Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Салихов, Об абсолютном критерии значимости для полиномиального распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 731–746

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:34:29

© 1997 г.

САЛИХОВ Н. П.*

ОБ АБСОЛЮТНОМ КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ ДЛЯ
ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Найдены верхние оценки для суммы вероятностей всех тех событий $(x_1, \dots, x_r)$, где x_k — частота k -го исхода при n независимых испытаниях по полиномиальной схеме испытаний с r возможными исходами, вероятность каждого из которых не превосходит вероятности события, наблюдаемого при n независимых испытаниях по той же схеме. На этой основе построен критерий отклонения полиномиальной схемы при известных вероятностях исходов.

Ключевые слова и фразы: полиномиальная схема испытаний, абсолютный критерий значимости, расстояние Кульбака–Лейблера, состоятельность критерия при простой альтернативе, выпуклое программирование.

1. Введение. Рассмотрим полиномиальную схему $H(\mathbf{p})$ независимых испытаний, в которой $r \geq 2$ различных исходов появляются с положительными вероятностями $p_1, \dots, p_r$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) > (0, \dots, 0)$, $p_1 + \dots + p_r = 1$. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ — событие, состоящее в том, что при n испытаниях k -й исход появился n_k раз, $n_1 + \dots + n_r = n$, $\Omega(n, r)$ — множество всех возможных событий $\mathbf{n}$. Упорядочим все $N = C_{n+r-1}^n = |\Omega(n, r)|$ событий $\mathbf{n}$ в порядке невозрастания вероятностей

$$P(\mathbf{n}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}; \quad P(\mathbf{n}_1) \geq \dots \geq P(\mathbf{n}_N).$$

Гипотезу $H(\mathbf{p}, \mathbf{n})$, состоящую в том, что событие $\mathbf{n} \in \Omega(n, r)$ появилось в результате n независимых испытаний по схеме $H(\mathbf{p})$, естественно отклонить, когда сумма $P_{\mathbf{n}}$ вероятностей всех событий $\mathbf{n}_t$, каждое из которых имеет вероятность не большую, чем вероятность наблюдаемого события $\mathbf{n}$, не превосходит малого числа $\varepsilon_n \in (0, 1)$:

$$P_{\mathbf{n}} = \sum_{P(\mathbf{n}_t) \leq P(\mathbf{n})} P(\mathbf{n}_t) \leq \varepsilon_n. \quad (1)$$

Такой в некотором смысле идеальный критерий значимости был введен К. Пирсоном в 1900 году. Он является примером абсолютного критерия значимости простой гипотезы (см. [1, с. 33]).

*ФАПСИ, Б. Кисельный пер., 4, 103031 Москва, Россия.

Нашей целью будет разработка способов вычисления по наблюдаемому событию $\mathbf{n}$ верхней оценки вероятности P_n .

В п. 2 для наблюдаемого $\mathbf{n}$ определена статистика λ_n и предложен критерий: гипотеза $H(\mathbf{p}, \mathbf{n})$ отклоняется, если статистика λ_n удовлетворяет неравенствам $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \geq n^{-1}(\ln f(n, r, \mathbf{p}, \lambda_n) - \ln \varepsilon_n)$, где $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda)$ — некоторая функция. При отклонении гипотезы $H(\mathbf{p}, \mathbf{n})$ этим критерием для наблюдаемого $\mathbf{n}$ выполняется оценка (1). Пункт 3 посвящен описанию множества событий $\mathbf{n}$, для которых $\lambda_n > 0$. В п. 4 предложены варианты функции $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda)$. В п. 5 полученные в пп. 2, 4 оценки вида (1) сравниваются между собой и с известными асимптотическими оценками вероятности P_n . В п. 6 показана состоятельность критерия п. 2 при альтернативной гипотезе $H(\mathbf{q}, \mathbf{n})$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$.

