Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Мухин, Аппроксимация локальных вероятностей сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 715–730

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:36:51

© 1997 г.

МУХИН А. Б.*

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассматриваются суммы независимых случайных величин, нормированные распределения которых аппроксимированы соответствующим распределением или асимптотическим разложением. В этих условиях оценивается точность аппроксимации вероятностей попадания ненормированных сумм в ограниченную область. Оценки зависят от точности аппроксимации нормированных сумм и некоторых структурных характеристик слагаемых. В качестве следствий даются оценки скорости сходимости в локальных предельных теоремах о вероятности попадания сумм в ограниченную область для конкретных классов случайных величин.

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, локальные вероятности, локальные предельные теоремы, структурные характеристики распределений.

1. Введение. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где ξ_k — вещественные, независимые для $k = 1, \dots, n$ случайные величины (с.в.); $\eta_n = B_n^{-1}(S_n - A_n)$, $A_n \in \mathbf{R}$, $B_n \rightarrow \infty$. Все пределы и асимптотические соотношения рассматриваются при $n \rightarrow \infty$. $G_n(\cdot)$ — аппроксимирующие распределения, т.е. для некоторого класса множеств

$$\delta_n(A) \equiv \mathbf{P}\{\eta_n \in A\} - G_n(A) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Будем всегда предполагать, что G_n абсолютно непрерывны, причем для характеристической функции (х.ф.)

$$|\varphi_n(t)| = \left| \int_{\mathbf{R}} e^{itx} G_n(dx) \right| \leq \varphi |t|^{-\beta}, \quad \varphi > 0, \beta > 1. \quad (2)$$

В качестве G_n может выступать также конечная обобщенная мера с $G_n(\mathbf{R}) = 1$ и соответствующим преобразованием Фурье–Стилтьеса.

Статья посвящена оценкам

$$\Delta_n(\lambda) \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\{S_n \in [x, x + \lambda]\} - G_n\left(\frac{[x, x + \lambda] - A_n}{B_n}\right) \right|.$$

*Ташкентский государственный университет, математический факультет, Вузгородок, 700095 Ташкент, Узбекистан.

В работах [1]–[4] изучены условия справедливости локальной предельной теоремы (л.п.т.) для областей, т.е. выполнения соотношений

$$B_n \Delta_n(\lambda) \rightarrow 0 \quad (3)$$

для постоянного $\lambda > 0$ и $G_n = G_1$. Хорошо известны разнообразные результаты относительно оценок скорости сходимости в (1). Выделим работы [5], [6], в которых рассматриваются суммы одинаково распределенных конечномерных с.в., $G_n = \Phi$ — стандартное нормальное распределение. Даются оценки $\delta_n(A)$, зависящие от диаметра области ρ_A , что позволяет оценить и $\Delta_n(\lambda)$. В частности, для одномерных с.в. с общим распределением F и конечным третьим моментом при $A_n = \mathbf{E}S_n$, $B_n^2 = \mathbf{D}S_n$ для любого интервала A получаем

$$|\delta_n(A)| \leq c(F) n^{-1/2} (1 + \rho_A)$$

или

$$\Delta_n(\lambda) \leq c(F) n^{-1/2} \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right). \quad (4)$$

Здесь и далее $c(\cdot)$ — положительные постоянные, везде различные, зависящие только от указанных в скобках параметров, c — абсолютные положительные постоянные. Очевидно, из (4) не следует (3), да и не может следовать, поскольку здесь не учитывается структура распределений слагаемых (решетчатость, нерешетчатость и т.д.). Некоторую информацию о скорости сходимости в (3) можно извлечь из асимптотических разложений для нормированных распределений сумм (см., например, теорему 4 главы VI из [7]). Однако, при этом оценка $\Delta_n(\lambda)$ будет грубой даже при самых жестких условиях на структуру слагаемых и моменты.

Непосредственно оценкам скорости сходимости в (3) для частных случаев посвящены работы [8]–[10]. В [8] рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных вещественных с.в., $G_n = G_1$ — устойчивое распределение. В [9], [10] построены точные оценки в л.п.т. для областей в случае сумм конечномерных с.в., имеющих моменты порядка $2 + \delta$, $\delta \in (0, 1]$. В настоящей работе мы оцениваем $\Delta_n(\lambda)$ в общем случае, используя более эффективные структурные характеристики слагаемых по сравнению с [8]–[10].

2. Формулировка основных результатов. Основным условием далее будет следующее: существуют $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\nu \geq (\beta - 1)^{-1}$ и последовательность $L_n \rightarrow 0$ такие, что

$$\int_{|t| \leq \alpha L_n^{-\nu}} |f(\eta_n, t) - \varphi_n(t)| dt \leq \tau L_n, \quad (5)$$

где $f(\eta_n, t)$ — х.ф. η_n . Связь условия (5) с (1) очевидна. В частности, при выполнении (5) с $\nu \geq 1$ для любого конечного интервала A име-

ем $\delta_n(A) = O(L_n)$ (это следует из приводимой далее леммы 1). Если ξ_k имеют конечные третьи моменты, $A_n = \mathbf{E}S_n$, $B_n^2 = \mathbf{D}S_n$, $L_n = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k - \mathbf{E}\xi_k|^3 \rightarrow 0$, то (см. [7], [11])

$$|f(\eta_n, t) - e^{-t^2/2}| \leq cL_n|t|^3 e^{-t^2/3} \quad (6)$$

для $|t| \leq 1/(4L_n)$ и выполняется (5). Далее в следствиях из общих теорем (п. 4) будут указаны другие классы последовательностей, для которых выполнено (5). В работе [12] близкое условие использовалось для построения оценок скорости сходимости в л.п.т. для плотностей.

