Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Алексеев, Новые модификации периодограмм второго и третьего порядков, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 657–667

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:25:21

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 42
Выпуск 4, 1997 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 1997 г.

АЛЕКСЕЕВ В. Г.*

НОВЫЕ МОДИФИКАЦИИ ПЕРИОДОГРАММ
ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Вводятся в рассмотрение новые модификации периодограмм второго и третьего порядков, призванных служить «полуфабрикатом» при построении статистических оценок спектральной и, соответственно, биспектральной плотности стационарного в узком смысле случайного процесса $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$. Отличительной чертой предлагаемых в статье модификаций обеих периодограмм является существенно более низкий (в сравнении с ранее известными модификациями) уровень дисперсии.

Ключевые слова и фразы: стационарный случайный процесс, спектральная плотность, периодограмма второго порядка, биспектральная плотность, периодограмма третьего порядка, ядра типа Джексона.

1. Пусть $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в узком смысле случайный процесс со средним $EX(k) \equiv 0$, спектральной плотностью $f(\lambda)$ и биспектральной плотностью $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Мы не будем в дальнейшем строго придерживаться того или иного выбора области определения функций $f(\lambda)$ и $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Нам достаточно будет помнить о том, что каждая из них периодична (с периодом 2π) по каждому из своих аргументов.

Для каждого $j = 2, 3, \dots$ положим

$$r_j(l_1, \dots, l_{j-1}) = s_j(k, k + l_1, \dots, k + l_{j-1}), \quad (1)$$

где $s_j(k_1, \dots, k_j)$ — простой семиинвариант j -го порядка, отвечающий случайному вектору $\{X(k_1), \dots, X(k_j)\}$. В силу стационарности случайного процесса $X(k)$ правая часть соотношения (1) не зависит от k .

---

*Институт физики атмосферы РАН, пер. Пыжевский, 3, 109017 Москва, Россия.

Предметом настоящей статьи является статистический анализ новых модификаций периодограмм второго и третьего порядков, призванных служить «полуфабрикатом» при построении непараметрических оценок спектральной и, соответственно, биспектральной плотности случайного процесса $X(k)$. Основное достоинство предлагаемых нами новых модификаций периодограмм второго и третьего порядков — это существенно меньший уровень дисперсии в сравнении с ранее известными модификациями.

В ходе исследования названных выше периодограмм мы будем пользоваться свойствами ядер типа Джексона до 4-го порядка включительно. Речь идет о 2π -периодических функциях, определяемых соотношениями

$$J_{1,n}(\mu) \equiv F_n(\mu) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^2, \quad (2)$$

$$J_{2,n}(\mu) \equiv J_n(\mu) = \frac{3}{2n^3 + n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^4, \quad (3)$$

$$J_{3,n}(\mu) = \frac{20}{11n^5 + 5n^3 + 4n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^6 \quad (4)$$

и, соответственно,

$$J_{4,n}(\mu) = \frac{315}{151n^7 + 70n^5 + 49n^3 + 45n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^8. \quad (5)$$

Как было уже указано ранее в работе [1], каждое из ядер (2)–(5) удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} J_{l,n}(\mu) d\mu = 1, \quad \Pi = [-\pi, \pi]. \quad (6)$$

Ядра первых двух наименьших порядков известны под названием ядер Фейера и, соответственно, Джексона. В дальнейшем нам будут полезны их разложения в ряд Фурье. Речь идет о формулах

$$F_n(\mu) = \sum_{|k| \leq n} a(k) e^{ik\mu} \quad (7)$$

и $J_n(\mu) = \sum_{|k| \leq 2n} b(k) e^{ik\mu}$ (в обоих случаях лишь конечное число коэффициентов Фурье отлично от нуля).