Далее будут использоваться следующие обозначения. В формулах будем полагать $a \ln b = 0$, $a^b = 1$ при $a = b = 0$. Для наблюдаемого события $\mathbf{n}$ и для любого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(n, r)$ определим векторы относительных частот:

$$\underline{n} = (\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r) = \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_r}{n} \right), \quad \underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r) = \left(\frac{x_1}{n}, \dots, \frac{x_r}{n} \right).$$

Введем следующие величины, функции и множества: $I(A)$ — индикатор события A ; $s = \min(n, r)$, $p = \min_{1 \leq i \leq r} p_i$;

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^r a_k \ln \left(\frac{a_k}{b_k} \right)$$

— расстояние Кульбака–Лейблера от $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \geq (0, \dots, 0)$ до $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) > (0, \dots, 0)$; $L(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $L(t) = t^t(t!)^{-1}$, $\varphi(t) = t - \ln L(t)$ для натуральных t ,

$$M(n, r) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega(n, r)} \sum_{k=1}^r \varphi(x_k);$$

$$\Omega(\mathbf{p}, \lambda) = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(n, r) : I(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{p}) \geq \lambda \},$$

$$\omega(n, r) = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(n, r) : x_1 \geq 1, \dots, x_r \geq 1 \}.$$

2. Верхняя оценка вероятности P_n .

Теорема 1. Пусть функция $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda)$ удовлетворяет при каждом $\lambda > 0$ неравенству

$$\Sigma(\lambda) = (L(n))^{-1} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{p}, \lambda)} \prod_{k=1}^r L(x_k) \leq f(n, r, \mathbf{p}, \lambda), \quad (*)$$

а статистика $\lambda_n = I(\underline{\mathbf{n}}, \mathbf{p}) - n^{-1}(M(n, r) - \sum_{k=1}^r \varphi(n_k))$ удовлетворяет неравенствам $\lambda_n > 0$,

$$\lambda_n \geq n^{-1}(\ln f(n, r, \mathbf{p}, \lambda_n) - \ln \varepsilon_n) \quad (2)$$

при некотором $\varepsilon_n \in (0, 1)$. Тогда

$$P_n \leq f(n, r, p, \lambda_n) \exp(-n\lambda_n) \leq \varepsilon_n.$$

Доказательство. Неравенство $P(\mathbf{x}) \leq P(\mathbf{n})$ при $\mathbf{x}, \mathbf{n} \in \Omega(n, r)$ равносильно неравенству

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq I(\mathbf{n}, \mathbf{p}) - n^{-1} \left(\sum_{k=1}^r \varphi(x_k) - \sum_{k=1}^r \varphi(n_k) \right).$$

Следовательно, $P_n \leq \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(p, \lambda_n)} P(\mathbf{x})$. Используя известное тождество

$$P(\mathbf{x}) = (L(n))^{-1} \prod_{k=1}^r L(x_k) \exp(-nI(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$$

(см., например, [2]), найдем, что

$$P_n \leq \Sigma(\lambda_n) \exp(-n\lambda_n) \leq f(n, r, p, \lambda_n) \exp(-n\lambda_n).$$

Равносильность неравенства $f(n, r, p, \lambda_n) \exp(-n\lambda_n) \leq \varepsilon_n$ неравенству (2) доказывает теорему.

Вычислим величину $M(n, r)$, входящую в выражение для λ_n .

Теорема 2. Если $n \leq r$, то $M(n, r) = n$; если $n \geq r$, то $M(n, r) = r\varphi(m) + (n - rm)(1 - m \ln(1 + m^{-1}))$, где $m = [n/r]$.

Доказательство. Докажем, что $\max_{\mathbf{x} \in \Omega(n, r)} \sum_{k=1}^r \varphi(x_k) = M(n, r)$ достигается в таких точках $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(n, r)$, для которых $\max_{1 \leq k \leq r} x_k - \min_{1 \leq k \leq r} x_k \leq 1$. В противном случае пусть этот максимум достигается в точке $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(n, r)$, в которой $x_i = a$, $x_j = b$, причем $a \geq b + 2$. Рассмотрим точку $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$, в которой $y_i = a - 1$, $y_j = b + 1$, остальные координаты $y_t = x_t$. Тогда неравенство

$$\sum_{k=1}^r \varphi(y_k) > \sum_{k=1}^r \varphi(x_k) \quad (3)$$

равносильно неравенству $(1 + (a - 1)^{-1})^{a-1} > 1$ при $b = 0$ и неравенству $(1 + (a - 1)^{-1})^{a-1} > (1 + b^{-1})^b$ при $b \geq 1$. Так как функция $(1 + x^{-1})^x$ возрастает с ростом x при $x > 0$, то неравенство (3) доказано. Таким образом, $\max_{\mathbf{x} \in \Omega(n, r)} \sum_{k=1}^r \varphi(x_k)$ может достигаться лишь на множестве таких точек $\mathbf{x} \in \Omega(n, r)$, что $\max_{1 \leq k \leq r} x_k - \min_{1 \leq k \leq r} x_k \leq 1$. Если $n \leq r$, то указанные точки имеют n координат $x_i = 1$ и $r - n$ координат $x_i = 0$. Для таких точек $\sum_{k=1}^r \varphi(x_k) = n\varphi(1) = n = M(n, r)$. Если $n \geq r$, то указанные точки имеют $n - rm$ координат $x_i = m + 1$ и $r - (n - rm)$ координат $x_i = m$. Для таких точек