Условие (5) и соотношение (1) связаны, как известно, с поведением распределений слагаемых «на хвостах». Для выполнения (3) и тем более оценок скорости сходимости в (3), очевидно, нужны дополнительные условия, исключающие сосредоточение распределений слагаемых и сумм на решетках. В связи с этим используем следующие характеристики распределений, изучавшиеся в [3], [4], [13]:

$$H(\xi, d) = \mathbf{E}(\xi^* d)^2,$$

где $\langle \cdot \rangle$ — расстояние от аргумента до ближайшего целого числа, ξ^* — симметризованная случайная величина. Очевидно, $H(\xi, d) = 0$ тогда и только тогда, когда распределение ξ решетчато с шагом $1/d$ (считаем всегда $d > 0$). Положительность $H(\xi, d)$ при любом d является критерием нерешетчатости. Укажем некоторые оценки отдаленности $H(\xi, d)$ от нуля.

Если ξ имеет ограниченную плотность $p(x) \leq A$ и конечный второй момент, то

$$H(\xi, d) \geq \frac{c}{A^2(\mathbf{D}\xi + d^{-2})}. \quad (7)$$

Если ξ абсолютно непрерывна, то

$$H(\xi, d) \geq \frac{1}{12} \alpha\left(\mathfrak{M}, \frac{1}{2d}\right),$$

где $\alpha(\mathfrak{M}, N)$ — плотностные характеристики В. А. Статулявичюса [14].

Если выполняется условие Крамера: $\overline{\lim} |f(\xi, t)| < 1$ при $|t| \rightarrow \infty$, то $\inf_{d \geq \delta} H(\xi, d) > 0$ для любого $\delta > 0$ (верно и обратное утверждение).

Доказательства этих неравенств и некоторых других приведены в [13]. Следующее утверждение будет доказано в п. 4 настоящей статьи.

Если существуют рациональное число $\alpha \neq 0$ и иррациональное алгебраическое число β степени m такие, что $\mathbf{P}\{\xi^* = \alpha\} > 0$ и $\mathbf{P}\{\xi^* = \beta\} > 0$, то для любого $\delta > 0$ при $m = 2$

$$\inf_{\delta \leq d \leq u} H(\xi, d) \geq c(F, \delta) u^{-2}, \quad (8)$$

а при $m > 2$ для любого $\nu > 2$

$$\inf_{\delta \leq d \leq u} H(\xi, d) \geq c(F, \delta, \nu) u^{-\nu}. \quad (9)$$

Легко сформулировать исходное условие на языке разностей возможных значений не симметризованных случайных величин.

Положим

$$H_n(d) = \sum_{k=1}^n H(\xi_k, d), \quad H_n = \inf_{1 \leq d \leq 2} H_n(d), \quad H_n^* = \inf_{d \geq 1} H_n(d).$$

В [4] показано, что условие $H_n \rightarrow \infty$ является необходимым для справедливости усиленной л.п.т. для областей, а условие $H_n^* \rightarrow \infty$ необходимо для усиленной л.п.т. для плотностей. Там же имеются достаточные условия справедливости л.п.т., использующие $H_n(d)$.

Обозначим θ_n решение уравнения

$$\theta = \exp \left\{ - \inf_{1 \leq d \leq 1/\theta} H_n(d) \right\}$$

в области $0 < \theta \leq 1$. Оно всегда существует, единственно и $\theta_n \leq \exp(-H_n^*)$. Приведенные выше оценки $H(\xi, d)$ позволяют оценить θ_n , в частности, если слагаемые имеют общее распределение F , то $\theta_n \rightarrow 0$ для нерешетчатого F и $\theta_n = O(q^n)$, $q = q(F) < 1$, если F удовлетворяет условию Крамера, т.е. $H_1^* > 0$.

Еще обозначим $l_n = \alpha(L_n^\nu B_n)^{-1}$, $i_n = 0$ при $l_n > 2\pi$, $i_n = 1$ при $l_n \leq 2\pi$. Для простоты формулировок считаем, что $B_n \geq 1$, $L_n \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и (5), то

$$\Delta_n(\lambda) \leq a \left[\frac{\lambda L_n}{B_n} + \frac{\lambda i_n}{\sqrt{H_n}} \exp \left\{ - \frac{l_n^2 H_n}{4\pi^2} \right\} + \theta_n \right]; \quad (10)$$

здесь и далее a и a_i — положительные постоянные, зависящие только от параметров в перечисленных условиях, в (10) можно взять

$$a = c \left(1 + \tau + \frac{\varphi}{\beta - 1} (1 + \alpha^{1-\beta}) \right). \quad (11)$$

Для справедливости неравенства (10), конечно, необязательно, чтобы $B_n \rightarrow \infty$ и $L_n \rightarrow 0$. Мы оставляем эти условия, чтобы сохранить преемственность с предшествующими результатами и поскольку неравенство (10) содержательно только при больших B_n и малых L_n . Так как в (10) зависимость от распределений слагаемых полностью раскрыта, то указанная оценка $\Delta_n(\lambda)$ пригодна для случая, когда распределения ξ_k зависят от n , т.е. для последовательности серий случайных величин.

Следствия из теорем будут указаны далее. Сейчас приведем некоторые оценки $\Delta_n(\lambda)$ при дополнительных условиях.