Хорошо известно, что интересующие нас коэффициенты Фурье $a(k)$ и $b(k)$ описываются соотношениями

$$a(k) = 1 - \frac{|k|}{n}, \quad |k| \leq n, \quad (8)$$

и, соответственно,

$$b(k) = \begin{cases} 1 - \frac{3|k| + 6nk^2 - 3|k|^3}{2n(2n^2 + 1)}, & \left| \frac{k}{n} \right| \leq 1, \\ \frac{(2n - |k|)[(2n - |k|)^2 - 1]}{2n(2n^2 + 1)}, & 1 \leq \left| \frac{k}{n} \right| \leq 2. \end{cases} \quad (9)$$

2. Широко используемая во всем мире периодограмма второго порядка определяется соотношением

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^n X(k) e^{ik\lambda} \right|^2. \quad (10)$$

Хорошо известно (см., например, [2, § 18]), что

$$EI_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} F_n(\omega - \lambda) f(\omega) d\omega, \quad (11)$$

где $F_n(\cdot)$ — ядро Фейера,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DI_n(\lambda) = \begin{cases} 2f^2(\lambda), & \lambda = 0, \pm\pi, \\ f^2(\lambda), & 0 < |\lambda| < \pi, \end{cases} \quad (12)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}[I_n(\lambda), I_n(\mu)] = 0, \quad \text{если } 0 \leq \lambda < \mu \leq \pi.$$

Формула (12) свидетельствует о том, что периодограмма $I_n(\lambda)$ не является состоятельной оценкой спектральной плотности. Для получения состоятельной оценки следует осреднить периодограмму по аргументу λ с помощью того или иного спектрального окна.

Наряду с периодограммой (10) нередко используется так называемая модифицированная периодограмма, определяемая соотношением

$$I_n^{\{A\}}(\lambda) = \left| \sum_{k=1}^n a(k) X(k) e^{ik\lambda} \right|^2 \left[2\pi \sum_{k=1}^n a^2(k) \right]^{-1},$$

где $A = \{a(k)\}$ — мультипликативное окно данных, подбираемое таким образом, чтобы уменьшить смещение и улучшить помехоустойчивость (робастность) периодограммы (по этому поводу см., например, [1]). Известно, что при $n \rightarrow \infty$ дисперсия модифицированной периодограммы стремится к тому же пределу, что и дисперсия периодограммы (10). Асимптотическая некоррелированность значений периодограммы в несовпадающих неотрицательных точках также остается в силе.

Предлагаемая читателю новая модификация периодограммы описывается формулой

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=-n}^n a(k) X(k) \sum_{j=-n}^n a(j) X(k+j) e^{-ij\lambda}, \quad (13)$$

где множители $a(k)$ определяются формулой (8), т.е. являются коэффициентами Фурье ядра Фейера.

Пользуясь спектральным разложением корреляционной функции случайного процесса $X(k)$, а также формулой (7), нетрудно показать, что

$$EL_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} F_n(\omega - \lambda) f(\omega) d\omega. \quad (14)$$

Мы видим, что правые части формул (11) и (14) совпадают. Следует, однако, иметь в виду то обстоятельство, что периодограмма $I_n(\lambda)$ строится по n отсчетам случайного процесса $X(k)$, в то время как для построения периодограммы $L_n(\lambda)$ требуются уже $4n-3$ отсчетов. Поэтому в том, что касается смещения, преимущество периодограммы $I_n(\lambda)$ неоспоримо.

Перейдем к рассмотрению корреляционных свойств периодограммы (13).

Теорема 1. Пусть

$$\sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{l_{j-1} \in \mathbb{Z}} |r_j(l_1, \dots, l_{j-1})| < \infty \quad (15)$$

для $j = 2, 4$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} DL_n(\lambda) \leq \begin{cases} \frac{151}{180} f^2(\lambda), & \lambda = 0, \pm\pi, \\ \frac{4}{9} f^2(\lambda), & 0 < |\lambda| < \pi. \end{cases} \quad (16)$$

Доказательство. Согласно определению периодограммы $L_n(\lambda)$, ее дисперсия описывается соотношением

$$\begin{aligned} DL_n(\lambda) &\equiv \mathbf{E}|L_n(\lambda)|^2 - |EL_n(\lambda)|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \sum_k \sum_j \sum_l \sum_m a(k) a(j) a(l) a(m) e^{i(m-j)\lambda} \\ &\quad \times [\mathbf{E} X(k) X(k+j) X(l) X(l+m) \\ &\quad - \mathbf{E} X(k) X(k+j) \mathbf{E} X(l) X(l+m)], \end{aligned}$$

