Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: Конечномерные распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 231–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:16:13

© 2004 г.

ВАТУТИН В. А.*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.*

**ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА
В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ. II:
КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾**

Пусть Z_n — число частиц в момент времени n в ветвящемся процессе в случайной среде. Предполагая, что процесс Z_n является в некотором смысле «критическим», мы доказываем теоремы об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ распределения вектора числа частиц $(Z_{[nt_1]}, \dots, Z_{[nt_b]})$, $0 < t_1 < \dots < t_b = 1$ при условии $Z_n > 0$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, вероятность невырождения, предельные теоремы, критический ветвящийся процесс, случайные блуждания, условие Спичера, устойчивые распределения, совместные распределения.

1. Введение и основные результаты

Содержание данной работы тесно связано со статьей [12], в которой для широкого класса ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС) исследовались асимптотика вероятности невырождения к моменту n и размер популяции в момент n при условии невырождения процесса к этому моменту. Как и в [12], мы будем рассматривать законы распределения числа частиц как случайные величины, определенные на множестве реализаций среды (quenched approach), и докажем для этих законов теоремы, которые можно интерпретировать как предельные теоремы ягломовского типа об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ распределения вектора числа частиц $(Z_{[nt_1]}, \dots, Z_{[nt_b]})$, $0 < t_1 < \dots < t_b = 1$, при условии $Z_n > 0$. Читатель может найти в статье [12] библиографические ссылки, связанные с таким подходом к изучению ВПСС. Для того чтобы сделать изложение результатов относительно замкнутым, мы напомним вначале ряд основных понятий, использовавшихся в [12].

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru, elena@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00266), РФФИ-ННИО (грант 02-01-04002), INTAS (проект 03-51-5018) и гранта НШ 1758.2003.1 Программы поддержки ведущих научных школ России.

Пусть $\{Z_n\}$, $n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, — ВПСС, в котором последовательные состояния среды задаются бесконечномерными векторами π_n :

$$\pi_n = \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}, \quad \pi_n(k) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (1.1)$$

причем наборы π_n независимы и одинаково распределены. При фиксированной среде эволюция ВПСС описывается соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad \mathbf{E} [s^{Z_{n+1}} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] = (f_n(s))^{Z_n}, \quad (1.2)$$

где

$$f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) s^k \quad (1.3)$$

— производящая функция числа потомков для частиц n -го поколения.

Пусть $X_k := \ln f'_{k-1}(1)$, $\eta_k := f''_{k-1}(1)(f'_{k-1}(1))^{-2}$, $k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$;
 $X \stackrel{d}{=} X_1$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

Мы будем называть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ *сопровождающим* случайным блужданием. В дальнейшем, не оговаривая это специально, мы *всегда* предполагаем, что распределение случайной величины X либо нерешетчато, либо центрально решетчато (т.е. X принимает лишь значения hk , $h > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $\mathbf{P}\{X = 0\} > 0$) и что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет *условию Спитцера*:

У с л о в и е A1. Существует число $0 < \rho < 1$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbf{P}\{S_m > 0\} \rightarrow \rho.$$

Наше следующее условие относится к урезанным моментам распределений π_n вида

$$\Theta(a) := \sum_{k=a}^{\infty} k^2 \pi(k) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \pi(k) \right)^{-2}, \quad a \in \mathbf{N}.$$

Для формулировки ограничений, связанных с величиной $\Theta(a)$, нам понадобятся некоторые функции, характеризующие случайное блуждание S_n . Пусть $\gamma_0 := 0$, $\gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j : S_n < S_{\gamma_j})$ и $\Gamma_0 := 0$, $\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j : S_n > S_{\Gamma_j})$, $j \geq 0$, — убывающие и возрастающие строгие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$. Введем функции

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\gamma_j} \geq -x\}, \quad x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$U(x) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\Gamma_j} < x\}, \quad x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0, \quad x < 0.$$

У с л о в и е A2. Существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/\rho+\varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[V(X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/(1-\rho)+\varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U(-X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty. \quad (1.5)$$

Всюду далее символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности, порождаемых исходной мерой ветвящегося процесса на наборах $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots; Z_0, Z_1, \dots, Z_n, \dots)$ (за исключением нескольких случаев, которые, как мы надеемся, не приведут к недоразумениям), символы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности относительно маргинальной меры на множестве сред, а символы $\mathbf{E}_\pi$, $\mathbf{P}_\pi$ — для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$. Более строгое описание измеримых пространств, на которых определены эти меры, будет дано в разделе 2.

Обозначим через $\mathbf{L} = \{\mathcal{L}\}$ множество всех собственных вероятностных законов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{\xi})$ случайных b -мерных векторов $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_b)$ с неотрицательными компонентами, и пусть $\mathbf{L}^+ \subset \mathbf{L}$ — множество вероятностных законов из $\mathbf{L}$, соответствующих случайным векторам, сосредоточенным на множестве $(0, \infty)^b$: $\mathbf{P}\{\xi_i > 0, i = 1, \dots, b\} = 1$. Пусть, далее, $\Phi = \{\Phi\}$ и $\Phi^+ \subset \Phi$ — пространства преобразований Лапласа $\Phi(\bar{\lambda}) = \int e^{-(\bar{\lambda}, \bar{x})} \mathcal{L}(d\bar{x})$, $\bar{\lambda}, \bar{x} \in [0, \infty)^b$, законов распределения из $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^+$ соответственно, оснащенные метрикой d_Λ , $\Lambda > 1$:

$$d_\Lambda(\Phi^*, \Phi^{**}) := \sup_{\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'} |\Phi^*(\bar{\lambda}) - \Phi^{**}(\bar{\lambda})|, \quad (1.6)$$

где $\bar{1} = (1, \dots, 1)$, $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \dots, \Lambda)$ — b -мерные векторы, а неравенства между векторами понимаются покомпонентно. Поскольку преобразование Лапласа закона распределения случайного вектора с неотрицательными компонентами однозначно определяется своими значениями в любом b -мерном кубе, содержащемся в $(0, \infty)^b$, то сходимость $\Phi_n \rightarrow \Phi$, $n \rightarrow \infty$, в метрике d_Λ эквивалентна слабой сходимости распределений $\mathcal{L}_n \xrightarrow{w} \mathcal{L}$, соответствующих преобразованиям Лапласа Φ_n и Φ . По тем же причинам набор $\{d_\Lambda, \Lambda > 1\}$ состоит из эквивалентных метрик. В дальнейшем в случае $b = 1$ вместо векторных обозначений мы будем использовать скалярные.

Обозначим символом $Z_n(k)$ число частиц, существующих в момент n , которые порождены одной частицей, существовавшей в момент $k \leq n$, и положим

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n(k) &:= \mathbf{E}_\pi Z_n(k) = e^{S_n - S_k}, & \mathbf{m}_n &:= \mathbf{m}_n(0), \\ \mathbf{m}_n^*(k) &:= \mathbf{E}_\pi [Z_n(k) \mid Z_n(k) > 0], & \mathbf{m}_n^* &:= \mathbf{m}_n^*(0), \\ Y_n(k) &:= \frac{Z_n(k)}{\mathbf{m}_n(k)}, & Y_n &:= Y_n(0), & \hat{Y}_n(k) &:= \frac{Z_n(k)}{\mathbf{m}_n^*(k)}, & \hat{Y}_n &:= \hat{Y}_n(0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Пусть, наконец, при $0 \leq k \leq n$

$$\Phi_{k,n,\pi}(\lambda) = \Phi_{k,n}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_n(k)} \mid Z_n(k) > 0 \right], \quad \Phi_n(\lambda) = \Phi_{0,n}(\lambda). \quad (1.8)$$

Теорема 1. Если выполнены условия A1 и A2, то

$$\Phi_n \Rightarrow \Phi, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где случайная функция $\Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \mathcal{L}(dy)$, $\lambda \in [0, \infty)$, является преобразованием Лапласа вероятностного закона $\mathcal{L}$, принадлежащего множеству $\mathbf{L}^+$ с вероятностью 1, а символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость вероятностных мер, заданных на σ -алгебре $\mathcal{B}_\Phi$ борелевских множеств метрического пространства Φ .

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда распределение случайной величины X является абсолютно непрерывным, теорема была доказана в [11]. При еще более сильных ограничениях аналог теоремы 1 был установлен ранее в [10] и [12]. В ходе дальнейших рассуждений мы получим более детальную информацию о распределении случайной функции (преобразования Лапласа) $\Phi(\lambda)$.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{L}_{n,\pi}(dx) = \mathcal{L}_n(dx) := \mathbf{P}_\pi(\hat{Y}_n \in dx \mid Z_n > 0)$. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\mathcal{L}_n \mapsto \mathcal{L}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

где символ $\mapsto$ обозначает следующий вид сходимости случайных мер $\mathcal{L}_n$ к случайной мере $\mathcal{L}$: для любой неслучайной ограниченной и непрерывной функции $J: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ последовательность действительных случайных величин $\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}_n(dx)$ слабо сходится к случайной величине $\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}(dx)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $I\{A\}$ обозначает индикатор события A .

Следствие 2. Если в условиях теоремы 1 производящие функции числа непосредственных потомков частиц любого поколения дробно-линейны, то $\mathcal{L}(dx) = e^{-x} I\{x \geq 0\} dx$ с вероятностью 1.

Для получения предельной теоремы, описывающей совместное распределение числа частиц в процессе в различные моменты времени, нам понадобятся дополнительные ограничения.

Зададим множество $\mathbf{A} = \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathbf{R}^2$ в виде

$$\mathbf{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leq 1\} \cup \{(1, 0); (2, 0)\}.$$

Обозначим через $C(\alpha, \beta)$ множество всех функций распределения, принадлежащих области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\chi(t) := \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbf{A}. \quad (1.11)$$

У с л о в и е A3. Существуют $(\alpha, \beta) \in \mathbf{A}$ такие, что распределение случайной величины X принадлежит множеству $C(\alpha, \beta)$ и, кроме того, $\mathbf{E}X = 0$, если $1 < \alpha \leq 2$.

Отметим, что если выполнено условие A3, то константа ρ в условии A1 имеет вид (см., например, [7])

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \left(-\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right).$$

Чтобы упростить обозначения, будем в дальнейшем при $n \in \mathbf{N}_0$ понимать произведение nt , $t \in [0, 1]$, как $[nt]$.

Для числа $b \geq 2$ и наборов $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_b)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_b)$, где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_b = 1$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, b$, положим

$$\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) := \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^b \lambda_i \hat{Y}_{nt_i} \right\} \mid Z_n > 0 \right]. \quad (1.12)$$

Пусть $\tau(n) := \min\{k \in [0, n]: S_j \geq S_k, j = 0, 1, \dots, n\}$ — самая левая из точек интервала $[0, n]$, в которых достигается минимальное значение случайного блуждания S_j , $j = 0, 1, \dots, n$. Известно (см. [13, гл. IV, § 20]), что при выполнении условия A1

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{w} \tau, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

где τ — случайная величина, распределенная по обобщенному закону арксинуса с параметром ρ , а символ $\xrightarrow{w}$ обозначает слабую сходимость.

Для натурального числа $d \leq b$ и вектора $\bar{r} = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_d)$ с целыми координатами $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_d = b$ введем событие

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\bar{t}, \bar{r}, n) &:= \left\{ \tau(nt_1) = \dots = \tau(nt_{r_1}) < \tau(nt_{r_1+1}) = \dots \right. \\ &= \tau(nt_{r_2}) < \dots < \tau(nt_{r_{d-1}+1}) = \dots = \tau(nt_{r_d}) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Теорема 2. Если выполнены условия A2 и A3, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) \mid \mathcal{U}(\bar{t}, \bar{r}, n) \right\} \Rightarrow (-1)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} \check{\Phi}'_i \left(\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \lambda_j \right) \check{\Phi}_d \left(\sum_{j=r_{d-1}+1}^b \lambda_j \right), \quad (1.15)$$

где случайные функции $\check{\Phi}_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, d$, независимы и распределены так же, как и $\check{\Phi}(\lambda)$ из (1.9).

З а м е ч а н и е 2. Нестрого говоря, теорема 2 показывает, что траектория процесса Z_j , $0 \leq j \leq n$, разбивается на независимые участки, порождаемые строгими убывающими лестничными моментами сопровождающего случайного блуждания. При этом размер популяции в момент j пропорционален величине $\mathbf{m}_n^+(j) \asymp e^{S_j - S_{\tau(j)}}$, а максимум популяции на промежутке $[0, n]$ пропорционален величине $e^{\max_{0 \leq j \leq n} (S_j - S_{\tau(j)})}$ (со случайным положительным коэффициентом пропорциональности, не превосходящим 1).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 исследуются свойства сопровождающих случайных блужданий и описана процедура перехода от ВПСС с независимыми одинаково распределенными производящими функциями к ВПСС с марковски зависимыми производящими функциями. Раздел 3 посвящен доказательству теоремы 1. В разделе 4 мы устанавливаем ряд свойств извилин строго устойчивых процессов Леви, а в разделе 5 показываем, что асимптотическое поведение числа частиц в ВПСС на временном промежутке $[0, n]$ определяется поведением производящих функций в окрестности точки минимума на этом отрезке сопровождающего случайного блуждания. В заключительной части статьи, разделе 6, мы доказываем теорему 2.

2. Свойства сопровождающих случайных блужданий и замены мер

Положим $\Gamma := \min\{n \geq 1: S_n \geq 0\}$, $\tilde{\Gamma} := \min\{n \geq 1: S_n \leq 0\}$, $\gamma := \min\{n \geq 1: S_n < 0\}$. Заметим, что если выполнено условие A1, то случайное блуждание S_n осциллирует. Поэтому определенные выше случайные величины конечны с вероятностью 1. Этот факт позволяет нам доказать следующее утверждение. Обозначим $D = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \mathbf{P}\{S_j = 0\}$.