Будем говорить, что *выполнено условие А*, если для некоторых последовательностей M_n и B_n ($0 < M_n < B_n$) существуют такие $\varepsilon > 0$, $\rho \in (0, 2]$, что для $u \geq M_n$

$$B_n^2(u) \equiv \sum_{k=1}^n \int_{|x| \leq u} x^2 F_k^*(dx) \geq \varepsilon u^{2-\rho} B_n^\rho, \quad (12)$$

где F_k^* — симметризованные распределения ξ_k . Ограничиваясь значением $\rho = 2$, получаем более простое условие: $B_n^2(M_n) \geq \varepsilon B_n^2$. Последнее условие с постоянным $M_n = M$ и $B_n^2 = D S_n$ использовалось для построения достаточных условий справедливости л.п.т. для плотностей и оценок скорости сходимости в них В. А. Статулявичусом [14]. Локальные предельные теоремы для областей с условием А рассматривались в [4] и других работах.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2), (5) и А с некоторой последовательностью M_n и нормирующей последовательностью B_n из (5). Тогда

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{a_1}{B_n} [\lambda L_n + M_n \theta_n^*], \quad (13)$$

где θ_n^* — корень уравнения $\theta = \exp\{-\inf_{1/(2M_n) \leq d \leq 1/(\theta M_n)} H_n(d)\}$, или

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{a_2}{B_n} \left[\lambda L_n + (\lambda \wedge M_n) M_n j_n \exp \left\{ -\frac{H_n}{8M_n^2} \right\} + \theta_n (M_n + 1) \right]. \quad (14)$$

Здесь $a_i = a_i(\alpha, \beta, \varphi, \nu, \tau, \varepsilon, \rho)$, $\lambda \wedge M_n = \min\{\lambda, M_n\}$, $j_n = 0$ при $M_n \leq \frac{1}{2}$, $j_n = 1$ при $M_n > \frac{1}{2}$, θ_n — то же, что и в теореме 1.

Поскольку $\theta_n, \theta_n^* \leq 1$, то неравенства (13) и (14) полезны и без учета структуры слагаемых, в частности, из них следует (4).

С помощью леммы 5 из [16] неравенство (13) можно упростить:

Следствие. В условиях теоремы 2

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{a_1}{B_n} \left[\lambda L_n + M_n \exp \left\{ -H_n^* \wedge \frac{H_n}{16M_n^2} \right\} \right].$$

Укажем еще одну оценку, особенно полезную при малых λ .

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2), (5) и А. Положим $\sigma_k^2 = D\xi_k$, если второй момент существует, $\sigma_k = \infty$ в противном случае. Тогда для любых $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq n$, $0 < \lambda \leq M_n$

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{a_3}{B_n} \left[\lambda L_n + \theta_n^{**} \left(\lambda + \left\{ \prod_{j=1}^4 Q(\xi_{k_j}, \lambda) (\sigma_{k_j} + M_n) \right\}^{1/4} \right) \right],$$

где $Q(\xi, \lambda) = \sup_x P\{x \leq \xi \leq x + \lambda\}$, θ_n^{**} — решение уравнения

$$\theta = \exp \left\{ - \inf_{1/(2M_n) \leq d \leq 1/(\lambda\theta)} H_n(d) \right\}.$$

З а м е ч а н и е. Если фигурирующие в теореме 3 четыре с.в. ξ_{k_j} имеют ограниченные плотности $p_{k_j}(x) \leq p$ и $\sigma_{k_j} \leq \sigma$, то

$$\Delta_n(\lambda) \leq a_4 \lambda B_n^{-1} [L_n + p(\sigma + M_n) \theta_n^{**}].$$

В этих условиях справедлива и соответствующая оценка в л.п.т. для плотностей.

3. Доказательства теорем.

Лемма 1. Пусть для последовательности случайных величин S_n (необязательно сумм независимых случайных величин) и некоторых A_n , B_n и $G_n(\cdot)$, описанных во введении, выполняется (5). Тогда при $\lambda \geq 0$ и $0 < \delta_n \leq 1/l_n$ справедливы неравенства

$$\Delta_n(\lambda) \leq c \int_{l_n \leq t \leq 1/\delta_n} |f_n(t)| \left[(\lambda + \delta_n) \wedge \frac{1}{t} \right] dt + a \frac{\lambda L_n + \delta_n}{B_n}, \quad (15)$$

где $f_n(t) = f(S_n, t)$, а определено соотношением (11).

В частности, при $\delta_n = 1/l_n$ из (15) следует оценка:

$$\Delta_n(\lambda) \leq a (\lambda L_n B_n^{-1} + L_n^\nu).$$

Доказательство леммы 1. Используем метод «сглаживания», для л.п.т., применявшийся в [2], [3], [9], [10]. Пусть $Q_\varepsilon(\cdot)$ — распределение с плотностью $q_\varepsilon(x) = \varepsilon (8\pi x^2)^{-1} \sin^2(8x/\varepsilon)$. Как легко подсчитать, $Q_\varepsilon([- \varepsilon, \varepsilon]) \geq 1 - 1/(4\pi)$ и соответствующая х.ф. $f_\varepsilon(t) = 0$ для $|t| \geq 16/\varepsilon$ (см. [15, с. 96–97]). Далее будем пользоваться обозначениями: $A^\varepsilon = \{x: |x - y| < \varepsilon, y \in A\}$, $A^{-\varepsilon} = \mathbf{R} \setminus (\mathbf{R} \setminus A)^\varepsilon$, ∂A — граница множества A . Для краткости будем считать $A_n = 0$. Положим $P_n(A) = P\{S_n \in A\}$, $\overline{G}_n(A) = G_n(A/B_n)$, $\varepsilon = \varepsilon_n = 16\delta_n$. Из неравенств сглаживания (см., например, лемму 11.4 или неравенство (11.25) из [15]) получаем

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{2\pi}{2\pi - 1} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad (16)$$

где

$$\gamma_1 = \sup_{x \in \mathbf{R}} \overline{G}_n((\partial A)^{2\varepsilon_n} + x), \quad A = [0, \lambda],$$

$$\gamma_2 = \sup_x |P_n * Q_{\varepsilon_n}(A^{\varepsilon_n} + x) - \overline{G}_n * Q_{\varepsilon_n}(A^{\varepsilon_n} + x)|,$$

$$\gamma_3 = \sup_x |P_n * Q_{\varepsilon_n}(A^{-\varepsilon_n} + x) - \overline{G}_n * Q_{\varepsilon_n}(A^{-\varepsilon_n} + x)|.$$