где все индексы суммирования пробегает значения от $-n$ до n . Отсюда, используя известное соотношение между моментами и семиинвариантами произвольного случайного вектора (см., например, [3, гл. II, § 12,

формула (46)], находим

$$\begin{aligned} DL_n(\lambda) = (2\pi n)^{-2} \sum_k \sum_j \sum_l \sum_m [r_2(l-k) r_2(l+m-k-j) \\ + r_2(l+m-k) r_2(l-k-j) + s_4(k, k+j, l, l+m)] \\ \times a(k) a(j) a(l) a(m) e^{i(m-j)\lambda}. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначая D_j , $j = 1, 2, 3$, величину, возникающую за счет j -го слагаемого в квадратных скобках под знаком суммы в правой части соотношения (17), будем иметь

$$DL_n(\lambda) = D_1 + D_2 + D_3. \quad (18)$$

Предположение (15) (вместе с формулой (1)) позволяет нам утверждать, что

$$D_3 = O(n^{-1}). \quad (19)$$

Переходя к рассмотрению величины D_1 , имеем

$$\begin{aligned} D_1 = (2\pi n)^{-2} \sum_k \sum_j \sum_l \sum_m a(k) a(j) a(l) a(m) e^{i(m-j)\lambda} \\ \times \iint_{\Pi^2} e^{i(l-k)\omega} e^{i(l+m-k-j)\nu} f(\omega) f(\nu) d\omega d\nu. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь соотношениями (7) и (2), находим

$$D_1 = \frac{1}{4\pi^2 n^6} \iint_{\Pi^2} \frac{\sin^4[n(\omega+\nu)/2]}{\sin^4[(\omega+\nu)/2]} \frac{\sin^4[n(\nu+\lambda)/2]}{\sin^4[(\nu+\lambda)/2]} f(\omega) f(\nu) d\omega d\nu. \quad (20)$$

Применяя к правой части соотношения (20) неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$D_1 \leq \sqrt{D_{11} D_{12}}, \quad (21)$$

где

$$D_{11} = \frac{1}{4\pi^2 n^6} \iint_{\Pi^2} \frac{\sin^4[n(\omega+\nu)/2]}{\sin^4[(\omega+\nu)/2]} \frac{\sin^4[n(\nu+\lambda)/2]}{\sin^4[(\nu+\lambda)/2]} f^2(\omega) d\omega d\nu$$

и

$$D_{12} = \frac{1}{4\pi^2 n^6} \iint_{\Pi^2} \frac{\sin^4[n(\omega+\nu)/2]}{\sin^4[(\omega+\nu)/2]} \frac{\sin^4[n(\nu+\lambda)/2]}{\sin^4[(\nu+\lambda)/2]} f^2(\nu) d\omega d\nu. \quad (22)$$

Заметим теперь, что функция $f(\lambda)$ непрерывна, так как ее ряд Фурье (в соответствии с предположением (15) для $j = 2$) сходится абсолютно. Поэтому из (22), (3) и (6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2} \right)^2 f^2(\lambda) = \frac{4}{9} f^2(\lambda). \quad (23)$$

Что же касается величины D_{11} , то она может быть записана в виде

$$D_{11} = \frac{(2n^2 + 1)^2}{18\pi n^4} \int_{\Pi} \Phi_n(\omega) f^2(\omega + \lambda) d\omega, \quad (24)$$

где

$$\Phi_n(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{\Pi} J_n(\nu - \omega) J_n(\nu) d\nu.$$

Нетрудно показать, что функция $\Phi_n(\omega)$ является ядром в том смысле, что

$$\Phi_n(-\omega) = \Phi_n(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \Phi_n(\omega) d\omega = 1$$

и

$$\forall \delta \in (0, \pi) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(\omega) d\omega = 0.$$

Поэтому из соотношения (24) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{11} = \frac{4}{9} f^2(\lambda). \quad (25)$$