Лемма 1. Если случайное блуждание осциллирует, то

$$\mathbf{E}U(-X)I\{-X > 0\} = e^{-D}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}U(x - X)I\{x - X > 0\} = U(x), \quad x > 0,$$

$$\mathbf{E}V(X) = V(0) = 1, \quad \mathbf{E}V(x + X) = V(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. Приводимое ниже доказательство близко к рассуждениям, использованным в лемме 1 работы [9]. Положим

$$a := \mathbf{P}\{S_1 = 0\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, S_{j+1} = 0\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} < \infty\} = \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} = 1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} = n + 1\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 \leq 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} > n, S_{n+1} \leq 0\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 < 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} > n, S_{n+1} < 0\} + a \\ &= \mathbf{P}\{0 < -X\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tilde{\Gamma} > n, S_n < -X\} + a \\ &= \mathbf{E}U(-X)I\{-X > 0\} + a. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства $a = 1 - e^{-D}$ (см., например, [5, гл. XII, § 10]) следует первое из соотношений в (2.1). Далее, при $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \mathbf{P}\{0 < S_1 < x\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, 0 < S_{j+1} < x\} \\ &= 1 + \mathbf{P}\{S_1 < x\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, S_{j+1} < x\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{S_1 < 0\} - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, S_{j+1} < 0\} - a \\ &= 1 + \mathbf{P}\{0 < x - X\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, S_j < x - X\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{0 < -X\} - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < S_1, \dots, 0 < S_j, S_j < -X\} - a \\ &= 1 + \mathbf{E}U(x - X)I\{x - X > 0\} - \mathbf{E}U(-X)I\{-X > 0\} - a \\ &= \mathbf{E}U(x - X)I\{x - X > 0\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Доказательство соотношений (2.2) проводится по такой же схеме с использованием равенства $1 = \mathbf{P}\{\Gamma < \infty\}$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из леммы 1 следует, что для любого $x > 0$ при помощи последовательностей $V(x + S_n)I(S_i + x > 0, i = 1, \dots, n)$ и $e^D U(x - S_n)I(x - S_i > 0, i = 1, \dots, n)$ можно задать марковские цепи S_n^+ и S_n^- на $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ соответственно с начальными распределениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_1^+ \in \mathcal{A}\} &= \mathbf{E}[I\{S_1 \in \mathcal{A} \cap [0, \infty)\} V(S_1)], \\ \mathbf{P}\{S_1^- \in \mathcal{A}\} &= \mathbf{E}[I\{S_1 \in \mathcal{A} \cap (-\infty, 0)\} e^D U(-S_1)] \end{aligned}$$

и вероятностями переходов для $\mathcal{A}^+ \subset [0, \infty)^{n-1}$ и $\mathcal{A}^- \subset (-\infty, 0)^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(S_2^+, \dots, S_n^+) \in \mathcal{A}^+ \mid S_1^+ = x\} \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{V(x + S_n)}{V(x)} I\{(S_2 + x, \dots, S_n + x) \in \mathcal{A}^+\}\right], \\ \mathbf{P}\{(S_2^-, \dots, S_n^-) \in \mathcal{A}^- \mid S_1^- = -x\} \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{U(x - S_n)}{U(x)} I\{(S_2 - x, \dots, S_n - x) \in \mathcal{A}^-\}\right]. \end{aligned}$$

В дальнейшем символы $c, c_i, i = 1, 2, \dots$, обозначают положительные константы. В разных формулах эти константы могут быть различными. Пусть

$$\begin{aligned} L_n &:= \min_{0 \leq k \leq n} S_k = S_{\tau(n)}, & m_n(x) &:= \mathbf{P}\{L_n \geq -x\}, \\ M_n &:= \max_{0 \leq k \leq n} S_k, & \tilde{m}_n(x) &:= \mathbf{P}\{M_n < x\}. \end{aligned}$$

Используя методы работ [2] или [4, раздел 8.9], несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. Если выполнено условие A1, то существуют медленно меняющиеся на бесконечности функции $l_1(n)$ и $l_2(n)$, связанные соотношением $l_1(n)l_2(n) \sim \pi/\sin \pi\rho$, $n \rightarrow \infty$, и константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что при всех $n \geq 1$ и всех $x \in [0, \infty)$

$$m_n(x) \leq \frac{c_1 V(x)}{n^{1-\rho} l_1(n)}, \quad \tilde{m}_n(x) \leq \frac{c_2 U(x)}{n^\rho l_2(n)},$$

причем для любого фиксированного значения $x \in (0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$m_n(x) \sim \frac{V(x)}{n^{1-\rho} l_1(n)}, \quad \tilde{m}_n(x) \sim \frac{e^D U(x)}{n^\rho l_2(n)}. \quad (2.4)$$

Кроме того,

$$m_n(0) = \mathbf{P}\{\gamma > n\} \sim \frac{1}{n^{1-\rho} l_1(n)}, \quad \mathbf{P}\{\Gamma > n\} \sim \frac{1}{n^\rho l_2(n)}. \quad (2.5)$$

Обозначим $\Pi_{(1)}$ множество всех бесконечномерных векторов вида (1.1), $\Pi_n := \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{(i)}$ — прямое произведение n копий $\Pi_{(1)}$, $\Pi := \Pi_\infty$, $\Sigma_n := \sigma(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1})$ — естественную σ -алгебру, порожденную подмножествами Π_n , $\Sigma := \overline{\bigvee_n \Sigma_n}$, где $\overline{\bigvee_n}$ обозначает дополнение $\bigvee_n \Sigma_n$ до σ -алгебры.

Пусть $\mathbf{P}$ — исходная мера нашего процесса в случайной среде, т.е. мера, построение которой осуществлено в два этапа: сначала строится мера $\mathbb{P}$ на измеримом пространстве (Π, Σ) , что позволяет корректно задать закон распределения последовательностей $\{f_n(s)\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ как случайных элементов измеримого пространства (Π, Σ) , а затем при фиксированной последовательности $\{\pi_n\}_{n \in \mathbf{N}_0} = \{f_n(s)\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ определяется мера $\mathbf{P}_\pi$ (порожденная в соответствии с правилом (1.2)) на σ -алгебре $\mathcal{F}^\infty$ борелевских подмножеств множества $\mathbf{N}_0^\infty = \{z: z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}, z_i \in \mathbf{N}_0\}$. Обозначим Ω_n множество элементарных событий, соответствующих наборам $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, Z_0, Z_1, \dots, Z_n$; при этом $\Omega = \Omega_\infty$. Пусть, далее,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, Z_0, Z_1, \dots, Z_n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{F} := \overline{\bigvee_n \mathcal{F}_n} \quad (2.6)$$

— набор основных σ -алгебр для ВПСС.

В дальнейшем нам будет удобно перейти от ВПСС с независимыми и одинаково распределенными производящими функциями $\{f_n(s)\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ к ВПСС с марковски зависимыми производящими функциями. Для описания необходимой конструкции мы будем использовать, наряду с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, новое вероятностное пространство $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)$, в котором $\Omega^\pm$, $\mathcal{F}^\pm$ и $\mathbf{P}^\pm$ являются копиями Ω , $\mathcal{F}$ и $\mathbf{P}$ соответственно. В последующем изложении любые характеристики или случайные величины, связанные с $\Omega^\pm$, $\mathcal{F}^\pm$ и

(если это имеет смысл) с $\mathbf{P}^\pm$, будут снабжаться знаками $-$ и $+$ соответственно. Например, мы будем писать $\{f_n^-\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ и $\{f_n^+\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ и обозначать $\{S_n^-\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ и $\{S_n^+\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ сопровождающие случайные блуждания, соответствующие этим реализациям. Нам будут также необходимы случайные величины $\Gamma^- = \min\{n \geq 1: S_n^- \geq 0\}$ и $\gamma^+ = \min\{n \geq 1: S_n^+ < 0\}$ и событие $\mathcal{A}_{k,p} := \{\Gamma^- > k, \gamma^+ > p\}$.

Определим на измеримых пространствах $(\Omega^-, \mathcal{F}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+)$ меры $\hat{\mathbf{P}}^-$ и $\hat{\mathbf{P}}^+$, положив для $\mathcal{A}^- \in \mathcal{F}_k^-$, $\mathcal{A}^+ \in \mathcal{F}_p^+$, $k, p \in \mathbf{N}$,

$$\hat{\mathbf{P}}_k^-(\mathcal{A}^-) = e^D \int_{\mathcal{A}^-} U(-S_k^-) I\{\Gamma^- > k\} d\mathbf{P}^-, \quad (2.7)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_p^+(\mathcal{A}^+) = \int_{\mathcal{A}^+} V(S_p^+) I\{\gamma^+ > p\} d\mathbf{P}^+. \quad (2.8)$$

Нетрудно проверить, используя соотношения (2.1) и (2.2), что вероятностные меры $\hat{\mathbf{P}}_k^-$, $k \in \mathbf{N}$, так же как и меры $\hat{\mathbf{P}}_p^+$, $p \in \mathbf{N}$, согласованы и, следовательно, существуют вероятностные меры $\hat{\mathbf{P}}^\pm$ на $\mathcal{F}^\pm$ такие, что

$$\hat{\mathbf{P}}^-|_{\mathcal{F}_k^-} = \hat{\mathbf{P}}_k^- \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{P}}^+|_{\mathcal{F}_p^+} = \hat{\mathbf{P}}_p^+.$$

Используя замечание 3, нетрудно убедиться в том, что меры $\hat{\mathbf{P}}^-$ и $\hat{\mathbf{P}}^+$ задают однородные цепи Маркова на множествах производящих функций. Например, мера $\hat{\mathbf{P}}^+$ порождает следующую цепь:

$$\hat{\mathbf{P}}^+\{f_0 \in \mathcal{A}\} = \mathbb{E}\left[I\{f_0 \in \mathcal{A}\} V(S_1) I\{\ln f'_0(1) \geq 0\}\right],$$

и поскольку $S_1 = \ln f'_0(1) = x$ однозначно определяется по $f_0 = y$, то

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^+(f_1 \in \mathcal{A} \mid f_0 = y) \\ = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(f_1 \in \mathcal{A} \mid \ln f'_1(1) = X_2) \frac{V(X_2 + x)}{V(x)} I\{x \geq 0\} \mid f_0 = y\right]. \end{aligned}$$

Определим, наконец, на измеримом пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$ вероятностную меру $\hat{\mathbf{P}} := \hat{\mathbf{P}}^- \times \hat{\mathbf{P}}^+$, положив для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k,p}(\mathcal{A}) = e^D \int_{\mathcal{A}} U(-S_k^-) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{k,p}\} d(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+). \quad (2.9)$$

Как и прежде, используя соотношения (2.1) и (2.2), можно проверить, что вероятностные меры $\hat{\mathbf{P}}_{k,p}$, $k, p \in \mathbf{N}$, согласованы и

$$\hat{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+} = \hat{\mathbf{P}}_{k,p}.$$

В дальнейшем мы будем использовать символы $\hat{\mathcal{L}}^\pm$ и $\hat{\mathcal{L}}$ для обозначения законов распределения, порождаемых мерами $\hat{\mathbf{P}}^\pm$ и $\hat{\mathbf{P}}$ соответственно. Аналогичный смысл будут иметь символы $\hat{\mathbf{E}}^\pm$ и $\hat{\mathbf{E}}$.

Важность мер $\hat{\mathbf{P}}^-$, $\hat{\mathbf{P}}^+$ и $\hat{\mathbf{P}}$ показывает следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 2.5 работы [2].

Лемма 3. Пусть выполнено условие A1, и пусть $T_{l,p}$, $l, p \in \mathbf{N}$, — набор равномерно ограниченных случайных величин таких, что случайная величина $T_{l,p}$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_l^- \times \mathcal{F}_p^+$ для любой пары l, p . Тогда

$$\lim_{\min(n,r) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[T_{l,p} | \mathcal{A}_{n,r}] = \hat{\mathbf{E}}[T_{l,p}]. \quad (2.10)$$

Более общо, если набор $\{T_{n,r}, n, r \in \mathbf{N}\}$ состоит из равномерно ограниченных случайных величин, согласованных с потоком σ -алгебр $\{\mathcal{F}_n^- \times \mathcal{F}_r^+\}_{n \geq 1, r \geq 1}$, и $\lim_{\min(n,r) \rightarrow \infty} T_{n,r} =: T$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -н.н., то

$$\lim_{\min(n,r) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[T_{n,r} | \mathcal{A}_{n,r}] = \hat{\mathbf{E}}[T]. \quad (2.11)$$

Доказательство. При $l \leq n, p \leq r$ имеем

$$\mathbf{E}[T_{l,p} | \mathcal{A}_{n,r}] = \frac{\mathbf{E}[T_{l,p} I\{\mathcal{A}_{l,p}\} \tilde{m}_{n-l}^-(-S_l^-) m_{r-p}^+(S_p^+)]}{\mathbf{P}\{\Gamma^- > n\} \mathbf{P}\{\gamma^+ > r\}}. \quad (2.12)$$

Из леммы 2 следует, что при фиксированных l, p и $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{m}_{n-l}^-(x)}{\mathbf{P}\{\Gamma^- > n\}} = e^D U(x), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_{r-p}^+(x)}{\mathbf{P}\{\gamma^+ > r\}} = V(x).$$

Более того, существует константа $C > 0$ такая, что при всех $x \geq 0$ и всех $n \geq l$ и $r \geq p$

$$\frac{\tilde{m}_{n-l}^-(x)}{\mathbf{P}\{\Gamma^- > n\}} \leq C U(x) \quad \text{и} \quad \frac{m_{r-p}^+(x)}{\mathbf{P}\{\gamma^+ > r\}} \leq C V(x).$$

Отсюда, используя теорему о мажорируемой сходимости и переходя к пределу в (2.12), получаем

$$\lim_{\min(n,r) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[T_{l,p} | \mathcal{A}_{n,r}] = \mathbf{E}[T_{l,p} e^D U(-S_l^-) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{l,p}\}] = \hat{\mathbf{E}}[T_{l,p}]. \quad (2.13)$$

Для доказательства предельного соотношения (2.11) заметим, что для любых чисел $\sigma > 1$ и $l \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}[T_{n,r} - T_{l,l} | \mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}]| \\ & \leq \mathbf{E} \left[|T_{n,r} - T_{l,l}| \frac{\tilde{m}_{(\sigma-1)n}^-(-S_n^-)}{\tilde{m}_{\sigma n}^-(0)} \frac{m_{(\sigma-1)r}^+(S_r^+)}{m_{\sigma r}^+(0)} I\{\mathcal{A}_{n,r}\} \right] \\ & \leq c \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right)^{-\rho} \mathbf{E} \left[|T_{n,r} - T_{l,l}| e^D U(-S_n^-) V(S_r^+) I\{\mathcal{A}_{n,r}\} \right] \\ & = c \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right)^{-\rho} \hat{\mathbf{E}}[|T_{n,r} - T_{l,l}|]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условия леммы и теорему о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{\min(n,r) \rightarrow \infty} |\mathbf{E}[T_{n,r} - T_{l,l} | \mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}]| = 0.$$

В частности, $\mathbf{E}[T_{n,r}I\{\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}\}] = (\hat{\mathbf{E}}[T] + o(1)) \mathbf{P}(\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r})$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}[T_{n,r}I\{\mathcal{A}_{n,r}\}] - \hat{\mathbf{E}}[T] \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r}) \right| \\ & \leq \left| \mathbf{E}[T_{n,r}I\{\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}\}] - \hat{\mathbf{E}}[T] \mathbf{P}(\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}) \right| + c |\mathbf{P}(\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}) - \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r})| \\ & \leq \left(o(1) + c((1 - \sigma^{-\rho}) \sigma^{\rho-1} + (1 - \sigma^{1-\rho})) \right) \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r}), \end{aligned}$$

поскольку, согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}(\mathcal{A}_{\sigma n, \sigma r}) - \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r})| \\ & = \left| \mathbf{P}\{\Gamma^- > n\sigma\} \mathbf{P}\{\gamma^+ > \sigma r\} - \mathbf{P}\{\Gamma^- > n\} \mathbf{P}\{\gamma^+ > r\} \right| \\ & \leq |\mathbf{P}\{\Gamma^- > n\sigma\} - \mathbf{P}\{\Gamma^- > n\}| \mathbf{P}\{\gamma^+ > \sigma r\} \\ & \quad + |\mathbf{P}\{\gamma^+ > r\} - \mathbf{P}\{\gamma^+ > \sigma r\}| \mathbf{P}\{\Gamma^- > n\} \\ & \leq c((1 - \sigma^{-\rho}) \sigma^{\rho-1} + (1 - \sigma^{1-\rho})) \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[T_{n,r}I\{\mathcal{A}_{n,r}\}] - \hat{\mathbf{E}}[T] \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r}) = o(\mathbf{P}(\mathcal{A}_{n,r}))$$

при $\min(n, r) \rightarrow \infty$, что эквивалентно (2.11).