Обозначая $g_n(x)$ плотность G_n и учитывая (2), имеем

$$\sup_x g_n(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\varphi_n(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} + \frac{\varphi}{\pi(\beta-1)}$$

и

$$\gamma_1 \leq c \left(1 + \frac{\varphi}{\beta-1} \right) \frac{\delta_n}{B_n}. \quad (17)$$

Для любого распределения (конечной обобщенной меры) $F(\cdot)$ с абсолютно интегрируемой х.ф. (преобразованием Фурье-Стилтьеса) $f(t)$ можно записать

$$F([x, x+\lambda]) = \frac{1}{2\pi} \int_x^{x+\lambda} \int_{\mathbf{R}} e^{-itz} f(t) dt dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \int_x^{x+\lambda} e^{-itz} dz dt,$$

причем $|\int_x^{x+\lambda} e^{-itz} dz| \leq \lambda \wedge 2/|t|$. Отсюда

$$\gamma_2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} |f_n(t) - \varphi_n(tB_n)| |f_{\varepsilon_n}(t)| \left[(\lambda + \varepsilon_n) \wedge \frac{1}{|t|} \right] dt.$$

Обозначая через I интеграл в (15) и учитывая (2), (5) и свойства $f_{\varepsilon}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leq \frac{\lambda + \varepsilon_n}{\pi B_n} \int_{|y| \leq \alpha L_n^{-\nu}} |f(\eta_n, y) - \varphi_n(y)| dy + cI \\ &\quad + \frac{\lambda + \varepsilon_n}{\pi B_n} \int_{|y| \geq \alpha L_n^{-\nu}} |\varphi_n(y)| dy \\ &\leq c \left[\frac{(\lambda + \delta_n) \tau L_n}{B_n} + I + \frac{(\lambda + \delta_n) \varphi L_n^{\nu(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1} (\beta-1) B_n} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается γ_3 . Из (16), (17) и последних оценок следует (15).

Лемма 2. Для характеристической функции суммы независимых случайных величин при любом $t \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -4H_n \left(\frac{t}{2\pi} \right) \right\}. \quad (18)$$

При $|t| \leq 2\pi$

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{4\pi^2} H_n \right\}. \quad (19)$$

Доказательство следует из леммы 3 работы [3] и леммы 5 из [16].

Доказательство теоремы 1. В лемме 1 положим $\delta_n = \theta_n/(2\pi)$. Считаем $l_n \leq 2\pi$ (в противном случае доказательство упрощается). Отметим, что $\theta_n \leq 1$. Оценим интеграл из (15):

$$I \leq (\lambda + \delta_n) \int_{l_n \leq t \leq 2\pi} |f_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi \leq t \leq 1/\delta_n} |f_n(t)| dt = I_1 + I_2.$$

Можно считать $H_n \geq 1$, иначе $\theta_n \geq 1/e$ и оценка (10) тривиальна. Из (19) имеем

$$I_1 \leq (\lambda + \delta_n) \int_{t \geq l_n} \exp \left(-\frac{t^2 H_n}{4\pi^2} \right) dt \leq \frac{c(\lambda + \delta_n)}{\sqrt{H_n}} \exp \left(-\frac{l_n^2 H_n}{4\pi^2} \right).$$

Аналогично, из (18) получаем $I_2 \leq (\theta_n)^{-1} \exp \{ -4 \inf_{1 \leq d \leq 1/\theta_n} H_n(d) \} = \theta_n^3$. Собирая найденные оценки, получим (10).

Лемма 3. Пусть существуют $\varepsilon > 0$, $\rho \in (0, 2]$, $h > 0$ такие, что для $u \in [M_n, hB_n]$ выполнено (12) (M_n и B_n те же, что в условии А). Тогда для любого $\beta > 0$

$$\sup_{D \in \mathbb{R}} \int_{|t-D| \leq 1/M_n} |f_n(t)|^\beta dt \leq \frac{a}{B_n},$$

где $a = c/h + (c/(\rho\sqrt{\varepsilon\beta}))^{1/\rho}$.

Доказательство без вычисления постоянной a имеется в [3].

Доказательство теоремы 2. Используем лемму 1 с $\delta_n = M_n \theta_n^*$:

$$\begin{aligned} I &\leq (\lambda + \delta_n) \int_{l_n \leq t \leq \pi/M_n} |f_n(t)| dt + M_n \int_{\pi/M_n \leq t \leq 1/\delta_n} |f_n(t)| dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из условия А стандартными выкладками, связанными с переходом к симметризованному с.в., легко получить оценку:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq (\lambda + \delta_n) \int_{l_n \leq t \leq \pi/M_n} \exp \left\{ -ct^2 B_n^2 \left(\frac{\pi}{t} \right) \right\} dt \\ &\leq (\lambda + \delta_n) \int_{t \geq l_n} \exp \{ -c\varepsilon t^\rho B_n^\rho \} dt = \frac{\lambda + \delta_n}{B_n} \int_{u \geq \alpha L_n^\nu} \exp \{ -c\varepsilon u^\rho \} du \\ &\leq c(\varepsilon, \rho, \alpha, \nu) \frac{\lambda + M_n \theta_n^*}{B_n} \exp \left\{ -\frac{c\varepsilon \alpha^\rho}{L_n^{\nu\rho}} \right\} \leq \frac{a(\lambda + M_n \theta_n^*)}{B_n} L_n. \end{aligned}$$

При оценке I_2 применим неравенство (18) и затем, разбивая область интегрирования, лемму 3:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq M_n \exp \left\{ -2 \inf_{1/(2M_n) \leq d \leq 1/(\theta_n^* M_n)} H_n(d) \right\} \\ &\quad \times \int_{\pi/M_n \leq t \leq 2\pi/(\theta_n^* M_n)} |f_n(t)|^{1/2} dt \\ &\leq M_n (\theta_n^*)^2 \frac{c}{\theta_n^*} \sup_D \int_{|t-D| \leq 1/M_n} |f_n(t)|^{1/2} dt \leq \frac{a\theta_n^* M_n}{B_n}. \end{aligned}$$

Из (15), (20) и последних оценок получаем (13).