Сопоставляя теперь соотношения (21), (23) и (25), находим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} D_1 \leq \frac{4}{9} f^2(\lambda). \quad (26)$$

Наконец, рассмотрим величину D_2 , определяемую соотношением

$$\begin{aligned} D_2 &= (2\pi n)^{-2} \sum_k \sum_j \sum_l \sum_m a(k) a(j) a(l) a(m) e^{i(m-j)\lambda} \\ &\times \iint_{\Pi^2} e^{i(l+m-k)\omega} e^{i(l-k-j)\nu} f(\omega) f(\nu) d\omega d\nu. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим прежде всего, что формула (27) легко преобразуется к виду

$$D_2 = \frac{2n^2 + 1}{12\pi^2 n^3} \iint_{\Pi^2} J_n(\omega + \nu) F_n(\nu + \lambda) F_n(\omega + \lambda) f(\omega) f(\nu) d\omega d\nu.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, находим

$$\begin{aligned} D_2 &\leq \frac{2n^2 + 1}{12\pi^2 n^3} \iint_{\Pi^2} J_n(\omega + \nu) F_n(\nu + \lambda) F_n(\omega + \lambda) f^2(\omega) d\omega d\nu \\ &= \frac{2n^2 + 1}{6\pi n^3} \int_{\Pi} F_n(\omega + 2\lambda) \Phi_n(\omega) f^2(\omega + \lambda) d\omega, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\Phi_n(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{\Pi} J_n(\nu - \omega) F_n(\nu) d\nu.$$

Отдельно рассмотрим два случая: случай $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$ и случай $0 < |\lambda| < \pi$. В первом случае функция $f^2(\omega + \lambda)$ под знаком интеграла в крайней правой части соотношения (28) домножается на произведение двух ядер, основания вершин которых совпадают. Поэтому, чтобы оценить указанный выше интеграл, нам нужно вычислить величину

$$\int_{\Pi} F_n(\omega) \Phi_n(\omega) d\omega$$

(т.е. найти нормирующий множитель при ядре $F_n(\omega) \Phi_n(\omega)$). Формулы (8) и (9), а также приведенная в книге [4, с. 99] таблица для величин

$$S_k(n) = \sum_{t=1}^n t^k, \quad k = 1 \div 8,$$

позволяют это сделать. Выполняя все необходимые расчеты, находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} F_n(\omega) \Phi_n(\omega) d\omega &\equiv (2\pi)^{-1} \iint_{\Pi^2} J_n(\nu - \omega) F_n(\omega) F_n(\nu) d\omega d\nu \\ &= \frac{(71n^4 + 65n^2 + 44)\pi}{30(2n^3 + n)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (28) и (29) следует теперь, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} D_2 \leq \frac{71}{180} f^2(\lambda), \quad \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}. \quad (30)$$

В случае же $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ основания вершин ядер $F_n(\omega + 2\lambda)$ и $\Phi_n(\omega)$ под знаком интеграла в крайней правой части соотношения (28) не совпадают. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_2 = 0, \quad \text{если } 0 < |\lambda| < \pi. \quad (31)$$

Утверждение теоремы следует теперь из соотношений (18), (19), (26), (30) и (31).

Сопоставляя соотношения (12) и (16), мы видим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{DL_n(\lambda)}{DI_n(\lambda)} \leq \frac{4}{9},$$

каково бы ни было $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$.

Теорема 2. Пусть, как и в условиях теоремы 1, справедливо предположение (15) для $j = 2, 4$. Если $0 \leq \lambda < \mu \leq \pi$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}[L_n(\lambda), L_n(\mu)] = 0.$$

Доказательство теоремы 2 намного проще доказательства теоремы 1, и мы его опускаем.

3. В качестве основы для построения оценки биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, в работе [5] была предложена периодограмма третьего порядка

$$I_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{n}{2\pi^2(n^2 + 1)} \prod_{j=1}^3 \sum_{k_j=-n}^n a(k_j) X(k_j) e^{-ik_j \lambda_j}, \quad (32)$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \pmod{2\pi}$, а множители $a(k)$ определяются соотношением (8).