Лемма 4. Пусть выполнено условие A1, и пусть T и $T_{l,p}$, $l, p \in \mathbf{N}$, — набор случайных величин, удовлетворяющих условиям леммы 3. Если $T_{l,p}^*$, $l, p \in \mathbf{N}$, — набор ограниченных случайных величин таких, что случайная величина $T_{l,p}^*$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_l^- \times \mathcal{F}_p^+$ для любой пары l, p и

$$\mathbf{E}[T_{\tau(n),n}^* | \tau(n) = l] = \mathbf{E}[T_{l,n-l} | \mathcal{A}_{l,n-l}],$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[T_{\tau(n),n}^*] = \hat{\mathbf{E}}[T]. \quad (2.14)$$

В частности, если $T_{l,n-l} = T_l^- \times T_{n-l}^+$, где случайные величины T_l^- , T_{n-l}^+ таковы, что

$$\mathbf{E}[T_{l,n-l} | \mathcal{A}_{l,n-l}] = \mathbf{E}[T_l^- | \Gamma^- > l] \mathbf{E}[T_{n-l}^+ | \gamma^+ > n - l],$$

причем пределы $\lim_{l \rightarrow \infty} T_l^- = T^-$, $\lim_{p \rightarrow \infty} T_p^+ = T^+$ существуют $\hat{\mathbf{P}}^-$ - и $\hat{\mathbf{P}}^+$ -н.н. соответственно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[T_{\tau(n),n}^*] = \hat{\mathbf{E}}^-[T^-] \hat{\mathbf{E}}^+[T^+]. \quad (2.15)$$

Доказательство. Ввиду (1.13) для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta \in (0, 2^{-1})$ такое, что $\mathbf{P}\{\tau(n) \notin [n\delta, n(1 - \delta)]\} < \varepsilon$ при всех достаточно больших n . Теперь для доказательства леммы достаточно воспользоваться формулой полной вероятности относительно событий $\{\tau(n) = k\}$, $0 \leq k \leq n$, и применить лемму 3.

Положим

$$\begin{aligned}\chi_j(s) &:= \frac{1}{1-f_j(s)} - \frac{1}{f'_j(1)(1-s)}, & 0 \leq s \leq 1, \\ f_{k,n}(s) &:= f_k(f_{k+1}(\cdots f_{n-1}(s) \cdots)), & 0 \leq k \leq n-1, \quad f_{n,n}(s) := s, \\ f_{n,0}(s) &:= f_{n-1}(f_{n-2}(\cdots f_0(s) \cdots)), & n \geq 1.\end{aligned}$$

В дальнейших рассуждениях мы будем существенно опираться на следующие известные результаты.

Лемма 5 (см. [6]). Пусть $f_j \neq 1$, $0 \leq j \leq n-1$. Тогда при любых $0 \leq s < 1$ и $0 \leq m \leq n-1$

$$\frac{1}{1-f_{m,n}(s)} = \frac{e^{-S_n+S_m}}{1-s} + \sum_{j=m}^{n-1} \eta_{j,n}(s) e^{-S_j+S_m}, \quad (2.16)$$

где

$$\eta_{j,n}(s) := \chi_j(f_{j+1,n}(s)) \leq \eta_{j+1} = \frac{f''_j(1)}{(f'_j(1))^2}. \quad (2.17)$$

Если, к тому же, производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то $\eta_{j,n}(s) = \eta_{j+1}/2$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Лемма 6 (ср. с [2]). Пусть выполнены условие (1.4) и либо условие A1, либо условие A3. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-S_j} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^+ \text{-н.н.},$$

а если выполнены условие (1.5) и либо условие A1, либо условие A3, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e^{S_j} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^- \text{-н.н.}$$

3. Доказательство теоремы 1

Приступим к доказательству теоремы 1. Очевидно, что

$$\Phi_n(\lambda) = \mathbf{E}_\pi [e^{-\lambda \hat{Y}_n} | Z_n > 0] = 1 - \frac{1 - f_{0,n}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_n^*})}{1 - f_{0,n}(0)}.$$

Поскольку $1 - f_{0,n}(0) = 1 - f_{0,\tau(n)}(f_{\tau(n),n}(0))$ и

$$\begin{aligned}1 - f_{0,n}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_n^*}) \\ = 1 - f_{0,\tau(n)}\left(f_{\tau(n),n}\left(\exp\{-\lambda(1 - f_{0,\tau(n)}(f_{\tau(n),n}(0)))\} e^{-S_{\tau(n)}} e^{S_{\tau(n)} - S_n}\right)\right),\end{aligned}$$

то для любой функции $G: \Phi \rightarrow \mathbf{R}$, ограниченной и равномерно непрерывной на Φ в метрике d_Λ , справедливо равенство

$$\mathbf{E}[G(\Phi_n(\cdot)) | \tau(n) = k] = \mathbf{E}[G(R_{k,n-k}(\cdot)) | A_{k,n-k}], \quad k \in [0, n],$$

где

$$R_{k,r}(\lambda) := 1 - \frac{1 - f_{k,0}^-(f_{0,r}^+((\exp\{-\lambda(1 - f_{k,0}^-(f_{0,r}^+(0)))e^{-S_k^-}e^{-S_r^+}\})))}{1 - f_{k,0}^-(f_{0,r}^+(0))}, \quad (3.1)$$

причем последовательности производящих функций $\{f_n^-\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{f_n^+\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ независимы, а $S_k^\pm = \sum_{j=0}^{k-1} \ln(f_j^\pm)'(1)$. Полагая

$$\zeta_k^-(s) := (1 - f_{k,0}^-(s))e^{-S_k^-}, \quad s \in [0, 1), \quad \zeta_{0,n} := \zeta_k^-(f_{0,n-k}^+(0)),$$

можно записать $R_{k,n-k}(\lambda)$ в виде

$$R_{k,n-k}(\lambda) = 1 - \frac{\zeta_k^-(f_{0,n-k}^+(\exp\{-\lambda\zeta_{0,n}e^{-S_{n-k}^+}\}))}{\zeta_k^-(f_{0,n-k}^+(0))}. \quad (3.2)$$

Покажем, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} R_{k,n}(\lambda)$ существует при всех $\lambda \geq 0$. Положим $\eta_{j,0}^-(s) := \chi_{j-1}^-(f_{j-1,0}^-(s))$. Поскольку $\zeta_{k+1}^-(s) \leq \zeta_k^-(s)$, $k \in \mathbb{N}$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k^-(s) =: \zeta^-(s)$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. и в силу лемм 5, 6 и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta^-(s)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta_k^-(s)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{S_k^-}}{1 - f_{k,0}^-(s)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} + \sum_{j=1}^k \eta_{j,0}^-(s) e^{S_j^-} \right) \\ &\leq \frac{1}{1-s} + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e^{S_j^-} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^- \text{-п.н.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

предельная функция непрерывна в любой точке $s \in [0, 1)$. Аналогично, $\lim_{n-k \rightarrow \infty} f_{0,n-k}^+(0) =: q^+$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. и, более того, $\hat{\mathbf{P}}\{q^+ < 1\} = 1$, поскольку при $i \rightarrow \infty$ последовательность случайных величин S_i^+ стремится к бесконечности $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. и

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q^+} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{1-f_{0,i}^+(0)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-S_i^+}}{1-s} + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_{j,i}^+(0) e^{-S_j^+} \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^+ \text{-п.н.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда вытекает, что предел

$$\zeta := \lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} \zeta_k^-(f_{0,n-k}^+(0)) = \zeta^-(q^+) \quad (3.5)$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., причем $\hat{\mathbf{P}}\{\zeta \in (0, 1]\} = 1$. Покажем теперь, что

$$\lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} \zeta_k^-\left(f_{0,n-k}^+\left(\exp\{-\lambda\zeta_{0,n}e^{-S_{n-k}^+}\}\right)\right), \quad \lambda \in (0, \infty),$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Рассмотрим сначала случайную функцию

$$\theta_{k,n-k}(\lambda) := \zeta_k^-\left(f_{0,n-k}^+\left(\exp\{-\lambda e^{-S_{n-k}^+}\}\right)\right).$$

Пусть Z_j^+ , $j \in \mathbf{N}_0$, — ветвящийся процесс, порожденный последовательностью $f_0^+, f_1^+, \dots$, а $\mathcal{S}^i = \sigma(Z_0^+, Z_1^+, \dots, Z_i^+ | f_0^+, f_1^+, \dots, f_{i-1}^+)$ — минимальная σ -алгебра, порожденная последовательностью $Z_0^+, Z_1^+, \dots, Z_i^+$ при фиксированном отрезке среды $f_0^+, f_1^+, \dots, f_{i-1}^+$. Так как

$$\mathbf{E}_{\pi^+} [Z_{i+1}^+ | Z_i^+] = e^{X_{i+1}^+} Z_i^+,$$

то стохастическая последовательность $(Z_i^+ e^{-S_i^+}, \mathcal{S}^i)$, $i \in \mathbf{N}_0$, является неотрицательным мартингалом. Поскольку

$$\mathbf{E}_{\pi^+} [\exp\{-\lambda Z_i^+ e^{-S_i^+}\}] = f_{0,i}^+ (\exp\{-\lambda e^{-S_i^+}\}), \quad \lambda \in [0, \infty),$$

то для любого $\lambda > 0$ предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{0,i}^+ (\exp\{-\lambda e^{-S_i^+}\}) =: Q^+(\lambda)$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Более того, $\hat{\mathbf{P}}\{Q^+(\lambda) < 1\} = 1$ для любого $\lambda > 0$, так как $S_i^+ \rightarrow \infty$ $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. и (ср. с (3.4))

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - Q^+(\lambda)} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - f_{0,i}^+ (\exp\{-\lambda e^{-S_i^+}\})} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-S_i^+}}{1 - \exp\{-\lambda e^{-S_i^+}\}} + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_{j,i}^+ (\exp\{-\lambda e^{-S_i^+}\}) e^{-S_j^+} \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^+\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. $\lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} \theta_{k, n-k}(\lambda) = \zeta^-(Q^+(\lambda))$. Функция $Q^+(\lambda)$, будучи преобразованием Лапласа неотрицательной невырожденной случайной величины, равномерно непрерывна по λ в любом конечном интервале $0 \leq a \leq \lambda \leq b < \infty$. Отсюда и из (3.5) вытекает, что при всех $\lambda > 0$ предел

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &:= \lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} R_{k, n-k}(\lambda) \\ &= 1 - \frac{\lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} \zeta_k^-(f_{0, n-k}^+(e^{-\lambda/m_n^*}))}{\lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} \zeta_k^-(f_{0, n-k}^+(0))} \\ &= 1 - \frac{\zeta^-(Q^+(\lambda \zeta^-(q^+)))}{\zeta} = 1 - \frac{\zeta^-(Q^+(\lambda \zeta))}{\zeta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. и, следовательно, для любой функции $G: \Phi \rightarrow \mathbf{R}$, равномерно непрерывной и ограниченной на Φ в метрике d_Λ ,

$$\lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G(\Phi_n(\cdot)) | \tau(n) = k] = \hat{\mathbf{E}}[G(\Phi(\cdot))]. \quad (3.7)$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G(\Phi_n(\cdot))] = \hat{\mathbf{E}}[G(\Phi(\cdot))]$. Осталось проверить, что мера $\mathcal{L}$ с преобразованием Лапласа $\Phi(\lambda) = \int_{x \in \mathbf{R}} e^{-\lambda x} \mathcal{L}(dx)$ не имеет

атома в нуле $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. и, значит, $\widehat{\mathbf{P}}(\mathcal{L} \in \mathbf{L}^+) = 1$. Для этого достаточно показать, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda) = 0$ $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. Положим $W^* = \lim_{i \rightarrow \infty} Z_i^+ e^{-S_i^+}$. В предложении 3.1 работы [2] установлено $\mathbf{P}$ -п.н. равенство событий $\{\pi^+: W^* > 0\} = \{\pi^+: Z_i^+ > 0 \text{ для всех } i\}$. Поэтому

$$q^+ = \mathbf{P}_{\pi^+} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} Z_i^+ = 0 \right\} = \mathbf{P}_{\pi^+} \{W^* = 0\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q^+(\lambda) \quad \mathbf{P}^+-\text{п.н.}$$

Из этого равенства, соотношений (3.5) и (3.6) и непрерывности функции $\zeta^-(s)$ при $s \in [0, 1)$ легко вывести, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda) = 1 - \frac{\zeta^-(q^+)}{\zeta} = 0 \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Для того чтобы убедиться в справедливости следствия 1, достаточно показать, что для любых непрерывных и ограниченных функций $g, J: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \left(\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}_n(dx) \right) \right] = \widehat{\mathbf{E}} \left[g \left(\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}(dx) \right) \right]. \quad (3.8)$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[g \left(\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}_n(dx) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E} \left[g \left(\int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}_{k,n-k}(dx) \right) \middle| \mathcal{A}_{k,n-k} \right] \mathbb{P}\{\tau(n) = k\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\mathcal{L}_{k,n-k}$ — мера, соответствующая преобразованию Лапласа $R_{k,n-k}(\lambda)$ из (3.2). Из соотношения (3.6) и теоремы единственности для преобразований Лапласа вытекает, что при $\min(k, n-k) \rightarrow \infty$ последовательность (случайных) мер $\mathcal{L}_{k,n-k}$ слабо сходится $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. к (случайной) мере $\mathcal{L}$, преобразованием Лапласа которой является функция $\Phi(\lambda)$ из (3.6). Это означает, что для любой ограниченной и непрерывной функции $J(x)$

$$\lim_{\min(k, n-k) \rightarrow \infty} \int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}_{k,n-k}(dx) = \int_{x \in \mathbf{R}} J(x) \mathcal{L}(dx) \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Отсюда, вспоминая лемму 3 и используя представление (3.9), нетрудно вывести (3.8).