Для доказательства (14) положим $\delta_n = \theta_n/(2\pi)$ и оценим интеграл в лемме 1 следующим образом:

$$I \leq (\lambda + \delta_n) \int_{l_n \leq t \leq \pi/M_n} |f_n(t)| dt + \{M_n \wedge (\lambda + \delta_n)\} \int_{\pi/M_n \leq t \leq 2\pi} |f_n(t)| dt + c \int_{2\pi \leq t \leq 1/\delta_n} |f_n(t)| dt.$$

Оценки получившихся интегралов не приводим, поскольку они используют те же приемы, что и ранее.

Доказательство теоремы 3. Положим в неравенстве (15) $\delta_n = \lambda \theta_n^{**}$, при этом можно считать $\lambda > 0$. Очевидно,

$$I \leq (\lambda + \delta_n) \int_{l_n \leq t \leq \pi/M_n} |f_n(t)| dt + (\lambda + \delta_n) \int_{\pi/M_n \leq t \leq 1/\delta_n} |f_n(t)| dt = I_1 + I_2; \quad (21)$$

если $\lambda \theta_n^{**} \geq M_n/\pi$, то $I_2 = 0$. Величина I_1 оценивается так же, как в теореме 2:

$$I_1 \leq \frac{a(\lambda + \delta_n) L_n}{B_n} \leq \frac{2a\lambda L_n}{B_n}. \quad (22)$$

Отметим, что $\bar{H}_n(d) \equiv H_n(d) - \sum_{j=1}^4 H(\xi_{k_j}, d) \geq H_n(d) - 1$. При выполнении условия **A**, обозначая $F_{k_j}^*(\cdot)$ симметризованное распределение ξ_{k_j} , имеем

$$\begin{aligned} \bar{B}_n^2(u) &\equiv B_n^2(u) - \sum_{j=1}^4 \int_{|x| \leq u} x^2 F_{k_j}^*(dx) \\ &\geq \varepsilon u^{2-\rho} B_n^\rho - 4u^2 = \varepsilon u^{2-\rho} B_n^\rho \left[1 - \frac{4}{\varepsilon} \left(\frac{u}{B_n} \right)^\rho \right] \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} u^{2-\rho} B_n^\rho \quad \text{для } u \in \left[M_n, \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^{1/\rho} B_n \right]. \end{aligned}$$

Положим $f(t) = \prod_{j=1}^4 f(\xi_{k_j}, t)$, $\bar{f}_n(t) = f_n(t) f^{-1}(t)$.

Покрывая $\Omega = [\pi/M_n, 1/\delta_n]$ интервалами $\Omega_r = [r/M_n, (r+1)/M_n]$ и учитывая приведенные выше неравенства, с помощью лемм 2 и 3 оценим I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2\lambda \sup_{\pi/M_n \leq t \leq 1/\delta_n} |\bar{f}_n(t)|^{1/2} \sum_r \sup_{t \in \Omega_r} |f(t)| \int_{\Omega_r} |\bar{f}_n(t)|^{1/2} dt \\ &\leq \frac{a\lambda(\theta_n^{**})^2}{B_n} \sum_r |f(t_r)|, \quad t_r \in \Omega_r. \end{aligned} \quad (23)$$

Очевидно, функции $g_j(t) = |f(\xi_{k_j}, t)|^2$ удовлетворяют условию Липшица $|g_j(t+s) - g_j(t)| \leq c\sigma_{k_j}|s|$. С помощью известного неравенства Эссеена для функций концентрации (см., например, [7, с. 56]) находим

$$V_j \equiv \int_{\Omega} g_j(t) dt \leq \frac{c}{\lambda\theta_n^{**}} Q(\xi_{k_j}, \lambda\theta_n^{**}).$$

Теперь с помощью леммы 3 из [14] сумму в (23) можно оценить соответствующими интегралами:

$$\begin{aligned} \sum_r \prod_{j=1}^4 |f(\xi_{k_j}, t_r)| &\leq \prod_{j=1}^4 \left(\sum_r g_j^2(t_r) \right)^{1/4} \leq \prod_{j=1}^4 [V_j(\sigma_{k_j} + M_n)]^{1/4} \\ &\leq \frac{c}{\lambda\theta_n^{**}} \left[\prod_{j=1}^4 Q(\xi_{k_j}, \lambda\theta_n^{**})(\sigma_{k_j} + M_n) \right]^{1/4} \end{aligned}$$

Из леммы 1, неравенств (21)–(23) и последней оценки следует утверждение теоремы 3.

4. Частные случаи. Применим общие результаты к оценкам $\Delta_n(\lambda)$ для конкретных последовательностей ξ_k .