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \varphi(x_k) &= (n - rm) \varphi(m + 1) + (r - n + rm) \varphi(m) \\ &= r\varphi(m) + (n - rm) (1 - m \ln(1 + m^{-1})) = M(n, r). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. С использованием неравенств для факториала из [3, с. 73] получаются оценки

$$\begin{aligned}(12t+1)^{-1} &< \varphi(t) - \ln(\sqrt{2\pi t}) < (12t)^{-1}, \\ 0 &\leq I(\underline{n}, \mathbf{p}) - \lambda_n \leq h(\mathbf{n}), \\ h(\mathbf{n}) &= n^{-1} \left(c_n - \sum_{k=1}^r \left(\ln(\sqrt{2\pi n_k}) + (12n_k + 1)^{-1} \right) \right),\end{aligned}$$

где $c_n = n$ при $n \leq r$, $c_n = r(\ln(\sqrt{2\pi m}) + (12m)^{-1}) + (n - rm) \times (1 - m \ln(1 + m^{-1}))$, $m = [n/r]$ при $n > r$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I(\underline{n}, \mathbf{p}) - \lambda_n) = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Если функция $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda)$ не возрастает с ростом λ при $\lambda > 0$, то утверждение теоремы 1 справедливо для любой нижней оценки статистики λ_n . В частности, можно заменить λ_n величиной $I(\underline{n}, \mathbf{p}) - h(\mathbf{n})$.

3. О возможности применения теоремы 1. Найдем, для каких событий $\mathbf{n}$ выполняется условие $\lambda_n > 0$ теоремы 1. Неравенство $\lambda_n > 0$ равносильно неравенству

$$n + \sum_{k=1}^r \ln(n_k!) - \sum_{k=1}^r n_k \ln(np_k) - M(n, r) > 0,$$

которое с учетом теоремы 2 преобразуется к неравенствам:

$$P(\mathbf{n}) < \begin{cases} \frac{n!}{(1!)^n} \left(\frac{1}{n} \right)^n, & \text{если } n < r, \\ \frac{n!}{(m!)^r} \left(\frac{1}{r} \right)^n, & \text{если } n = mr, \\ \frac{n!}{((m+1)!)^k (m!)^{r-k}} \left(\frac{1}{r} \right)^n \theta_n, & \text{если } n = mr + k, 1 \leq k < r, \end{cases}$$

где $\theta_n = (rm)^{m(r-k)} (rm + r)^{k(m+1)} / n^n$. Полагая $y = n/(r-k) > z = (n-k)/r$, найдем, что

$$\theta_n = \left(\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{-z} \right)^{r-k} > 1.$$

Таким образом, неравенство $\lambda_n > 0$ выполняется по крайней мере для таких событий $\mathbf{n}$, вероятность $P(\mathbf{n})$ которых меньше максимальной вероятности n независимых испытаний по полиномиальной схеме с s равновероятными исходами. Множество таких $\mathbf{n}$ не пусто, так как содержит

событие, в котором исход с вероятностью p встречается n раз. Если $p_1 = \dots = p_r = 1/r$, то $\lambda_n > 0$ всегда за исключением случая, когда $n = rm$ (при этом $\lambda_n = n^{-1}(\sum_{k=1}^r \ln(n_k!) - r \ln m!)$) и $n_1 = \dots = n_r = m$.

4. Варианты функций $f(n, r, p, \lambda)$.

Лемма 1. Пусть k, n — натуральные числа, $n \geq k$ и функция $g(x)$ выпукла на $[1, n - k + 1]$ (при $n > k$).