Доказательство следствия 2. Для доказательства этого следствия достаточно, опираясь на теорему 1, дословно повторить рассуждения, проводившиеся в работе [11] для случая, когда распределение случайной величины X абсолютно непрерывно.

Лемма 7. Пусть $\Psi_n(\lambda) := \mathbf{E}_\pi[\widehat{Y}_n e^{-\lambda \widehat{Y}_n} \mid Z_n > 0]$. Если выполнены условия A1 и A2, то при $n \rightarrow \infty$

$$\Psi_n(\cdot) \Rightarrow -\Phi'(\cdot). \quad (3.10)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\Psi_n(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} \mathbf{E}_\pi[e^{-\lambda \hat{Y}_n} | Z_n > 0] = -\Phi'_n(\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Следовательно, для любой функции $G: \Phi \rightarrow \mathbf{R}$, ограниченной и равномерно непрерывной в Φ в метрике d_Λ ,

$$\mathbf{E}[G(\Psi_n(\lambda)) | \tau(n) = k] = \mathbf{E}[G(R'_{k,n-k}(\lambda)) | \mathcal{A}_{k,n-k}],$$

где функция $R_{k,n-k}(\lambda)$ та же, что и в (3.2). Как следует из доказательства теоремы 1, $\lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} R_{k,n-k}(\lambda) = \Phi(\lambda)$, $\lambda \in [0, \infty)$, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., причем как $R_{k,n-k}(\lambda)$, так и $\Phi(\lambda)$ являются аналитическими функциями в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Отсюда при любом $\lambda > 0$ вытекает сходимость производных

$$\lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} R'_{k,n-k}(\lambda) = -\Phi'(\lambda) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.} \quad (3.11)$$

Более того, эта сходимость равномерна в любом конечном интервале $1 \leq \lambda \leq \Lambda$. Поэтому

$$\lim_{\min(k,n-k) \rightarrow \infty} d_\Lambda(R'_{k,n-k}(\cdot), \Phi'(\cdot)) = 0 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 3 и формулой полной вероятности

$$\mathbf{E}[G(\Psi_n(\cdot))] = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[G(R'_{k,n-k}(\cdot)) | \mathcal{A}_{k,n-k}] \mathbb{P}\{\tau(n) = k\}.$$

4. Случайные блуждания и процессы Леви

В этом разделе мы установим ряд свойств случайных блужданий, которые понадобятся нам в дальнейшем. Известно, что для случайного блуждания, у которого распределения приращений удовлетворяют условию АЗ, найдутся $\alpha \in (0, 2]$ и медленно меняющаяся на бесконечности функция $l_1(n)$ такие, что при $w_n = n^{1/\alpha} l_1(n)$ в пространстве $D[0, 1]$, оснащенном топологией Скорохода, имеет место сходимость

$$\left\{ \hat{S}_n(t) := \frac{S_{nt}}{w_n}, 0 \leq t \leq 1 \right\} \Longrightarrow \{W(t), 0 \leq t \leq 1\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где $W(t)$ — строго устойчивый процесс Леви порядка α . Кроме того (см., например, [8]), при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $D[0, 1]$ имеет место сходимость условных процессов

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{S}_n(t), 0 \leq t \leq 1 | \gamma > n \right\} &\Longrightarrow \{W^+(t), 0 \leq t \leq 1\}, \\ \left\{ \hat{S}_n(t), 0 \leq t \leq 1 | \Gamma > n \right\} &\Longrightarrow \{W^-(t), 0 \leq t \leq 1\}, \end{aligned}$$

где W^+ и W^- — извилины устойчивого процесса Леви порядка α . Отметим, что W^+ является броуновской извилиной в случае $\alpha = 2$, причем $W^- \stackrel{d}{=} -W^+$. В общей ситуации распределения W^+ и W^- не известны и, вообще говоря, не обладают упомянутым свойством симметрии.

Нам понадобятся некоторые простые свойства извилины устойчивых процессов Леви.

Лемма 8. Для любого $\delta \in (0, 1)$

$$\limsup_{y \rightarrow +0} \sup_{\delta \leq t \leq 1} \sup_x \mathbf{P}\{x - y < W^\pm(t) < x + y\} = 0 \quad (4.2)$$

и, кроме того, для любого $z_0 > 0$

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \sup_x \left| \mathbf{P}\{W^\pm(1) < xz\} - \mathbf{P}\{W^\pm(1) < xz_0\} \right| = 0. \quad (4.3)$$

Доказательство. Для фиксированного $\Delta \in (0, \delta)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x - y < W^+(t) < x + y\} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x - y < \widehat{S}_{nt} < x + y \mid \gamma > n\} \\ &\leq (t - \Delta)^{\rho-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{x - y \leq \widehat{S}_{nt} - \widehat{S}_{n(t-\Delta)} + \widehat{S}_{n(t-\Delta)} \right. \\ &\quad \left. \leq x + y \mid \gamma > n(t - \Delta)\right\} \\ &\leq (t - \Delta)^{\rho-1} \mathbf{P}\left\{x - 2y < W(\Delta) + (t - \Delta)^{1/\alpha} W^+(1) < x + 2y\right\}, \end{aligned}$$

где $W(u)$, $u \geq 0$, — строго устойчивый процесс Леви порядка α , не зависящий от $W^+(1)$. Поскольку распределение случайной величины $W(\Delta)$ является абсолютно непрерывным с ограниченной плотностью, то

$$\limsup_{y \rightarrow +0} \sup_A \mathbf{P}\{A - 2y < W(\Delta) < A + 2y\} = 0.$$

Отсюда и из предыдущих оценок легко следует (4.2) для W^+ .

Далее, предполагая без ограничения общности, что $z \downarrow z_0$, и рассматривая отдельно случаи $x > N$ и $0 \leq x \leq N$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{P}\{W^+(1) < xz\} - \mathbf{P}\{W^+(1) < xz_0\} = \mathbf{P}\{xz_0 \leq W^+(1) < xz\} \\ &\leq \mathbf{P}\{Nz_0 \leq W^+(1)\} + \mathbf{P}\{xz_0 \leq W^+(1) < xz_0 + (z - z_0)N\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из результатов работы [8] (см., в частности, теорему 6 раздела 3.2 и теорему 5 раздела 4.2) нетрудно заключить, что случайная величина $W^+(1)$ является собственной. Отсюда и из соотношений (4.2) и (4.4) вытекает (4.3) для процесса $W^+(1)$.

К процессу W^- следует применить аналогичные рассуждения.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть T_r , $r \in \mathbf{N}_0$, — набор ограниченных случайных величин таких, что T_r измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r$ при любом r , и пусть $\hat{S}_n := \hat{S}_n(1)$. Если выполнено условие АЗ, то для любого $r \in \mathbf{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}((T_r; \hat{S}_n) | \gamma > n) \xrightarrow{w} \widehat{\mathcal{L}}^+(T_r) \mathcal{L}(W^+(1)), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}((T_r; \hat{S}_n) | \Gamma > n) \xrightarrow{w} \widehat{\mathcal{L}}^-(T_r) \mathcal{L}(W^-(1)). \quad (4.6)$$

Доказательство. Для оправдания (4.5) достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g_1(T_r) g_2(\hat{S}_n) | \gamma > n] = \widehat{\mathbf{E}}^+[g_1(T_r)] \mathbf{E}[g_2(W^+(1))]$$

для любых непрерывных в $\mathbf{R}$ функций $0 \leq g_1(x) \leq c_1$ и $0 \leq g_2(x) \leq 1$.

Положим

$$L_{r,n} = \min_{0 \leq j \leq n-r} (S_{j+r} - S_r) \quad \text{и} \quad \hat{S}_n^{j,l} = (S_l - S_j)/w_n.$$

Для фиксированного r имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [g_1(T_r) g_2(\hat{S}_n) | \gamma > n] \\ &= \mathbf{E} \left[g_1(T_r) I\{\gamma > r\} \frac{m_{n-r}(-S_r)}{\mathbf{P}\{\gamma > n\}} \right. \\ & \quad \left. \times \mathbf{E} [g_2(\hat{S}_n^{0,r} + \hat{S}_n^{r,n}) | X_1, \dots, X_r; L_{r,n} \geq -S_r] \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 2, а также лемму 2.3 статьи [2] и теорему о мажорируемой сходимости, получаем

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [g_1(T_r) g_2(\hat{S}_n) | \gamma > n] \\ & \leq \mathbf{E} [g_1(T_r) I\{\gamma > r\} V(S_r) \\ & \quad \times \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [g_2(\hat{S}_n^{0,r} + \hat{S}_n^{r,n}) | X_1, \dots, X_r; L_{r,n} \geq -S_r]] \\ & = \mathbf{E} [g_1(T_r) I\{\gamma > r\} V(S_r)] \mathbf{E}[g_2(W^+(1))] = \widehat{\mathbf{E}}^+[g_1(T_r)] \mathbf{E}[g_2(W^+(1))]. \end{aligned}$$

Заменяв теперь $g_2(x)$, $0 \leq g_2(x) \leq 1$, на $1 - g_2(x)$ и проводя аналогичные выкладки, несложно показать при помощи леммы 2.5 из [2], что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [g_1(T_r) g_2(\hat{S}_n) | \gamma > n] \geq \widehat{\mathbf{E}}^+[g_1(T_r)] \mathbf{E}[g_2(W^+(1))].$$

Отсюда следует соотношение (4.5).

Для доказательства (4.6) нужно применить аналогичный прием.

Лемма 10. Пусть выполнены условия леммы 3 и условие АЗ. Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$

$$\mathbf{E}[T_{l,r} I\{S_{nt}^+ < -S_n^-\} | \mathcal{A}_{nt,n}] \longrightarrow \widehat{\mathbf{E}}[T_{l,r}] \mathbf{P}\{t^{1/\alpha} W_1^+(1) < -W_2^-(1)\} \quad (4.7)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [\delta, 1]$, где W_1^+, W_2^- — независимые положительная и отрицательная извилины устойчивого процесса Леви порядка α .

Доказательство. Сходимость в (4.7) при каждом $t \in [\delta, 1]$ легко получить, используя рассуждения, применявшиеся при доказательстве леммы 9, и тот факт, что $w_{nt} \sim t^{1/\alpha} w_n$, $n \rightarrow \infty$. Допустим, что эта сходимость не является равномерной по $t \in [\delta, 1]$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $n_k \rightarrow \infty$ и $t_k \rightarrow t_* \in [\delta, 1]$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что

$$\left| \mathbf{E}[T_{l,r} I\{S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^-\} | \mathcal{A}_{n_k t_k, n_k}] - \widehat{\mathbf{E}}[T_{l,r}] \mathbf{P}\{t_k^{1/\alpha} W_1^+(1) < -W_2^-(1)\} \right| \geq 4\varepsilon.$$

Из этого неравенства, леммы 2, свойств медленно меняющихся функций и (4.3) вытекает, что при всех достаточно больших n_k

$$\left| \mathbf{E}[T_{l,r} I\{S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^-\} | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}] - \widehat{\mathbf{E}}[T_{l,r}] \mathbf{P}\{t_*^{1/\alpha} W_1^+(1) < -W_2^-(1)\} \right| \geq 2\varepsilon.$$

Отсюда в свою очередь следует, что при всех достаточно больших n_k

$$\left| \mathbf{E}\left[T_{l,r} \left(I\{S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^-\} - I\{S_{n_k t_*}^+ < -S_{n_k}^-\}\right) | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}\right] \right| \geq \varepsilon,$$

или, в силу неравенства $|T_{l,r}| \leq c^{-1} < \infty$,

$$\mathbf{E}\left[\left|I\{S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^-\} - I\{S_{n_k t_*}^+ < -S_{n_k}^-\}\right| | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}\right] \geq c\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(\{S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^- \leq S_{n_k t_*}^+\} \cup \{S_{n_k t_k}^+ \geq -S_{n_k}^- > S_{n_k t_*}^+\} | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}\right) \geq c\varepsilon. \quad (4.8)$$

Оценим отдельно условную вероятность каждого из событий, стоящих под знаком вероятности в левой части этого неравенства. Отметим, что последовательность t_k можно выбрать так, чтобы либо $t_k \geq t_*$ при всех k , либо $t_k \leq t_*$ при всех k . Будем для определенности считать, что реализована первая возможность. Предполагая, что $0 \leq t_k - t_* \leq \Delta$ при $k \geq k_0 = k_0(\Delta)$, имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^- \leq S_{n_k t_*}^+ | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}) \\ & \leq \mathbf{P}\left(S_{n_k t_*}^+ + \inf_{0 \leq j \leq n\Delta} (S_{n_k t_* + j}^+ - S_{n_k t_*}^+) < -S_{n_k}^- \leq S_{n_k t_*}^+ | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, разделив каждый из членов под знаком вероятности на w_n и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^- \leq S_{n_k t_*}^+ | \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}) \\ & = \mathbf{P}\left\{t_*^{1/\alpha} W_1^+(1) + \inf_{0 \leq u \leq \Delta} W(u) \leq -W_2^-(1) \leq t_*^{1/\alpha} W_1^+(1)\right\}, \end{aligned}$$

где W_1^+, W_2^- — независимые положительная и отрицательная извилины устойчивого процесса Леви порядка α , а W — не зависящий от них устойчивый процесс Леви порядка α . Вспоминая теперь лемму 8 и используя тот факт (ср., например, с [3, с. 219]), что при $\Delta \rightarrow +0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq u \leq \Delta} |W(u)| \geq \frac{y}{2}\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq u \leq 1} |W(u)| \geq \Delta^{-1/\alpha} \frac{y}{2}\right\} \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

выводим

$$\limsup_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{P}\left\{t_*^{1/\alpha} W_1^+(1) + \inf_{0 \leq u \leq \Delta} W(u) \leq -W_2^-(1) \leq t_*^{1/\alpha} W_1^+(1)\right\} = 0.$$

Таким образом,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{n_k t_k}^+ < -S_{n_k}^- \leq S_{n_k t_*}^+ \mid \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}) = 0. \quad (4.10)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{n_k t_k}^+ \geq -S_{n_k}^- > S_{n_k t_*}^+ \mid \mathcal{A}_{n_k t_*, n_k}) = 0. \quad (4.11)$$

Совокупность соотношений (4.10) и (4.11) противоречит (4.8). Следовательно, предположение о том, что сходимость в (4.7) не является равномерной, является ложным. Это завершает доказательство леммы 10.