4.1. Следствие 1. Пусть ξ_k одинаково распределены при $k = 1, \dots, n$ (распределение может зависеть от n) и имеют моменты порядка $2 + \delta$, $0 < \delta \leq 1$; $\gamma = \mathbf{E}|\xi_k - \mathbf{E}\xi_k|^{2+\delta}$; $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_k$; $r = (\gamma/\sigma^2)^{1/\delta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_n(\lambda) &\equiv \sup_x \left| \mathbf{P}\{S_n \in [x, x + \lambda]\} - \Phi\left(\frac{[x, x + \lambda] - A_n}{B_n}\right) \right| \\ &\leq \frac{c(\delta)}{B_n} \left[\lambda L_n + (\lambda \wedge r) r \exp\left(-\frac{H_1 n}{8 \cdot 4^{2/\delta} r^2}\right) + (r + 1) \exp(-H_1^* n) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $A_n = \mathbf{E}S_n$, $B_n = \sigma\sqrt{n}$, $L_n = \gamma/(n^{5/2}\sigma^{2+\delta})$.

З а м е ч а н и е. Отсюда следует (4). Если $H_1^* = 0$, то вместо последнего слагаемого можно взять $(r + 1)\theta_n$, где θ_n — решение уравнения $\theta = \exp\{-n \inf_{1 \leq d \leq 1/\theta} H_1(d)\}$. Тогда для одинаково распределенных нерешетчатых с.в. с конечным третьим моментом получим оценку

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{c(F)}{\sqrt{n}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} + \alpha_n \right), \quad (24)$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\lambda \geq 0$.

Нетрудно обобщить следствие 1 на случай различно распределенных с.в. с конечным моментом порядка $2 + \delta$.

Доказательство следствия 1. Для х.ф. нормального закона выполняется (2) с $\beta = 2$ и $\varphi = 2/e$. Имеются неравенства, обобщающие (6) при существовании моментов порядка $2 + \delta$, $\delta \in (0, 1]$. Например, в [10, с. 84] показано, что при $|t| \leq 6(12L_n)^{-1/\delta}$

$$\left| f(\eta_n, t) - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right| \leq cL_n |t|^{2+\delta} \exp\left(-\frac{t^2}{3}\right),$$

где $L_n = B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k - \mathbf{E}\xi_k|^{2+\delta}$. Из этого неравенства следует, что (5) выполняется с $\nu = 1/\delta$, $\alpha = 6 \cdot 12^{-1/\delta}$, $\tau = c(\delta)$.

Используя легко доказываемое неравенство

$$B_n^2(u) \geq 2B_n^2 - 4u^{-\delta} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k - \mathbf{E}\xi_k|^{2+\delta},$$

легко проверить, что в условиях следствия выполняется условие А с $\rho = 2$, $\varepsilon = 1$, $M_n = 4^{1/\delta} \tau$.

Осталось использовать (14).

4.2. В случае одинаково распределенных ξ_k (при всех n и k) с конечным моментом порядка $2 + \delta$, удовлетворяющих условию Крамера, из следствия 1 получаем: для любого фиксированного $\lambda \geq 0$

$$\Delta_n(\lambda) = O(n^{-(1+\delta)/2}), \quad (25)$$

точнее, для $\lambda \geq 0$

$$\Delta_n(\lambda) \leq c(F, \delta) n^{-(1+\delta)/2} (\lambda + \theta^n), \quad (26)$$

где $\theta = \theta(F) < 1$. Справедливо более сильное утверждение.

Следствие 2. Пусть ξ_k имеют общее распределение F , удовлетворяющее условию Крамера. Условие

$$\int_{|x| \geq z} x^2 F(dx) = O(z^{-\delta}) \quad (27)$$

при $z \rightarrow \infty$ является необходимым и достаточным для справедливости как (25), так и (26).

Аналогичные результаты относительно л.п.т. для плотностей и решетчатых с.в. получены И. А. Ибрагимовым, отражены в [11] и хорошо известны.

Доказательство следствия 2. Необходимость доказывается так же, как в теореме 4.5.1 из [11]. Достаточность докажем с помощью неравенства (14). Проверим выполнение условия (5) с $\nu = 1/\delta$, $L_n = n^{-\delta/2}$. Следуя [11] и считая для простоты, что $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, положим

$$f(\xi_1, t) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} (1 + \gamma(t))\right\},$$

где $\gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Выберем α так, чтобы $|\gamma(z)| \leq \frac{1}{2}$ для $|z| \leq \alpha/\sigma$. Тогда $|\gamma(t/(\sigma\sqrt{n}))| \leq \frac{1}{2}$ для $|t| \leq \alpha L_n^{-\nu} = \alpha\sqrt{n}$. При доказательстве теоремы 3.4.1 в [11] показано, что при выполнении (27) $\int_0^x t^2 |\gamma(t)| dt = O(x^{3+\delta})$ для $x \rightarrow 0$. Отсюда теми же приемами, что и при доказательстве достаточности в лемме 3.4.1 из [11], легко получить

$$\int_{|t| \leq \alpha L_n^{-\nu}} \left| f(\eta_n, t) - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right| dt = O(n^{-\delta/2}),$$

т.е. выполняется (5).

В условиях следствия существует такое $M = M(F)$, что

$$B_n^2(u) = n \int_{|x| \leq u} x^2 F^*(dx) \geq B_n^2 = \sigma^2 n$$

для $u \geq M$, т.е. выполняется условие А с постоянным M . В силу теоремы 2 справедливо (14), из которого следует (25) и (26).

4.3. Пусть ξ_k одинаково распределены, имеют нулевое математическое ожидание и моменты порядка $s \geq 3$, $\gamma_\nu = E|\xi_k|^\nu$, $G_n(A) = \int_A [\varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{s-2} q_\nu(x) n^{-\nu/2}] dx$ — стандартное асимптотическое разложение распределения нормированной суммы независимых случайных величин — см., например, [7, гл. VI, § 1].