Тогда при любом $x = (x_1, \dots, x_k) \in \omega(n, k)$

$$kg\left(\frac{n}{k}\right) \leq \sum_{t=1}^k g(x_t) \leq g(n - k + 1) + (k - 1)g(1).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n > k > 1$. Нижняя оценка следует из неравенства Йенсена. График функции $g(x)$ на $[1, n - k + 1]$ не проходит выше прямой, соединяющей точки $(1, g(1))$, $(n - k + 1, g(n - k + 1))$. Следовательно,

$$g(x_i) \leq \frac{n - k + 1 - x_i}{n - k} g(1) + \frac{x_i - 1}{n - k} g(n - k + 1)$$

для $i = 1, \dots, k$. Суммируя эти неравенства, получим верхнюю оценку.

Теорема 3. Условию (*) теоремы 1 удовлетворяют функции

$$f(n, r, p, \lambda) = r \left(\frac{n+r}{n+1} \right)^{n-1}, \quad \text{если } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f(n, r, p, \lambda) = \left(\frac{n+r}{r} \right)^{r-1}, \quad \text{если } n \geq \frac{r}{w},$$

$$f(n, r, p, \lambda) = \frac{r}{n+r} \left(\frac{n+r}{n} h \right)^n, \quad \text{если } 4 \leq n < \frac{r}{w},$$

где $w = 0.25500097\dots$ — единственный на интервале $(0, 1)$ корень уравнения $(x+1) \ln(1+x^{-1}) = 2$,

$$h = (w+1)^{w-1} w^{-w} = 1.196307\dots$$

Доказательство. Оценим сверху величину

$$\Sigma(0) = (L(n))^{-1} \Sigma, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{x \in \Omega(n, r)} \prod_{t=1}^r L(x_t) = \sum_{y \in \omega(n+r, r)} \prod_{t=1}^r \frac{(y_t - 1)^{y_t - 1}}{(y_t - 1)!} \\ &= \sum_{y \in \omega(n+r, r)} \prod_{t=1}^r \frac{y_t^{y_t - 1}}{y_t!} \Pi_r(y), \quad \Pi_r(y) = \prod_{t=1}^r y_t \left(\frac{y_t - 1}{y_t} \right)^{y_t - 1}. \end{aligned}$$

Оценим сверху величину $\Pi_r(\mathbf{y})$ на множестве $\omega(n+r, r)$. Рассмотрим точки $\mathbf{y} \in \omega(n+r, r)$, в которых $r-k$ координат $y_i = 1$, k координат $y_i \geq 2$, $k \in \{1, \dots, s\}$. На таких точках $\Pi_r(\mathbf{y}) = \Pi_k(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $x_1 + \dots + x_k = n+k$, $x_1 \geq 2, \dots, x_k \geq 2$. Из представления $\Pi_k(\mathbf{x}) = \exp(-\sum_{i=1}^k g(z_i))$, где $z_i = x_i - 1$ для $i = 1, \dots, k$, $g(x) = (x-1) \ln(x+1) - x \ln x$, и леммы 1 следует, что

$$\Pi_k(\mathbf{x}) \leq \exp\left(-kg\left(\frac{n}{k}\right)\right) = \left(\frac{n+k}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n+k}\right)^n = q(k).$$

Положим $q = \max_{1 \leq k \leq s} q(k)$. Так как функция $q(k)$ имеет на $(0, n]$ единственный максимум в точке wn , то

$$\begin{aligned} q &= q(1) = (n+1)^{1-n} n^n, & \text{если } 1 \leq n \leq 3, \\ q &= q(r) = \left(\frac{n+r}{r}\right)^r \left(\frac{n}{n+r}\right)^n, & \text{если } n \geq \frac{r}{w}, \\ q &= q(wn) = h^n, & \text{если } 4 \leq n < \frac{r}{w}. \end{aligned}$$

Используя известное тождество

$$\sum_{\mathbf{y} \in \omega(n+r, r)} \prod_{t=1}^r \frac{y_t^{y_t-1}}{y_t!} = r \frac{(n+r)^{n-1}}{n!}$$

(см. [4, с. 181], [5, с. 48]), получаем из (4) оценку

$$\Sigma(0) \leq \frac{n!}{n^n} q r \frac{(n+r)^{n-1}}{n!} = q r \frac{(n+r)^{n-1}}{n^n},$$

что с учетом формул для q доказывает теорему.

Теоремы 1, 3 дают возможность получить верхнюю оценку для величины $P_n \exp(n\lambda_n)$, не зависящую от $\mathbf{p}, \lambda$. Найдем верхние оценки для этой величины, зависящие от $\mathbf{p}, \lambda$.