Следующая лемма является многомерным аналогом леммы 4. К сожалению, как это часто бывает с утверждениями, касающимися многомерных случайных величин, ее формулировка выглядит весьма громоздко и требует введения новых обозначений. Исходной точкой этих обозначений будет вероятностное пространство $(\Pi, \Sigma, \mathbb{P}) = (\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Pi_{(n)}, \bar{\bigvee}_n \Sigma_n, \mathbb{P})$ (напомним, что описание этого пространства дано в разделе 2 после леммы 2), а также прямое произведение $2d$ копий этого пространства

$$(\Pi^{2d}, \Sigma^{2d}, \mathbb{P}^{2d}) := \bigotimes_{j=1}^{2d} \left(\Pi^{(j)}, \Sigma^{(j)} = \bar{\bigvee}_n \Sigma_n^{(j)}, \mathbb{P}^{(j)} \right). \quad (4.12)$$

На измеримом пространстве $(\Pi^{(j)}, \Sigma^{(j)})$, $j = 1, \dots, 2d$, определим случайное блуждание $(S_n^{(j)})_{n \geq 0}$, положив для $\pi^j := (f_0^{(j)}(s), f_1^{(j)}(s), \dots) \in \Pi^{(j)}$

$$S_n^{(j)} = S_n^{(j)}(\pi^j) := \sum_{k=0}^{n-1} \ln(f_k^{(j)})'(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Таким образом, в нашем распоряжении будет $2d$ независимых (относительно меры $\mathbb{P}^{2d} = \bigotimes_{j=1}^{2d} \mathbb{P}^{(j)}$) случайных блужданий, с которыми мы свяжем случайные величины $\gamma^{(j)} := \min\{n \geq 1: S_n^{(j)} < 0\}$, $\Gamma^{(j)} := \min\{n \geq 1: S_n^{(j)} \geq 0\}$ и события

$$\mathcal{B}(\mathbf{b}) = \mathcal{B}_1(\mathbf{b}) \cap \mathcal{B}_2(\mathbf{b}),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(\mathbf{b}) &= \mathcal{B}_1(b_1, b_2, \dots, b_{2d-1}, b_{2d}) \\ &:= \{\Gamma^{(2j-1)} > b_{2j-1}; \gamma^{(2j)} > b_{2j}, 1 \leq j \leq d\}, \\ \mathcal{B}_2(\mathbf{b}) &:= \{S_{b_{2j}}^{(2j)} < -S_{b_{2j+1}}^{(2j+1)}, 1 \leq j \leq d-1\}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Вернемся теперь к исходному ВПСС. Для $0 \leq m \leq n-1$, $n \in \mathbf{N}_0$, обозначим

$$\mathcal{F}_{m,n} := \sigma(\pi_m, \pi_{m+1}, \dots, \pi_{n-1}, Z_m = 1, Z_{m+1}, \dots, Z_n)$$

— сдвинутые «отрезки» σ -алгебр (ср. с (2.6)), и пусть $T_{l,r}^{(i)}(k)$, $k, l, r \in \mathbf{N}$, $l \leq k$, $i = 1, \dots, d$, — наборы ограниченных в совокупности случайных величин таких, что при любом $i = 1, \dots, d$ случайная величина $T_{l,r}^{(i)}(k)$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{k-l, k+r}$.

Лемма 11. Пусть выполнены условия леммы 3 и условие A3, и пусть существует набор равномерно ограниченных случайных величин $T_{l,r}^{(j)}$, $l, r \in \mathbf{N}$, $j = 1, \dots, d$, таких, что

- 1) случайная величина $T_{l,r}^{(j)}$ измерима относительно σ -алгебры $\Sigma_{l,r}^{(j)} := \Sigma_l^{(2j-1)} \times \Sigma_r^{(2j)}$;
- 2) $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{l,r}^{(d)} =: T_{l,\infty}^{(d)}$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.;
- 3) для любых чисел $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d = 1$ и целых чисел l_j, r_j , $j = 1, \dots, d$, $0 = nt_0 \leq k_1 \leq nt_1 < k_2 \leq nt_2 < \dots < k_d \leq nt_d = n$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left[T_{l_d, n - \tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)) \mid \tau(nt_j) = k_j, j = 1, \dots, d \right] \\ = \mathbf{E} \left[T_{l_d, n - k_d}^{(d)} \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)} \mid \mathcal{B}(\mathbf{b}) \right],\end{aligned}\quad (4.15)$$

где $b_{2j} = nt_j - k_j$, $b_{2j-1} = k_j - nt_{j-1}$, $j = 1, \dots, d$.

Тогда для любого $\delta \in (0, \min_{0 \leq j \leq d-1} (t_{j+1} - t_j)/2)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left[T_{l_d, n - \tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)) \mid \tau(nt_j) = k_j, j = 1, \dots, d \right] \\ \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[T_{l_d, \infty}^{(d)}] \prod_{j=1}^{d-1} \hat{\mathbf{E}}[T_{l_j, r_j}^{(j)}]\end{aligned}\quad (4.16)$$

равномерно по всем наборам k_j , $j = 1, \dots, d$, для которых $t_{j-1} + \delta \leq k_j n^{-1} \leq t_j - \delta$, $j = 1, \dots, d$, при всех достаточно больших n .

Доказательство. Покажем сначала, что если

$$k_j n^{-1} \rightarrow u_j \in [t_{j-1} + \delta, t_j - \delta], \quad j = 1, \dots, d, \quad (4.17)$$

при $n \rightarrow \infty$, то выполнено соотношение (4.16). Поскольку правая часть (4.15) равна

$$\frac{\mathbb{E}[T_{l_d, n-k_d}^{(d)} \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)} I\{\mathcal{B}_2(\mathbf{b})\} \mid \mathcal{B}_1(\mathbf{b})]}{\mathbb{P}(\mathcal{B}_2(\mathbf{b}) \mid \mathcal{B}_1(\mathbf{b}))},$$

то, используя рассуждения, аналогичные проводившимся при доказательстве лемм 3, 9 и 10, и замечая, что при выполнении условия (4.17)

$$b_{2j} = nt_j - k_j \sim n(t_j - u_j), \quad b_{2j-1} \sim n(u_j - t_{j-1}), \quad j = 1, \dots, d,$$

несложно показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_2(\mathbf{b}) \mid \mathcal{B}_1(\mathbf{b})) &= \prod_{j=1}^{d-1} \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{t_j - u_j}{u_{j+1} - t_j} \right)^{1/\alpha} W_{2j}^+(1) < -W_{2j+1}^-(1) \right\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[T_{l_d, n-k_d}^{(d)} \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)} I\{\mathcal{B}_2(\mathbf{b})\} \mid \mathcal{B}_1(\mathbf{b}) \right] \\ &= \widehat{\mathbf{E}}[T_{l_d, \infty}^{(d)}] \prod_{j=1}^{d-1} \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{t_j - u_j}{u_{j+1} - t_j} \right)^{1/\alpha} W_{2j}^+(1) < -W_{2j+1}^-(1) \right\}, \end{aligned}$$

где W_{2j}^+ , W_{2j+1}^- , $j = 1, \dots, d-1$, — независимые положительные и отрицательные извилины устойчивых процессов Леви порядка α . Отсюда легко следует соотношение (4.16) для любого набора, удовлетворяющего (4.17). Поскольку предельное значение в правой части (4.16) не зависит от выбора подпоследовательности наборов (4.17), сходимость (4.16) доказана.

Для доказательства равномерности сходимости к пределу в (4.16) достаточно повторить (с очевидными изменениями) рассуждения, проводившиеся в аналогичной ситуации в лемме 10 для случая $d = 2$. Поскольку требуемые при этом выкладки весьма громоздки и не содержат новых идей по сравнению с доказательством леммы 10, мы их не приводим.

В дальнейшем в случае, когда в (1.14) $d = b$ и, следовательно, $\bar{r} = (0, 1, \dots, d)$ и $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_d)$ — векторы размерности $d + 1$, для события $\mathcal{U}(\bar{t}; \bar{r}, n)$ мы будем использовать короткое обозначение

$$\mathcal{U}(\bar{t}; n) := \{0 < \tau(nt_1) < \tau(nt_2) < \dots < \tau(nt_d) = \tau(n)\}. \quad (4.18)$$

Лемма 12. В условиях леммы 11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[T_{l_d, n-\tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)) \mid \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right] = \widehat{\mathbf{E}}[T_{l_d, \infty}^{(d)}] \prod_{j=1}^{d-1} \widehat{\mathbf{E}}[T_{l_j, r_j}^{(j)}].$$

Доказательство. Поскольку распределение точки минимума случайного блуждания $\{S_k, 0 \leq k \leq n\}$ на любом интервале $[na, nb]$, $0 \leq a < b \leq 1$, сходится к абсолютно непрерывному, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta \in (0, \min_{0 \leq j \leq d-1} (t_{j+1} - t_j)/2)$ такое, что

$\mathbf{P}\{\tau(nt_j) \notin [n(t_{j-1} + \delta), n(t_j - \delta)], j = 1, \dots, d-1; \mathcal{U}(\bar{t}; n)\} < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0(\delta, \varepsilon)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[T_{l_d, n-\tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)); \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right] &= \Xi_n(\varepsilon) \\ + \sum_{n(t_{j-1}+\delta) \leq k_j \leq n(t_j-\delta)} \mathbf{E} \left[T_{l_d, n-\tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)); \right. \\ &\quad \left. \tau(nt_j) = k_j, j = 1, \dots, d \right], \end{aligned}$$

где $|\Xi_n(\varepsilon)| < C\varepsilon$ для всех $n \geq n_0(\delta, \varepsilon)$. Отсюда и из леммы 11 легко следует утверждение доказываемой леммы.

5. Аппроксимации конечными отрезками

В данном разделе мы покажем, что свойства итераций $f_{0,n}$, а следовательно, и свойства соответствующего ВПСС, во многом определяются свойствами итераций $f_{\tau(n)-N, \tau(n)+R}$ производящих функций числа потомков частиц тех поколений, номера которых близки к величине $\tau(n)$ — моменту первого достижения минимума на отрезке $[0, n]$ сопровождающим случайным блужданием. Здесь и в последующем изложении мы примем соглашение: если N и R — неотрицательные целые числа, то $\tau(n) - N = \max(0, \tau(n) - N)$, а $\tau(n) + R = \min(\tau(n) + R, n)$. Условимся также писать $\limsup_{N, R, n \rightarrow \infty}$ вместо $\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty}$.

Для $j \leq n$ положим

$$\begin{aligned} b_{j,n} &:= \sum_{i=j}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad b_n := b_{0,n}, \quad B_{j,n} := \sum_{i=j}^n \eta_i e^{S_i}, \quad B_n := B_{0,n}, \\ \Delta(N, \tau(n); s) &:= \left| \frac{e^{S_{\tau(n)}}}{1 - f_{0,n}(s)} - \frac{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-N}}}{1 - f_{\tau(n)-N, n}(s)} \right| I\{\tau(n) \geq N\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следующая лемма является обобщением леммы 17 из [12].

Лемма 13. Если выполнены условия A1 и (1.5), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0, 1)} \Delta(N, \tau(n); s) > \varepsilon \right\} = 0. \quad (5.2)$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} \Delta(N, \tau(n); s) &= I\{\tau(n) \geq N\} \sum_{i=0}^{\tau(n)-N-1} \eta_{i, \tau(n)-N}(f_{\tau(n)-N, n}(s)) e^{S_{\tau(n)} - S_i} \\ &\leq I\{\tau(n) \geq N\} \sum_{i=0}^{\tau(n)-N-1} \eta_{i+1} e^{S_{\tau(n)} - S_i}. \end{aligned}$$

Используя это неравенство, нетрудно показать, что при $l > N$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s \in [0,1)} \Delta(N, \tau(n); s) > \varepsilon \mid \tau(n) = l\right\} \leq \mathbb{E}[T_l^-(N) \mid \Gamma^- > l],$$

где $T_l^-(N) := I\{ \sum_{i=N+1}^l \eta_i e^{S_i} > \varepsilon \} = I\{B_{N+1,l} > \varepsilon\}$. Ясно, что $\limsup_{l \rightarrow \infty} T_l^-(N) \leq I\{B_{N+1,\infty} > \varepsilon\} =: T^-(N)$ $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н., причем $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н. $\lim_{N \rightarrow \infty} T^-(N) = 0$ в силу леммы 6. Отсюда и из леммы 4 несложно вывести, что

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{s \in [0,1)} \Delta(N, \tau(n); s) > \varepsilon\right\} \leq \limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I\{\tau(n) \geq N\} T_{\tau(n)}^-(N)] = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 14. Если выполнены условия A1 и (1.5), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in [0,1)} \left| \frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{0,n}(0)} - \frac{1 - f_{\tau(n)-N,n}(s)}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(0)} \right| > \varepsilon\right\} = 0. \quad (5.3)$$

Доказательство. Поскольку для любой производящей функции $F(s)$ разность $1 - F(s)$ является вогнутой функцией при $s \in [0, 1)$, то

$$\frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(s)} \geq \frac{1 - f_{0,n}(0)}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(0)}.$$

Далее, при $\tau(n) \geq N$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{0,n}(0)} - \frac{1 - f_{\tau(n)-N,n}(s)}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(0)} \\ &= \frac{1 - f_{0,n}(s)}{e^{S_{\tau(n)}}} \left(\frac{e^{S_{\tau(n)}}}{1 - f_{0,n}(0)} - \frac{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-N}}}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(0)} \right) \\ &\quad + \frac{(1 - f_{0,n}(s))(1 - f_{\tau(n)-N,n}(s))}{e^{S_{\tau(n)}}(1 - f_{\tau(n)-N,n}(0))} \left(\frac{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-N}}}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(s)} - \frac{e^{S_{\tau(n)}}}{1 - f_{0,n}(s)} \right) \\ &\leq \Delta(N, \tau(n); 0) + \Delta(N, \tau(n); s), \end{aligned}$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 13.