Согласно формулам (2.3) и (2.4) работы [5],

$$\begin{aligned} EI_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{n}{2\pi^2(n^2 + 1)} \iint_{\Pi^2} F_n(\omega_1 + \omega_2) F_n(\omega_1) F_n(\omega_2) \\ &\quad \times f^{(3)}(\lambda_1 + \omega_1, \lambda_2 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (33)$$

где $F_n(\cdot)$ — ядро Фейера.

Что же касается дисперсии и ковариации периодограммы (32), то они описываются теоремами 1 и, соответственно, 2 работы [6], которые мы здесь воспроизводить не будем.

Новая модификация периодограммы третьего порядка, аналогичная периодограмме второго порядка $L_n(\lambda)$, описывается формулой

$$\begin{aligned} L_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2\pi^2 n} \sum_{k=-n}^n a(k) X(k) \prod_{j=1}^2 \sum_{k_j=-n}^n a(k_j) X(k + k_j) e^{-ik_j \lambda_j}, \end{aligned} \quad (34)$$

где множители $a(k)$ снова определяются соотношением (8).

Пользуясь формулой (7) и спектральным разложением третьего момента (семиинварианта) случайного процесса $X(k)$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} EL_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Pi^2} F_n(\omega_1) F_n(\omega_2) f^{(3)}(\lambda_1 + \omega_1, \lambda_2 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (35)$$

Следующие две теоремы описывают корреляционные свойства периодограммы (34).

Теорема 3. Пусть

$$\sum_{l_1 \in \mathbf{Z}} \cdots \sum_{l_{j-1} \in \mathbf{Z}} |r_j(l_1, \dots, l_{j-1})| < \infty \quad (36)$$

для $j = 2, 3, 4, 6$. Тогда

$$\begin{aligned} DL_n^{(3)}(\lambda) = & \left\{ \frac{10973}{7560} \chi_{\{\lambda_1 \equiv 0 \pmod{2\pi}\}}(\lambda) \chi_{\{\lambda_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}\}}(\lambda) \right. \\ & + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{4}{27} \chi_{\{\lambda_1 + \lambda_2 \cos j\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}\}}(\lambda) \right. \\ & \quad + \frac{361}{3024} \chi_{\{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j \equiv 0 \pmod{2\pi}\}}(\lambda) \\ & \quad \left. + \frac{151}{630} \chi_{\{\lambda_j \equiv 0 \pmod{2\pi}\}}(\lambda) \right] + \frac{4}{27} \Bigg\} \\ & \times \frac{n}{\pi} f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\lambda_1 + \lambda_2) + o(n), \end{aligned}$$

где $\chi_\Lambda(\lambda)$ — индикатор множества Λ , $\cos j\pi$ используется вместо $(-1)^j$ и $f(\lambda)$ — обычная спектральная плотность случайного процесса $X(k)$.

При исследовании ковариации случайных величин $L_n^{(3)}(\lambda)$ и $L_n^{(3)}(\mu)$ будем, как и в работе [6], предполагать, что обе точки λ и μ находятся в пределах треугольника

$$\Delta_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2): 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2\pi\},$$

который является одним из двенадцати основных (в терминологии работы [7]) множеств биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Теорема 4. Пусть, как и в условиях теоремы 3, справедливо предположение (36) для $j = 2, 3, 4, 6$. Тогда для любых точек

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{и} \quad \mu = (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0), \quad \lambda \neq \mu,$$

из треугольника Δ_1

$$\begin{aligned} & \text{cov}[L_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2), L_n^{(3)}(\mu_1, \mu_2)] \\ & \equiv \overline{EL_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) L_n^{(3)}(\mu_1, \mu_2)} - \overline{EL_n^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)} \overline{EL_n^{(3)}(\mu_1, \mu_2)} \\ & = \frac{n}{1260\pi} \chi_{\{\lambda_2=0\}}(\lambda) \chi_{\{\mu_2=0\}}(\mu) [302 + 533\chi_{\{\lambda_1=0\}}(\lambda)] \\ & \quad \times f(0) f(\lambda_1) f(\mu_1) + o(n). \end{aligned}$$

Располагая статистическими характеристиками периодограмм $I_n^{(3)}(\lambda)$ и $L_n^{(3)}(\lambda)$, мы можем судить о преимуществах и недостатках каждой из них. Формулы (32)–(35) со всей определенностью свидетельствуют, во-первых, о том, что смещение каждой из периодограмм стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если только биспектральная плотность $f^{(3)}(\lambda)$

непрерывна, и, во-вторых, о том, что периодограмма $L_n^{(3)}(\lambda)$ заметно проигрывает периодограмме $I_n^{(3)}(\lambda)$ в скорости убывания смещения.