Следствие 3. В сформулированных выше условиях справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\lambda) &= \sup_x \left| P\{S_n \in [x, x + \lambda]\} - G_n\left(\frac{[x, x + \lambda]}{B_n}\right) \right| \\ &\leq \frac{a}{\sqrt{n}} \left[\lambda n^{-(s-2)/2} + (\lambda \wedge 1) e^{-a_1 n} + e^{-H_1^* n} \right], \end{aligned}$$

где $a = a(s, \sigma, \gamma_3, \gamma_s)$, $a_1 = 2^{-7} H_1 \sigma^4 \gamma_3^{-2}$.

Доказательство. Очевидно, (2) выполняется для любых $\beta > 1$ и $\varphi = \varphi(\beta)$. Положим $\beta = s - 1$, $L_n = n^{-(s-2)/2}$, $\nu = (s - 2)^{-1}$. Тогда справедливость неравенства (5) с $\tau = c(s) \gamma_s \sigma^{-s}$, $\alpha = (\sigma^s / \gamma_s)^{1/(s-2)}$ следует из обычных оценок х.ф. нормированных сумм при наличии s -го момента, например, из леммы 4 гл. VI из [7]. В условиях следствия 3 выполняется условие А с $\varepsilon = 1$, $\rho = 2$, $M_n = 4\gamma_3 \sigma^{-2}$ (см. доказательство следствия 1). Остается использовать неравенство (14).

4.4. Следствие 4. Пусть ξ_k имеют общее распределение F из области нормального притяжения устойчивого закона G с показателем $\alpha \in (0, 2]$. Существует абсолютный псевдомомент $\int_{\mathbf{R}} |x|^r |(F - G)(dx)| < \infty$ порядка $r = 1 + [\alpha]$. Если выполняется условие Крамера,

то для любого $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}\Delta_n(\lambda) &\equiv \sup_x \left| \mathbf{P}\{S_n \in [x, x + \lambda]\} - G\left(\frac{[x, x + \lambda] - A_n}{n^{1/\alpha}}\right) \right| \\ &= O(n^{-(1+r-\alpha)/\alpha}).\end{aligned}$$

Доказательство легко получается из теоремы 1. Условие А с постоянным M также выполняется и с помощью теоремы 2 можно получить более точную, но громоздкую оценку.

4.5. Пусть ξ_k — с.в. с равномерными распределениями в интервалах длины Δ_k . Положим

$$B_n^2 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2, \quad r_n = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k}{\sqrt{12} B_n}.$$

Ю. В. Прохоровым [17] доказано, что условие $r_n \rightarrow 0$ является необходимым и достаточным для справедливости как интегральной, так и л.п.т. для плотностей. Из теоремы 3 получаем

Следствие 5. В сформулированных выше предположениях справедливо неравенство $B_n \Delta_n(\lambda) \leq c \lambda r_n$.

Доказательство легко получить, используя (6) и (7). Мы его не приводим, поскольку в данных условиях справедлива более сильная оценка для плотностей сумм:

$$\left| B_n p(S_n, x) - \varphi\left(\frac{x - \mathbf{E}S_n}{B_n}\right) \right| \leq c r_n. \quad (28)$$

Неравенство (28) с точным значением $c = 51.45$ доказано Т. Л. Шервашидзе [18, теорема 4] при несущественном дополнительном условии $r_n \leq \sqrt{\frac{5}{12}}$. Покажем, что это условие можно опустить. Действительно, если оно не выполняется, то

$$\sup_x p(S_n, x) \leq \min_{1 \leq k \leq n} \sup_x p(\xi_k, x) = \frac{1}{\max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k} < \frac{1}{\sqrt{5} B_n}$$

и неравенство (28) для таких r_n справедливо.

4.6. В приведенных следствиях условия на структуру слагаемых обеспечивались преимущественно выполнением условия Крамера или ограничениями на плотности абсолютно непрерывной компоненты. В случае дискретных или сингулярных распределений дать простые оценки $\Delta_n(\lambda)$ для достаточно широких классов последовательностей затруднительно. Проиллюстрируем возможность применения общих теорем в этом случае на примерах.

Пример 1. ξ_k имеют общее распределение F с конечным третьим моментом (тогда $G_n = \Phi$). Если существуют рациональное число

$\alpha \neq 0$ и иррациональное алгебраическое число β степени $m \geq 2$ такие, что $P\{\xi_1^* = \alpha\} P\{\xi_1^* = \beta\} > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{c(F)\lambda}{n} + \frac{c(F, \varepsilon)}{n^{1-\varepsilon}}. \quad (29)$$

Отметим, что использование нерешетчатости распределения слагаемых позволило здесь усилить общую оценку (4).

Для проверки (29) потребуются неравенства (8) и (9). Докажем их. Для определенности можно считать $0 < \beta < \alpha$. В наших условиях имеем

$$\begin{aligned} H(\xi, d) &\geq c(F) (\langle \alpha d \rangle^2 + \langle \beta d \rangle^2) \geq c(F) (\langle \alpha d \rangle + \langle \beta d \rangle)^2 \\ &= c(F) (|\alpha d - s| + |\beta d - k|)^2 = c(F) d^2 \left(\left| \alpha - \frac{s}{d} \right| + \left| \beta - \frac{k}{d} \right| \right)^2, \end{aligned}$$

где $s, k \in \mathbb{N}$, причем $s = s(\alpha, d) \sim \alpha d$, $k \sim \beta d$ при $d \rightarrow \infty$. Покажем, что при достаточно больших d ($d \geq d_0 = d_0(F)$)

$$H(\xi, d) \geq c(F) d^2 \left(\beta - \frac{k}{s} \alpha \right)^2. \quad (30)$$

Пусть $|\alpha - s/d| \leq |\beta - (k/s)\alpha|$, иначе неравенство (30) очевидно. Поскольку $k/s \rightarrow \beta/\alpha < 1$ при $d \rightarrow \infty$, то для d достаточно больших

$$\begin{aligned} H(\xi, d) &\geq c(F) d^2 \left(\left| \alpha - \frac{s}{d} \right| + \left| \beta - \frac{k}{s} \alpha + \frac{k}{s} \left(\alpha - \frac{s}{d} \right) \right| \right)^2 \\ &\geq c(F) d^2 \left(\left| \alpha - \frac{s}{d} \right| + \left| \beta - \frac{k}{s} \alpha \right| - \frac{k}{s} \left| \alpha - \frac{s}{d} \right| \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует (30).

