T. Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. 280 p.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
11. Калинкин А. В. Двуполая проблема. — Обозрение прикл. промышл. матем., сер. вероятн. и статист., 1997, т. 4, в. 3, с. 348–349. (Четвертая Всеросс. школа-коллоквиум по стохаст. методам. Тезисы докладов. Уфа, 29 августа–3 сентября 1997 г.)

Поступила в редакцию
25.XI.1997