Лемма 15. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{e^{S_{\tau(n)} - S_n} + e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)+R,n} > \varepsilon\} = 0, \quad (5.4)$$

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)-N} > \varepsilon\} = 0. \quad (5.5)$$

Доказательство. Для доказательства соотношения (5.4) достаточно воспользоваться схемой доказательства леммы 13, выбрав в условиях леммы 4

$$\begin{aligned} T_{l,n}^* &= T_{l,n}^*(R) := I\{l + R \leq n\} I\{e^{S_l - S_n} + e^{S_l} b_{l+R,n} > \varepsilon\}, \\ T_l^- &\equiv 1, \quad T_p^+ = T_p^+(R) := I\{R \leq p\} I\{e^{-S_p} + b_{R,p} > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

и вспомнить, что $\limsup_{R,p \rightarrow \infty} T_p^+(R) \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} I\{b_{R,\infty} > \varepsilon\} = 0$ $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. согласно лемме 6. Для того чтобы убедиться в справедливости (5.5), необходимо положить в условиях леммы 4

$$T_{l,n-l} = T_{l,n-l}(N) := I\{j \geq N\} I\{e^{S_l} b_{l-N} > \varepsilon\},$$

$$T_l^- = T_l^-(N) := I\{l \geq N\} I\{B_{N,l} > \varepsilon\}, \quad T_p^+ \equiv 1$$

и учесть, что $\limsup_{N,l \rightarrow \infty} T_l^-(N) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} I\{B_{N,\infty} > \varepsilon\} = 0$ $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н. согласно лемме 6.

Для $0 \leq m \leq n$ положим

$$\alpha_n(m) := \frac{1 - f_{0,m}(0)}{1 - f_{0,n}(0)}, \quad \beta_n(m, s) := \frac{1 - f_{0,n}(s)}{e^{S_m}(1 - f_{m,n}(s))} \quad (5.6)$$

и $\beta_n(m) := \beta_n(m, 0)$. Ясно, что $\beta_n(m, s) \leq 1$ при $s \in [0, 1)$.

Лемма 16. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|\alpha_n(\tau(n) + R) - 1| > \varepsilon\} = 0.$$

Доказательство. Ввиду (1.13) для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти число $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ такое, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\mathbf{P}\{\tau(n) \notin (\delta_1 n, (1 - \delta_1)n)\} \leq \varepsilon_1$. Отсюда, полагая

$$T_{l,n-l}(R) := \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,n-l}^+(0))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0,R}^+(0))} = \frac{\zeta_l^-(f_{0,n-l}^+(0))}{\zeta_l^-(f_{0,R}^+(0))}, \quad T(R) := \frac{\zeta^-(q^+)}{\zeta^-(f_{0,R}^+(0))},$$

и замечая, что $\alpha_n(m) \geq 1$ при $0 \leq m \leq n$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\alpha_n(\tau(n) + R)} \mid \tau(n) = l\right] = \mathbb{E}[T_{l,n-l}(R) \mid \mathcal{A}_{l,n-l}], \quad n - l \geq R,$$

а $\lim_{\min(l,n-l) \rightarrow \infty} T_{l,n-l}(R) = T(R)$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., нетрудно вывести при помощи леммы 4, что

$$\lim_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\alpha_n(\tau(n) + R)}\right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{E}}[T(R)] = \hat{\mathbf{E}}\left[\lim_{R \rightarrow \infty} T(R)\right] = 1.$$

Из этого соотношения легко следует утверждение леммы.

Следствие 3. Для любых $t \in (0, 1]$ и $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\alpha_n(nt) - 1| > \varepsilon \mid \tau(n) < nt) = 0.$$

Доказательство. Для любого натурального числа R и произвольного $\varepsilon_1 > 0$ найдется $n_0 = n_0(R, \varepsilon_1)$ такое, что $\mathbb{P}\{nt - R \leq \tau(n) \leq nt\} < \varepsilon_1$ при всех $n \geq n_0$. Если произошло событие $\{\tau(n) < nt - R\}$, то $0 \leq \alpha_n(nt) - 1 \leq \alpha_n(\tau(n) + R) - 1$. Отсюда и из леммы 16 легко следует желаемое соотношение.

Лемма 17. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \beta_n(\tau(n) + R) > \varepsilon \} = 0. \quad (5.7)$$

Доказательство. Из определения (5.6) следует, что при $n - l - R \geq 0$

$$\mathbb{E}[\beta_n(\tau(n) + R) \mid \tau(n) = l] = \mathbb{E}[T_{l, n-l}(R) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}],$$

где в данном случае

$$T_{l, n-l}(R) = \frac{\zeta_l^-(f_{0, n-l}^+(0))}{e^{S_R^+}(1 - f_{0, n-l-R}^+(0))},$$

причем

$$T(R) := \lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} T_{l, n-l}(R) = \frac{\zeta^-(q^+)}{e^{S_R^+}(1 - q^+)} \leq 1 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Поскольку $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{S_R^+} = \infty$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., то $\lim_{R \rightarrow \infty} T(R) = 0$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Отсюда и из леммы 3 вытекает (5.7).

Лемма 18. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{R \geq 0} \sup_{s \in [0, 1]} |\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n) - N, s) - 1| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Так же, как и в лемме 16, мы можем предполагать, что $\tau(n) \in (\delta_1 n, (1 - \delta_1)n]$ для некоторого $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$. Имея это в виду, вспоминая лемму 5 и полагая $\tau(n) = M$, получаем

$$\frac{1}{1 - f_{0, M-N}(f_{M-N, M+R}(s))} - \frac{e^{-S_{M-N}}}{1 - f_{M-N, M+R}(s)} = \sum_{j=0}^{M-N-1} \eta_{j, M+R}(s) e^{-S_j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \beta_{M+R}(M - N, s) &= \frac{1 - f_{0, M+R}(s)}{e^{S_M}} \sum_{j=0}^{M-N-1} \eta_{j, M+R}(s) e^{S_M - S_j} \\ &\leq e^{S_M} b_{M-N}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отсюда

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{R \geq 0} \sup_{s \in [0, 1]} |\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n) - N, s) - 1| > \varepsilon \right\} \leq \varepsilon_1 + \mathbb{P} \{ e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)-N} > \varepsilon \}.$$

Теперь для завершения доказательства осталось воспользоваться (5.5).

Следствие 4. Для любых $t \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ 1 - \beta_n(nt) > \varepsilon; \tau(n) \geq nt \} = 0, \quad (5.9)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \beta_n(nt) > \varepsilon; \tau(n) < nt \} = 0. \quad (5.10)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\limsup_{R, N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{-N < \tau(n) - nt < R\} = 0.$$

Теперь для доказательства равенства (5.9) достаточно положить в (5.8) $M = \tau(n)$, $M - N = nt$, $M + R = n$, воспользоваться неравенством $0 \leq 1 - \beta_n(nt) \leq e^{S_{\tau(n)}} b_{nt}$ и применить лемму 15, а для доказательства (5.10) нужно лишь вспомнить лемму 17.

Следствие доказано.

Следствие 5. Для любых $0 < t_1 < t_2 < 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{m}_{nt_2}^*(nt_1)}{\mathbf{m}_{nt_2}^*} I \{\tau(nt_1) < \tau(nt_2)\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

где величины $\mathbf{m}_n^*(k)$ были введены в (1.7), а символ $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ обозначает сходимость по вероятности относительно меры $\mathbb{P}$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из предыдущего следствия и равенств

$$\frac{\mathbf{m}_{nt_2}^*(nt_1)}{\mathbf{m}_{nt_2}^*} = \frac{e^{S_{nt_2} - S_{nt_1}}}{1 - f_{nt_1, nt_2}(0)} \frac{1 - f_{0, nt_2}(0)}{e^{S_{nt_2}}} = \beta_{nt_2}(nt_1).$$

Следствие 6. Для любого $t \in (0, 1)$

$$\frac{e^{S_{nt}}(1 - f_{nt, n}(0))}{1 - f_{0, nt}(0)} I \{\tau(nt) < \tau(n)\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем число N , которое позднее мы устремим к бесконечности. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau(n) - N > nt$ для всех достаточно больших n . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{e^{S_{nt}}(1 - f_{nt, n}(0))}{1 - f_{0, nt}(0)} I \{\tau(nt) < \tau(n)\} &\leq \frac{e^{S_{\tau(n)}}}{1 - f_{0, \tau(n) - N}(0)} I \{\tau(nt) < \tau(n)\} \\ &\leq e^{S_{\tau(n)}} (e^{-S_{\tau(n) - N}} + b_{\tau(n) - N}). \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства достаточно обратиться к (5.5).

Напомним, что в силу определения (1.8)

$$\Phi_{k, n}(\lambda) = 1 - \frac{1 - f_{k, n}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_n^*(k)})}{1 - f_{k, n}(0)}.$$

Следствие 7. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\Lambda > 1$

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} |\Phi_{\tau(n) - N, n}(\lambda) - \Phi_n(\lambda)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Ввиду леммы 14 достаточно показать, что

$$\limsup_{N,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} \left| \Phi_{\tau(n)-N,n}(\lambda) - \Phi_{\tau(n)-N,n} \left(\frac{\lambda \mathbf{m}_n^*(\tau(n) - N)}{\mathbf{m}_n^*} \right) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} \left| \Phi_{\tau(n)-N,n}(\lambda) - \Phi_{\tau(n)-N,n} \left(\frac{\lambda \mathbf{m}_n^*(\tau(n) - N)}{\mathbf{m}_n^*} \right) \right| \\ & \leq \frac{\Lambda e^{S_n - S_{\tau(n)-N}}}{1 - f_{\tau(n)-N,n}(0)} \left| \frac{1}{\mathbf{m}_n^*(\tau(n) - N)} - \frac{1}{\mathbf{m}_n^*} \right| \\ & = \Lambda \left| 1 - \frac{\mathbf{m}_n^*(\tau(n) - N)}{\mathbf{m}_n^*} \right| = \Lambda |1 - \beta_n(\tau(n) - N)|. \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 18 с $R = n - \tau(n)$.

6. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 опирается на следующее утверждение, показывающее, что предельное поведение ВПСС определяется свойствами процесса в окрестностях убывающих лестничных моментов сопровождающего случайного блуждания.

Лемма 19. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \mathbf{E}_\pi [\hat{Y}_{\tau(n)+R} - \hat{Y}_n \mid Z_n > 0] \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}_\pi [\hat{Y}_m - \hat{Y}_n \mid Z_n > 0] \right| & \leq \mathbf{E}_\pi [|\hat{Y}_m - \hat{Y}_n| \mid Z_n > 0] \\ & = \mathbf{E}_\pi [|\alpha_n(m) Y_m - Y_n| \mid I\{Z_n > 0\}] \\ & \leq \mathbf{E}_\pi [|Y_m - Y_n| \mid I\{Z_n > 0\}] + |\alpha_n(m) - 1|. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\mathbf{E}_\pi [|Y_m - Y_n| \mid I\{Z_n > 0\}] \leq (\mathbf{E}_\pi [(Y_m - Y_n)^2] \mathbf{P}_\pi \{Z_n > 0\})^{1/2}. \quad (6.2)$$

Согласно лемме 4 работы [1],

$$\mathbf{E}_\pi [(Y_m - Y_n)^2] = 2b_{m,n} + e^{-S_n} - e^{-S_m} \leq 2b_{m,n} + e^{-S_n}. \quad (6.3)$$

Отсюда, с учетом оценки $\mathbf{P}_\pi \{Z_n > 0\} = 1 - f_{0,n}(0) \leq e^{S_{\tau(n)}}$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi [\hat{Y}_{\tau(n)+R} - \hat{Y}_n \mid Z_n > 0] \right|^2 \\ & \leq 4 (e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)+R,n} + e^{S_{\tau(n)} - S_n}) + 2 |\alpha_n(\tau(n) + R) - 1|^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

причем в силу лемм 15 и 16 каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства стремится к нулю по вероятности, если сначала устремить $n \rightarrow \infty$, а затем $R \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Теорема 1 дает нам возможность установить следующий результат, где для краткости вместо $nt_i, i = 0, 1, 2, \dots$, мы будем иногда писать N_i .

Следствие 8. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_{N_j} \right\} \middle| Z_n > 0 \right] \middle| \tau(n) < N_1 \right\} \Rightarrow \Phi \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \right).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_{N_j} \right\} - \exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_n \right\} \middle| Z_n > 0 \right] \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^d \lambda_j \mathbf{E}_\pi \left[|\hat{Y}_{N_j} - \hat{Y}_n| \middle| Z_n > 0 \right] \\ & = \sum_{j=1}^d \lambda_j \mathbf{E}_\pi \left[|\alpha_n(N_j) Y_{N_j} - Y_n| I\{Z_n > 0\} \right] \\ & \leq \sum_{j=1}^d \lambda_j (\mathbf{E}_\pi [|Y_{N_j} - Y_n| I\{Z_n > 0\}] + |\alpha_n(N_j) - 1|). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Выражение, стоящее после второго знака неравенства в (6.5), состоит из слагаемых, аналогичных левой части (6.1). Повторяя рассуждения, проводившиеся при доказательстве леммы 19, и используя следствие 3 вместо леммы 16, нетрудно доказать, что последняя сумма в (6.5) стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$ на множестве $\{\tau(n) < N_1\}$. Этот факт в сочетании с теоремой 1 и соотношением (3.7) завершает доказательство следствия.