Рассмотрим случай, когда $r = 2$, $p = p_1 \leq p_2 = 1 - p$. Пусть $I(x, p) = x \ln(x/p) + (1-x) \ln((1-x)/(1-p))$. Тогда

$$P_n \leq \sum_{I(k/n, p) \geq \lambda_n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Отсюда с использованием оценок для биномиальных сумм из [6, с. 300–301], получим:

$$\begin{aligned} P_n &\leq \sum_{k=n\beta}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leq \frac{1-p}{\beta-p} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi(1-\beta)n}} \exp(-nI(\beta, p)) \\ &\leq \frac{1-p}{\beta-p} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-n\lambda_n), \end{aligned}$$

если $-\ln(1-p) < \lambda_n \leq -\ln p$,

$$\begin{aligned} P_n &\leq \sum_{k=0}^{n\alpha} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=n\beta}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &\leq \frac{p}{p-\alpha} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi\alpha n}} \exp(-nI(\alpha, p)) \\ &\quad + \frac{1-p}{\beta-p} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi(1-\beta)n}} \exp(-nI(\beta, p)) \\ &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{1-p}{\beta-p} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-n\lambda_n), \end{aligned}$$

если $0 < \lambda_n \leq -\ln(1-p)$, где $n\alpha = [n\theta_1]$, $n\beta$ — ближайшее целое число не меньшее $n\theta_2$, θ_1, θ_2 — корни уравнения $I(x, p) = \lambda_n$, $\theta_1 < p < \theta_2$. Этот метод (дающий асимптотически наилучшую оценку, см. п. 5) не удалось обобщить на случай $r > 2$. Вместо этого укажем один метод получения в теореме 1 оценок $f(n, r, p, \lambda)$ величины $\Sigma(\lambda)$, зависящих от всех четырех аргументов, который при малых λ_n ухудшает асимптотическую оценку в Cn раз (константа C неизвестна).

Лемма 2. Для величины $T(n, k) = \sum_{x \in \omega(n, k)} \prod_{i=1}^k x_i^{-1/2}$ верна оценка $T(n, k) < \pi(2\sqrt{n-k+1}-1)^{k-2}$, если $n \geq k \geq 2$.

Доказательство. При $k = n$ имеем $T(n, n) = 1 < \pi$. При $n = 2m \geq 4$

$$\begin{aligned} 2^{-1}T(n, 2) &= \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m-1} (i(n-i))^{-1/2} \\ &\leq \frac{1}{n} + (n-1)^{-1/2} + \int_1^{m-1} (x(n-x))^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{n} + (n-1)^{-1/2} + \arcsin\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

При $n = 2m + 1 \geq 3$ аналогично имеем

$$\begin{aligned} 2^{-1}T(n, 2) &= \sum_{i=1}^m (i(n-i))^{-1/2} \leq (n-1)^{-1/2} + \int_1^m (x(n-x))^{-1/2} dx \\ &= (n-1)^{-1/2} + \arcsin\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Из этих формул с учетом неравенства $x - \arcsin(2x) < 0$ при $x \in (0, \frac{1}{4}]$ и возрастания функции $(x-1)^{-1/2} + \arcsin(1-2/x)$ при $x > 2$ следует оценка $T(n, 2) < 2(n-1)^{-1/2} + 2\arcsin(1-2/n) \leq 2\arcsin 1 = \pi$. Пусть

доказано, что $T(n, m) < \pi(2\sqrt{n-m+1}-1)^{m-2}$ при некотором $m \geq 2$ и всех $n \geq m$. Тогда при $n \geq m+1$

$$\begin{aligned} T(n, m+1) &= \sum_{i=1}^{n-m} i^{-1/2} T(n-i, m) \\ &< \pi \sum_{i=1}^{n-m} i^{-1/2} (2\sqrt{n-i-m+1}-1)^{m-2} \\ &\leq \pi (2\sqrt{n-m}-1)^{m-2} \sum_{i=1}^{n-m} i^{-1/2} \\ &\leq \pi (2\sqrt{n-m}-1)^{m-2} \left(1 + \int_1^{n-m} x^{-1/2} dx \right) \\ &= \pi (2\sqrt{n-m}-1)^{m-1}, \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть $k \in \{1, \dots, s\}$, величина $\lambda > \gamma_k = n^{-1}(n-k+1) \ln(n-k+1) - \ln(np)$, натуральные $i_1, \dots, i_k$ таковы, что $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$. Тогда каждое из C_r^k множеств

$$\Omega(p, \lambda, i_1, \dots, i_k) = \{x = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega(p, \lambda): (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \omega(n, k)\}$$

пусто.