Из (30) в силу теоремы Лиувилля о приближении алгебраических чисел, уточненной К. Ротом [19], получаем $H(\xi, d) \geq c(F, \tau) d^2 s^{-2\tau}$, где $\tau = 2$ при $m = 2$, $\tau > 2$ при $m > 2$. Учитывая, что $s \sim \alpha d$ при $d \rightarrow \infty$, заключаем, что существует такое $d_0 = d_0(F)$, что для $d \geq d_0$ и любого $\tau > 2$ при $m > 2$ и $\tau = 2$ при $m = 2$

$$H(\xi, d) \geq c(F, \tau) d^{2-2\tau}. \quad (31)$$

В силу непрерывности $H(\xi, d)$ и нерешетчатости F для любого $\delta > 0$

$$\inf_{\delta \leq d \leq d_0} H(\xi, d) = c(F, \delta, d_0) > 0.$$

Отсюда и из (31) следуют неравенства (8) и (9).

Выведем оценку (29) из (13). Как и в следствии 1, условие А здесь выполнено с постоянным M . Очевидно, корень θ_n^* уравнения

$$\theta = \exp \left\{ -n \inf_{1/(2M) \leq d \leq 1/(\theta M)} H(\xi_1, d) \right\}$$

в силу (8) и (9) не превосходит корня уравнения

$$\theta = \exp \{ -c(F, \nu) n \theta^\nu \}, \quad \nu > 2,$$

а в силу элементарного неравенства $e^{-x} \leq (u/e)^u x^{-u}$ для $x > 0$, $u > 0$ последний корень не превосходит корня уравнения

$$\theta = c(F, \nu, u) n^{-u} \theta^{-\nu u},$$

т.е. $\theta_n^* \leq c(F, \nu, u) n^{-u/(1+\nu u)}$. Выбирая u достаточно большим, а ν достаточно близким к двум, получаем для любого $\varepsilon > 0$ $\theta_n^* \leq c(F, \varepsilon) n^{-(1/2-\varepsilon)}$. Значения B_n и L_n указаны в следствии 1. Теперь неравенство (29) следует из (13).

Пример 2. ξ_k имеют общее сингулярное распределение на $[0, 1]$, построенное с помощью канторовского совершенного множества [20, с. 21]. Тогда

$$\Delta_n(\lambda) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{n}} + \lambda^{c_1} \exp(-c_0 n) \right], \quad (32)$$

где $c_1 = \log_3 2$, $c_0 = (2\pi^2)^{-1} (1 - \exp(-\frac{1}{9}))$.

Нетрудно показать, что в данном примере $Q(\xi_1, \lambda) \leq 2\lambda^{c_1}$,

$$H(\xi_1, d) \geq \frac{1}{2\pi^2} (1 - \exp(-d^2)) \quad \text{для } d \leq 1,$$

$$H(\xi_1, d) \geq \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{9}\right) \right) \quad \text{для } d \geq 1.$$

Поэтому (32) вытекает из теоремы 3. Отметим, что из теоремы 2 в данном случае получаются более грубые оценки в смысле зависимости от λ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L. A. A local limit theorem. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, № 1, p. 419–423.
2. Stone C. J. A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 546–551.
3. Мушин А. Б. Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 2, с. 360–366.
4. Мушин А. Б. Связь между локальными и интегральной предельными теоремами. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 1, с. 96–110.

5. *von Bahr B.* Multi-dimensional integral limit theorems. — *Ark. Mat.*, 1967, v. 7, № 6, p. 71–88.
6. *Сенатов В. В.* Об одной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — В сб.: *Вероятностные распределения и математическая статистика*. Ташкент: Фан, 1986, с. 421–435.
7. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
8. *Володин Н. А.* Оценки в слабой форме локальной предельной теоремы для случая устойчивого распределения. — В сб.: *Предельные теоремы и математическая статистика*. Ташкент: Фан, 1976, с. 32–36.
9. *Ларин Ю. В.* Об оценке скорости сходимости в локальной предельной теореме для областей. — *Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем.*, 1986, № 2, с. 23–28.
10. *Ларин Ю. В.* Аппроксимация распределений сумм независимых случайных векторов на ограниченных множествах. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Ташкент: Ин-т матем. АН УзССР, 1989.
11. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
12. *Macht W., Wolf W.* The local limit problem and Holder-continuity. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1989, v. 82, № 2, p. 295–305.
13. *Мухин А. Б.* Сглаживание распределений сумм независимых случайных величин. Деп. ВИНТИ, № 2861-B88, 1988, 51 с.
14. *Статулявичус В. А.* Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1965, т. X, в. 4, с. 645–659.
15. *Бхаттачария Р. Н., Рао Р. Ранга.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
16. *Мухин А. Б.* Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, в. 4, с. 660–674.
17. *Прозоров Ю. В.* Об одной локальной теореме. — В сб.: *Предельные теоремы теории вероятностей*. Ташкент: Фан, 1963, с. 75–80.
18. *Шервашидзе Т. Л.* О равномерной оценке скорости сходимости в многомерной локальной предельной теореме для плотностей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971, т. XVI, в. 4, с. 765–767.
19. *Roth K. F.* Rational approximation to algebraic number. — *Mathematics*, 1955, v. 2, p. 1–20.
20. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979, 424 с.

Поступила в редакцию
8.VII.1996