Следствие 9. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \mathbf{E}_\pi \left[\hat{Y}_n \exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_{N_j} \right\} \middle| Z_n > 0 \right] \middle| \tau(n) < N_1 \right\} \Rightarrow -\Phi' \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \right).$$

Доказательство. Для $\bar{\lambda} > \bar{1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi \left[\hat{Y}_n \exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_{N_j} \right\} - \hat{Y}_n \exp \left\{ - \sum_{j=1}^d \lambda_j \hat{Y}_n \right\} \middle| Z_n > 0 \right] \right| \\ & \leq \lambda_d^{-1} \sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j \mathbf{E}_\pi \left[|\hat{Y}_{N_j} - \hat{Y}_n| \middle| Z_n > 0 \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

и для завершения доказательства осталось повторить рассуждения, использовавшиеся при доказательстве следствия 8, и применить лемму 7.

Положим $g_\lambda(x) = xe^{-\lambda x}$ и введем обозначения

$$\Psi_{k,n}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda(\hat{Y}_n(k)) \mid Z_n(k) > 0 \right], \quad \Psi_n(\lambda) = \Psi_{0,n}(\lambda).$$

Теорема 3. Если выполнены условия A1 и A2, то для $\varepsilon > 0$ и $\Lambda > 1$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} |\Psi_{\tau(n)-N, \tau(n)+R}(\lambda) - \Psi_{0,n}(\lambda)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько лемм.

Лемма 20. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} \left| \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda(\hat{Y}_n) - g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) \mid Z_n > 0 \right] \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. По теореме о промежуточном значении

$$|g_\lambda(x) - g_\lambda(y)| \leq \sup_{z \geq 0} |(\lambda z - 1)e^{-\lambda z}| |x - y| \leq |x - y|, \quad x, y \geq 0. \quad (6.7)$$

Отсюда

$$\left| \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_n) - g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) \mid Z_n > 0] \right| \leq \mathbf{E}_\pi [|\hat{Y}_n - \hat{Y}_{\tau(n)+R}| \mid Z_n > 0],$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 19.

Лемма 21. Для $\varepsilon > 0$ и $\Lambda > 1$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} \left| \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) \mid Z_n > 0] - \Psi_{0, \tau(n)+R}(\lambda) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Для $0 \leq k \leq n$ имеем

$$\mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) \mid Z_n > 0] = \frac{\mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k)(1 - f_{k,n}^{Z_k}(0))]}{1 - f_{0,n}(0)} \leq \alpha_n(k) \Psi_{0,k}(\lambda). \quad (6.8)$$

С другой стороны, для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) \mid Z_n > 0] &\geq \frac{1}{1 - f_{0,n}(0)} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) I\{\hat{Y}_k > \delta\}] \\ &\quad - \frac{1}{1 - f_{0,n}(0)} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) f_{k,n}^{Z_k}(0) I\{\hat{Y}_k > \delta\}]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ввиду оценки $xe^{-x} \leq x$, $x \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) I\{\hat{Y}_k > \delta\}] &= \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k)] - \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) I\{0 < \hat{Y}_k \leq \delta\}] \\ &\geq \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k)] - \delta \lambda (1 - f_{0,k}(0)). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - f_{0,n}(0)} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_k) f_{k,n}^{Z_k}(0) I\{\hat{Y}_k > \delta\}] \\ &\leq \alpha_n(k) f_{k,n}^{\delta m_k^*}(0) \leq \alpha_n(k) \exp \left\{ -\frac{\delta}{\alpha_n(k) \beta_n(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Объединяя (6.8)–(6.11), получаем

$$\left| \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) | Z_n > 0] - \Psi_{0,\tau(n)+R}(\lambda) \right| \leq \lambda |\alpha_n(\tau(n) + R) - 1| + \alpha_n(\tau(n) + R) \left(\delta \lambda + \exp \left\{ - \frac{\delta}{\alpha_n(\tau(n) + R) \beta_n(\tau(n) + R)} \right\} \right). \quad (6.12)$$

В силу лемм 16 и 17 для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\limsup_{R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \alpha_n(\tau(n) + R) \exp \left\{ - \frac{\delta}{\alpha_n(\tau(n) + R) \beta_n(\tau(n) + R)} \right\} > \varepsilon_1 \right\} = 0. \quad (6.13)$$

Оценки (6.12) и (6.13) в сочетании со следствием 3 и леммой 16 доказывают лемму 21.

Лемма 22. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N,R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{1 - f_{0,\tau(n)+R}(s)}{e^{S_{\tau(n)}}} - \frac{1 - f_{\tau(n)-N,\tau(n)+R}(s)}{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-N}}} \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Используя (5.8), получаем

$$e^{-S_M} \left| (1 - f_{0,M+R}(s)) - e^{S_{M-N}} (1 - f_{M-N,M+R}(s)) \right| = e^{S_{M-N} - S_M} (1 - f_{M-N,M+R}(s)) |\beta_{M+R}(M - N, s) - 1| \leq e^{S_M} b_{M-N}.$$

Теперь желаемое утверждение следует из леммы 18 с $M = \tau(n)$.

Лемма 23. Для любого $\Lambda > 1$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N,R,n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} \frac{1}{1 - f_{0,\tau(n)+R}(0)} \times \left| \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) - e^{S_{\tau(n)-N}} g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}(\tau(n) - N)) \right] \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. Ясно, что

$$(f_{0,r}(s))' |_{s=1} = \mathbf{m}_r, \quad (f_{0,r}(s))'' |_{s=1} = \mathbf{m}_r^2 \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f_k''(1)}{f_k'(1)} e^{-S_k} = \mathbf{m}_r^2 b_r$$

и, следовательно, $(f_{0,r}(s))' \geq e^{S_r} - (1 - s) e^{2S_r} b_r$. Полагая $\tau(n) = M$, $r = M - N$ и $s = f_{M-N,n}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_{M+R}^*})$ и используя неравенство

$$1 - f_{M-N,n}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_{M+R}^*}) \leq 1 - f_{M-N,M}(0) \leq e^{S_M - S_{M-N}},$$

получаем для указанного выше значения s :

$$(f_{0,M-N}(s))' \geq e^{S_{M-N}} - e^{S_M - S_{M-N}} e^{2S_{M-N}} b_{M-N} = e^{S_{M-N}} (1 - e^{S_M} b_{M-N}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{M+R})] &= -\frac{d}{d\lambda} \left(f_{0,M+R}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_{M+R}^*}) \right) \\ &= -f'_{0,M-N} \left(f_{M-N,M+R}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_{M+R}^*}) \right) \frac{d}{d\lambda} \left(f_{M-N,M+R}(e^{-\lambda/\mathbf{m}_{M+R}^*}) \right) \\ &= e^{S_{M-N}} (1 - \theta e^{S_M} b_{M-N}) \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda \left(\beta_{M+R}(M - N) \hat{Y}_{M+R}(M - N) \right) \right], \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$ и, напомним, $\beta_r(p) = \mathbf{m}_r^*(p)/\mathbf{m}_r^*$. Используя неравенство (6.7), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda(\beta_{M+R}(M-N) \hat{Y}_{M+R}(M-N)) \right] - \mathbf{E}_\pi \left[g_\lambda(\hat{Y}_{M+R}(M-N)) \right] \right| \\ & \leq |\beta_{M+R}(M-N) - 1| \mathbf{E}_\pi \left[\hat{Y}_{M+R}(M-N) \right] \\ & = |\beta_{M+R}(M-N) - 1| (1 - f_{M-N, M+R}(0)). \end{aligned}$$

Из приведенных оценок следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{M+R})] - e^{S_{M-N}} \mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{M+R}(M-N))] \right| \\ & \leq |\beta_{M+R}(M-N) - 1| e^{S_{M-N}} (1 - f_{M-N, M+R}(0)) \\ & \quad + e^{S_{M-N}} e^{S_M} b_{M-N} (1 - f_{M-N, M+R}(0)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathbf{E}_\pi [g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}) - e^{S_{\tau(n)-N}} g_\lambda(\hat{Y}_{\tau(n)+R}(\tau(n)-N))]|}{1 - f_{0, \tau(n)+R}(0)} \\ & \leq \frac{|\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n)-N) - 1| + e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)-N}}{\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n)-N)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В соответствии с леммами 18 и 15 для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\limsup_{N, R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ |\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n)-N) - 1| > \varepsilon_1 \} = 0$$

и

$$\limsup_{N, R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{e^{S_{\tau(n)}} b_{\tau(n)-N}}{\beta_{\tau(n)+R}(\tau(n)-N)} > \varepsilon_1 \right\} = 0.$$

Отсюда и из (6.14) следует утверждение леммы.

Лемма 24. Для любого $\Lambda > 1$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{N, R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} |\Psi_{\tau(n)-N, \tau(n)+R}(\lambda) - \Psi_{0, \tau(n)+R}(\lambda)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 23 достаточно показать, что

$$\limsup_{N, R, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ |\beta_{\tau(n)+R}^{-1}(\tau(n)-N) - 1| \sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} \Psi_{\tau(n)-N, \tau(n)+R}(\lambda) > \varepsilon \right\} = 0.$$

Справедливость этого факта вытекает из леммы 18.

Лемма доказана.

Объединение лемм 20–24 дает теорему 3.

Положим, как и ранее, $N_j = nt_j$. В формулируемой ниже лемме мы будем искать аппроксимацию для случайной функции $\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda})$ в ситуации, когда для $d \geq 2$ осуществилось событие $\mathcal{U}(\bar{t}; n)$. В этом случае векторы $\bar{t}, \bar{\lambda}$ имеют размерности $d+1$ и d соответственно, а

$$\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) = \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^d \lambda_i \hat{Y}_{N_i} \right\} \mid Z_n > 0 \right].$$

Лемма 25. При $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}} \left(\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i}(\lambda_i) \right) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Для любой вероятностной производящей функции $F(s)$ при $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ выполнено неравенство $F(ss_2) - F(ss_1) \leq F'(s)(s_2 - s_1)$. Отсюда, вводя обозначение

$$F_{N_i, n}(s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_d) := \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{j=i+1}^d s_j^{Z_{N_j}(N_{j-1})} \mid Z_{N_i}(N_i) = 1 \right],$$

выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi\{Z_n > 0\} \Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) &= \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^d \lambda_i \hat{Y}_{N_i} \right\}; Z_n > 0 \right] \\ &= F_{0, n} \left(e^{-\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*}, e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, e^{-\lambda_d / \mathbf{m}_n^*} \right) \\ &\quad - F_{0, n} \left(e^{-\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*}, e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, 0 \right) \\ &= f_{0, N_1} \left(e^{-\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*} F_{N_1, n} \left(e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, e^{-\lambda_d / \mathbf{m}_n^*} \right) \right) \\ &\quad - f_{0, N_1} \left(e^{-\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*} F_{N_1, n} \left(e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, 0 \right) \right) \\ &\leq \mathbf{E}_\pi [Z_{N_1} e^{-\lambda_1 \hat{Y}_{N_1}}] e^{\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*} \left(F_{N_1, n} \left(e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, e^{-\lambda_d / \mathbf{m}_n^*} \right) \right. \\ &\quad \left. - F_{N_1, n} \left(e^{-\lambda_2 / \mathbf{m}_{N_2}^*}, \dots, e^{-\lambda_{d-1} / \mathbf{m}_{N_{d-1}}^*}, 0 \right) \right). \end{aligned}$$

Умножив это соотношение на $e^{-\lambda_1 / \mathbf{m}_{N_1}^*}$ и повторив указанные выше преобразования нужное количество раз, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi\{Z_n > 0\} \Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) \prod_{i=1}^{d-1} e^{-\lambda_i / \mathbf{m}_i^*} &\leq \left(f_{N_{d-1}, n} \left(e^{-\lambda_d / \mathbf{m}_n^*} \right) - f_{N_{d-1}, n}(0) \right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{d-1} \mathbf{E}_\pi \left[Z_{N_i}(N_{i-1}) \exp \left\{ -\lambda_i \frac{Z_{N_i}(N_{i-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*} \right\} \right] \\ &= e^{S_{N_{d-1}}} \mathbf{P}_\pi\{Z_n(N_{d-1}) > 0\} \Phi_{N_{d-1}, N_d} \left(\lambda_d \frac{\mathbf{m}_{N_d}^*(N_{d-1})}{\mathbf{m}_{N_d}^*} \right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i} \left(\lambda_i \frac{\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*} \right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

В соответствии со следствием 5 при $i = 1, \dots, d$

$$\frac{\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*} I\{\tau(N_{i-1}) < \tau(N_i)\} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1}{\mathbf{m}_{N_i}^*} = \frac{1 - f_{0, N_i}(0)}{e^{S_{N_i}}} \leq e^{S_{\tau(N_i)} - S_{N_i}} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, $\prod_{i=1}^{d-1} e^{-\lambda_i/\mathbf{m}_i^*} \xrightarrow{p} 1$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда, используя аргументы, аналогичные применявшимся при доказательстве леммы 20, нетрудно вывести, что при осуществлении события $\mathcal{U}(\bar{t}; n)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\Lambda}} \left(\Phi_{N_{d-1}, N_d} \left(\lambda_d \frac{\mathbf{m}_{N_d}^*(N_{d-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*} \right) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i} \left(\lambda_i \frac{\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*} \right) - \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i}(\lambda_i) \right) \xrightarrow{p} 0.$$

Замечая, что в соответствии с (5.9)

$$e^{S_{N_{d-1}}} \frac{\mathbf{P}_\pi \{Z_n(N_{d-1}) > 0\}}{\mathbf{P}_\pi \{Z_n > 0\}} = e^{S_{N_{d-1}}} \frac{1 - f_{N_{d-1}, n}(0)}{1 - f_{0, n}(0)} \xrightarrow{p} 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

при осуществлении события $\mathcal{U}(\bar{t}; n)$, заключаем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\Lambda}} \left(\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i}(\lambda_i) \right) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \stackrel{p}{\leq} 0.$$