Теорема 1 работы [6] и теорема 3 настоящей статьи, в свою очередь, свидетельствует, во-первых, о том, что дисперсия каждой из периодограмм растет как n с ростом объема выборки, и, во-вторых, о том, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{DL_n^{(3)}(\lambda)}{DI_n^{(3)}(\lambda)} \leq \frac{733}{2240} = 0,3272, \quad (37)$$

каково бы ни было $\lambda \in \Pi^2$.

Заметим, однако, что периодограммы $I_n^{(3)}(\lambda)$ и $L_n^{(3)}(\lambda)$ строятся по выборкам разной длины (это легко усмотреть из формул (32) и (34)). Если же мы сопоставим периодограммы $I_{2n}^{(3)}(\lambda)$ и $L_n^{(3)}(\lambda)$, построенные по выборкам одной и той же длины, то вместо (37) будем иметь

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{DL_n^{(3)}(\lambda)}{DI_{2n}^{(3)}(\lambda)} \leq \frac{733}{4480} = 0,1636.$$

Полученные нами результаты, разумеется, не позволяют сделать однозначный вывод, касающийся целесообразности применения той или иной периодограммы при построении оценки биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda)$. Многое зависит от объема выборки, от предполагаемой степени гладкости функции $f^{(3)}(\lambda)$. Не последнюю роль играет и выбор способа построения оценки биспектральной плотности: строим ли мы оценку типа Уэлча, получаемую осреднением периодограммы по сдвинутым во времени подынтервалам исходной реализации случайного процесса $X(k)$, или же мы ограничиваемся осреднением периодограммы по частотному аргументу λ , получая тем самым классическую периодограммную оценку. Ясно, однако, что во многих случаях периодограмма $L_n^{(3)}(\lambda)$ будет способна с честью выдержать конкуренцию с периодограммой $I_n^{(3)}(\lambda)$.

Что же касается доказательств теорем 3 и 4, то их публикация в полном объеме потребовала бы не одной тонны типографской бумаги. Мы укажем лишь, что приемы, используемые нами при доказательстве теорем 3 и 4, во многом сходны с приемами, уже знакомыми читателю, проследившему за доказательством теоремы 1. Наряду с ядрами $F_n(\cdot)$ и $J_n(\cdot)$, используются и ядра типа Джексона (4) и (5). Вместо равенства (29) используется соотношение

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-3} \iiint_{\Pi^3} F_n(\omega_1) F_n(\omega_2) J_n(\omega_3) J_n(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= \frac{1805n^8 + 2448n^6 + 2667n^4 + 1072n^2 - 432}{840(4n^7 + 4n^5 + n^3)}. \end{aligned}$$

И все же, особых сложностей доказательства теорем 3 и 4 не представляют. Они оказались даже проще доказательства теоремы 1 в том смысле, что здесь не было необходимости в применении неравенства Коши-Буняковского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и Джексона-Валле-Пуссена и их вероятностные применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 170–177.
2. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 280 с.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1989, 640 с.
4. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976, 755 с.
5. *Алексеев В. Г.* Некоторые вопросы оценивания биспектральной плотности стационарного случайного процесса. — Проблемы передачи информации, 1983, т. 19, в. 3, с. 38–51.
6. *Алексеев В. Г.* О некоторых важнейших свойствах периодограмм старших порядков. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 481–494.
7. *Алексеев В. Г.* О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных случайных процессов. — Матем. заметки, 1987, т. 41, № 5, с. 758–763.

Поступила в редакцию
20.V.1997