С другой стороны, в силу неравенств $\mathbf{m}_{N_i}^* \geq \mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})$ и

$$F(ss_2) - F(ss_1) \geq F'(ss_1)(s_2 - s_1), \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi \{Z_n > 0\} \Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) &\geq \left(f_{N_{d-1}, n} \left(e^{-\lambda_d/\mathbf{m}_n^*(N_{d-1})} \right) - f_{N_{d-1}, n}(0) \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \mathbf{E}_\pi \left[Z_{N_i}(N_{i-1}) \exp \left\{ -\lambda_i \frac{Z_{N_i}(N_{i-1})}{\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})} \right\} f_{N_i, N_{i+1}}^{Z_{N_i}(N_{i-1})}(0) \right] \\ &= e^{S_{N_{d-1}}} \mathbf{P}_\pi \{Z_n(N_{d-1}) > 0\} \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \mathbf{E}_\pi \left[g_{\lambda_i}(\hat{Y}_{N_i}(N_{i-1})) f_{N_i, N_{i+1}}^{Z_{N_i}(N_{i-1})}(0) \mid Z_{N_i}(N_{i-1}) > 0 \right]. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что для любого числа K такого, что $K\lambda_i > 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi \left[g_{\lambda_i}(\hat{Y}_{N_i}(N_{i-1})) \left(1 - f_{N_i, N_{i+1}}^{Z_{N_i}(N_{i-1})}(0) \right) \mid Z_{N_i}(N_{i-1}) > 0 \right] \\ \leq \mathbf{E}_\pi \left[g_{\lambda_i}(\hat{Y}_{N_i}(N_{i-1})) (1 - f_{N_i, N_{i+1}}^{Z_{N_i}(N_{i-1})}(0)) \right. \\ \left. \times I\{\hat{Y}_{N_i}(N_{i-1}) > R\} \mid Z_{N_i}(N_{i-1}) > 0 \right] \\ + g_{\lambda_i}(K) \leq \lambda_i^{-1} \left(1 - f_{N_i, N_{i+1}}^{K\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}(0) \right) + g_{\lambda_i}(K). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ввиду того, что

$$(1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0)) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \leq e^{S_{\tau(N_{i+1})} - S_{N_i}} I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для любого $\varepsilon_1 > 0$, найдется число $n_0 = n_0(\varepsilon_1)$ такое, что

$$\mathbf{P} \{1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0) > 2^{-1}\} \leq \varepsilon_1$$

при $n \geq n_0$. С другой стороны, если $1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0) \leq 2^{-1}$, то

$$\begin{aligned} f_{N_i, N_{i+1}}^{K\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}(0) &= \exp \{ K\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1}) \ln f_{N_i, N_{i+1}}(0) \} \\ &\geq \exp \{ -2K\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})(1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0)) \}. \end{aligned}$$

Далее, в соответствии со следствием 6

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1}) (1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0)) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \\ &= \frac{e^{S_{N_i} - S_{N_{i-1}}} (1 - f_{N_i, N_{i+1}}(0))}{1 - f_{N_{i-1}, N_i}(0)} I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$f_{N_i, N_{i+1}}^{K\mathbf{m}_{N_i}^*(N_{i-1})}(0) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \xrightarrow{P} 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\sup_{1 \leq \lambda_i \leq \Lambda} g_{\lambda_i}(K) \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$, заключаем, что

$$\begin{aligned} &\sup_{1 \leq \lambda_i \leq \Lambda} \left(\mathbf{E}_\pi \left[g_{\lambda_i}(\hat{Y}_{N_i}(N_{i-1})) \left(1 - f_{N_i, N_{i+1}}^{Z_{N_i}(N_{i-1})}(0) \right) \mid Z_{N_i}(N_{i-1}) > 0 \right] \right. \\ &\quad \left. \times I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \right) \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Суммируя вышеизложенные рассуждения, выводим, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\Lambda}} \left(\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i}(\lambda_i) \right) I\{\mathcal{U}(\bar{t}; n)\} \stackrel{P}{\geq} 0.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Заметим сначала, что ввиду следствий 8 и 9 достаточно установить справедливость этой теоремы для случая $b = d$ и $\bar{r} = (0, 1, \dots, d)$, т.е. доказать, что для $\bar{t} = (0, t_1, \dots, t_{d-1}, 1)$

$$\left\{ \Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) \mid \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right\} \Rightarrow \check{\Phi}_d(\lambda_d)(-1)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} \check{\Phi}'_i(\lambda_i), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.17)$$

Для этого ввиду леммы 25 нужно показать, что

$$\left\{ \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_{N_{i-1}, N_i}(\lambda_i) \mid \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right\} \Rightarrow \check{\Phi}_d(\lambda_d)(-1)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} \check{\Phi}'_i(\lambda_i) \quad (6.18)$$

при $n \rightarrow \infty$. С этой целью для чисел $k, l, r, n \in \mathbf{N}$, $l \leq k \leq n$, и равномерно непрерывных функций $G_j: \Phi \rightarrow [0, 1]$, $j = 1, \dots, d$, положим

$$T_{l,r}^{(j)}(k) := G_j(\Psi_{k-l, k+r}(\lambda_j)), \quad j = 1, \dots, d-1;$$

$$T_{l, n-k}^{(d)}(k) := G_d(\Phi_{k-l, n}(\lambda_d)).$$

Очевидно, что случайные величины $T_{l,r}^{(j)}(k)$ ограничены и измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{k-l, k+r}$ при любых $j = 1, \dots, d$ и $k, l, r \in \mathbf{N}$, $l \leq k$.

Определим теперь на элементах $(\pi^1, \dots, \pi^{2d})$ выборочного пространства Π^{2d} , где $\pi^j = (f_0^{(j)}(s), f_1^{(j)}(s), \dots) \in \Pi^{(j)}$ (см. (4.12)), случайные блуждания $\{S_k^{(j)}\}_{k \geq 0}$, $j = 1, \dots, 2d$, по формуле (4.13) и случайные величины $T_{l,r}^{(j)}$, $k, l, r \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, $j = 1, \dots, d$, при помощи равенств

$$T_{l,r}^{(j)} = T_{l,r}^{(j)}(\pi^1, \dots, \pi^{2d}) = T_{l,r}^{(j)}(\pi^{2j-1}, \pi^{2j}) := G_j(R_{l,r}^{(j)}(\cdot)), \quad 1 \leq j \leq d-1,$$

$$T_{l,r}^{(d)} = T_{l,r}^{(d)}(\pi^1, \dots, \pi^{2d}) = T_{l,r}^{(d)}(\pi^{2d-1}, \pi^{2d}) := G_d(R_{l,r}^{(d)}(\cdot)),$$

где

$$R_{l,r}^{(j)}(\cdot) = R_{l,r}^{(j)}(\lambda_j) := 1 - \frac{1 - f_{l,0}^{(2j-1)}(f_{0,r}^{(2j)}((\exp\{-\lambda_j(1 - f_{l,0}^{(2j-1)}(f_{0,r}^{(2j)}(0)))e^{-S_l^{(2j-1)}}e^{-S_r^{(2j)}}\})))}{1 - f_{l,0}^{(2j-1)}(f_{0,r}^{(2j)}(0))},$$

$$R_{l,r}^{(j)'}(\cdot) = R_{l,r}^{(j)'}(\lambda_j) := \frac{d}{d\lambda_j} R_{l,r}^{(j)}(\lambda_j).$$

Отметим, что введенные нами наборы случайных величин $\{T_{l,r}^{(j)}\}$ и $\{T_{l,r}^{(j)}(k)\}$ удовлетворяют всем условиям лемм 11 и 12. Действительно, при осуществлении события

$$\mathcal{U}_k(\bar{t}, n) := \{\tau(nt_j) = k_j, j = 0, 1, \dots, d, 0 = k_0 < k_1 < \dots < k_d \leq n\}$$

сопровождающее случайное блуждание разбивается на $2d$ отрезков:

$$\{S_k, k = 0, 1, \dots, n\} = \bigcup_{j=1}^d \{S_k, k \in [nt_{j-1}, k_j - 1]\} \cup \{S_k, k \in [k_j, nt_j]\}$$

(некоторые из которых могут состоять из одного элемента), причем

$$\mathcal{U}_k(\bar{t}, n) = \left\{ \max_{k \in [nt_{j-1}, k_j - 1]} (S_{k_j} - S_k) < 0, \min_{k \in [k_j + 1, nt_j]} (S_k - S_{k_j}) \geq 0, \right. \\ \left. S_{nt_{j-1}} - S_{k_{j-1}} < -(S_{k_j} - S_{nt_{j-1}}), j = 1, \dots, d \right\}.$$

Вспомнив определения (4.12) и (4.14), легко понять, что $\mathbf{P}(\mathcal{U}_k(\bar{t}, n)) = \mathbb{P}^{2d}(\mathcal{B}(\mathbf{b}))$, где, как и в лемме 11, $2d$ -мерный вектор $\mathbf{b}$ имеет компоненты $b_{2j} = nt_j - k_j$, $b_{2j-1} = k_j - nt_{j-1}$, $j = 1, \dots, d$. При этом отрезку случайного блуждания $\{S_k^{(2j)}, k = 0, 1, \dots, nt_j - k_j\}$, $j = 1, \dots, d$, соответствует отрезок $\{S_k - S_{k_j}, k \in [k_j, nt_j]\}$ исходного блуждания, в то время как отрезок $\{S_k^{(2j-1)}, k = 0, 1, \dots, nt_j - k_j\}$, $j = 1, \dots, d$, соответствует обращенному отрезку $\{S_k^* = S_k - S_{k_j}, k \in [nt_{j-1}, k_j]\}$. Поэтому при $l_j \in [0, k_j - 1 - nt_{j-1}]$, $r_j \in [0, nt_j - k_j]$, $j = 1, \dots, d$,

$$\mathbb{E} \left[T_{l_d, n - \tau(n)}^{(d)}(\tau(n)) \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}(\tau(nt_j)); \mathcal{U}_k(\bar{t}, n) \right] = \mathbb{E} \left[T_{l_d, n - k_d}^{(d)} \prod_{j=1}^{d-1} T_{l_j, r_j}^{(j)}; \mathcal{B}(\mathbf{b}) \right].$$

Поскольку функции G_j произвольны, то отсюда и из лемм 11 и 12 вытекает, что для любых $l_j, r_j \in \mathbf{N}$, $j = 1, \dots, d$, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \Phi_{\tau(n)-l_d, n}(\lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} \Psi_{\tau(nt_j)-l_j, \tau(nt_j)+r_j}(\lambda_j) \mid \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right\} \\ \Rightarrow R_{l_d, \infty}^{(d)}(\lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} R_{l_j, r_j}^{(j)'}(\lambda_j),$$

где случайные функции, входящие в правую часть последнего соотношения, независимы относительно меры $\hat{\mathbf{P}}^d = \hat{\mathbf{P}} \times \dots \times \hat{\mathbf{P}}$ как случайные элементы измеримого пространства $(\Phi, \mathcal{B}_\Phi)$. Поскольку

$$\lim_{l_d \rightarrow \infty} d_\Lambda(R_{l_d, \infty}^{(d)}(\lambda_d), \check{\Phi}_d(\lambda_d)) = 0 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

и

$$\lim_{l_j, r_j \rightarrow \infty} d_\Lambda(R_{l_j, r_j}^{(j)}(\lambda_j), -\check{\Phi}'_j(\lambda_j)) = 0 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}, \quad j = 1, \dots, d-1,$$

то, устремляя сначала к бесконечности n , а затем $\min_j \{l_j, r_j\}$, получаем

$$\left\{ \Phi_{\tau(n)-l_d, n}(\lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} \Psi_{\tau(nt_j)-l_j, \tau(nt_j)+r_j}(\lambda_j) \mid \mathcal{U}(\bar{t}; n) \right\} \\ \Rightarrow \check{\Phi}_d(\lambda_d)(-1)^{d-1} \prod_{j=1}^{d-1} \check{\Phi}'_j(\lambda_j),$$

где функции $\check{\Phi}_j(\cdot)$ как случайные элементы измеримого пространства $(\Phi, \mathcal{B}_\Phi)$ независимы относительно меры $\hat{\mathbf{P}}^d$ и распределены так же, как и $\Phi(\cdot)$. Отсюда, применяя последовательно лемму 14, теорему 3 и лемму 25, несложно вывести (6.18) и (6.17).

Теорема 2 доказана.

Заключительные замечания.

Пусть $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — устойчивый процесс Леви. Для фиксированных чисел $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_b = 1$ положим $\omega_p := \inf_{t_0 \leq u \leq t_p} W(u)$, $0 \leq p \leq b$. Пусть $d(W)$ — количество различных чисел в наборе $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_b$, а вектор $\bar{r}(W) = (r_0(W), r_1(W), \dots, r_{d(W)}(W))$ имеет компоненты

$$r_0(W) = 0, \quad r_{i+1}(W) = \max \{k \geq r_i + 1: \omega_{r_i+1} = \omega_k\}.$$

Заметим, что $r_{d(W)}(W) = b$. Введем обозначение

$$\mathcal{R}(d, b) = \{\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_d): 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_d = b\}.$$

Из теоремы 2, используя формулу полной вероятности, нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема 4. Если выполнены условия A2 и A3, то при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi_n(\bar{t}, \bar{\lambda}) \Rightarrow \sum_{d=1}^b (-1)^{d-1} \sum_{\bar{r} \in \mathcal{R}(d, b)} \prod_{i=1}^{d-1} \check{\Phi}'_i \left(\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \lambda_j \right) \\ \times \check{\Phi}_d \left(\sum_{j=r_{d-1}+1}^b \lambda_j \right) I\{\bar{r}(W) = \bar{r}\},$$

где случайные функции $\check{\Phi}_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, d$, независимы и распределены так же, как и $\Phi(\lambda)$, а процесс Леви W , по которому построены векторы $\bar{r}(W)$, не зависит от совокупности $\check{\Phi}_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, № 3, с. 52–67.
2. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab. (в печати).
3. Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 266 p.
4. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
6. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
7. Doney R. A. Spitzer's condition and ladder variables in random walks. — Probab. Theory Related Fields, 1995, v. 101, № 4, p. 577–580.
8. Durrett R. Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — Ann. Probab., 1978, v. 6, № 5, p. 798–828.
9. Hirano K. Determination of the limiting coefficient for exponential functionals of random walks with positive drift. — J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 1998, v. 5, № 2, p. 299–332.
10. Vatutin V. A., Dyakonova E. E. Reduced branching processes in random environment. — Mathematics and Computer Science II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. Ed. by B. Chauvin et al. Basel: Birkhäuser, 2002, p. 455–467.
11. Vatutin V. A., Dyakonova E. E. Yaglom type limit theorem for branching processes in random environment. — Mathematics and Computer Science III: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. Ed. by M. Drmota et al. Basel: Birkhäuser, 2004 (в печати).
12. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
13. Спitzer Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.

Поступила в редакцию
17.III.2004