Доказательство. Пусть $\Omega(p, \lambda, i_1, \dots, i_k)$ не пусто. Тогда при некотором $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \omega(n, k)$ имеем:

$$\sum_{i=1}^k \underline{x}_{i_i} \ln(p^{-1} \underline{x}_{i_i}) \geq \lambda, \quad \sum_{i=1}^k x_{i_i} \ln(x_{i_i}) \geq n(\lambda + \ln(np)).$$

Применяя лемму 1, получим отсюда неравенства

$$(n-k+1) \ln(n-k+1) \geq n(\lambda + \ln(np)), \quad \lambda \leq \gamma_k.$$

Заметим, что $0 \leq \gamma_s < \gamma_{s-1} < \dots < \gamma_2 < \gamma_1 = -\ln p$, при этом $\gamma_s = 0$ только в случае $n = r$, $p = 1/r$. Действительно, если $n < r$, то $s = n$, $\gamma_s = \gamma_n = -\ln(np) > 0$. Если же $n \geq r$, то $s = r$, $\gamma_s = \gamma_r = \gamma(n)$, где

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= x^{-1}(x-r+1) \ln(x-r+1) - \ln(xp), \\ \gamma'(x) &= x^{-2}(r-1) \ln(x-r+1) > 0 \quad \text{для } x > r. \end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma_r > \gamma(r) = -\ln(rp) \geq 0$ при $n > r$, $\gamma_r = \gamma(r) > 0$, при $n = r$, $p < 1/r$. Заметим также, что при $\lambda > \gamma_1$ множество $\Omega(p, \lambda)$ пусто.

Теорема 4. Пусть при некотором $\sigma \in \{1, \dots, s\}$ либо $\gamma_{\sigma+1} < \lambda \leq \gamma_\sigma$, если $\sigma \neq s$, либо $0 \leq \lambda \leq \gamma_s$, если $\sigma = s$.

Тогда условию (*) теоремы 1 удовлетворяют функции

$$f(n, r, \mathbf{p}, \lambda) = \rho = \sum_{i=1}^r I(\lambda \leq -\ln p_i), \quad \text{если } \sigma = 1,$$

$$f(n, r, \mathbf{p}, \lambda) = \rho + \frac{n!e^n}{n^n} \left(\frac{r(r-1)}{4} \exp \left(-\frac{2}{6n+1} \right) + \pi b_n \right),$$

если $\sigma \geq 2$,

где $b_n = 0$, если $\sigma = 2$,

$$b_n = y_n \frac{(2\sqrt{n-1}-1)^3}{(2\sqrt{n-2}-1)^5} Q(n, r, \sigma),$$

$$Q(n, r, \sigma) = \sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k g_n^k, \quad g_n = \frac{z_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2\sqrt{n-2}-1)^2}{2\sqrt{n-1}-1},$$

$$y_n = \exp \left(\frac{12n}{(6n+1)(4n+1)} \right),$$

$$z_n = \exp \left(-\frac{10n+1}{(6n+1)(4n+1)} \right), \quad \text{если } \sigma \geq 3.$$

Доказательство. Аналогично формуле (4) получим

$$\Sigma(\lambda) = (L(n))^{-1} \Sigma_1(\lambda), \quad (5)$$

где

$$\Sigma_1(\lambda) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{p}, \lambda)} \prod_{i=1}^{\tau} L(x_i).$$

Представляя $\Omega(\mathbf{p}, \lambda)$ в виде суммы $C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^s$ попарно непересекающихся множеств $\Omega(\mathbf{p}, \lambda, i_1, \dots, i_k)$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$, $k \in \{1, \dots, s\}$) и замечая, что по лемме 3 $\Omega(\mathbf{p}, \lambda, i_1)$ пусто, когда $-\ln p_{i_1} < \lambda$, а $\Omega(\mathbf{p}, \lambda, i_1, \dots, i_k)$ пусто, когда $k \geq \sigma+1$, $\sigma \neq s$, получим: $\Sigma_1(\lambda) = \rho L(n)$, если $\sigma = 1$,

$$\Sigma_1(\lambda) = \rho L(n) + \sum_{k=2}^{\sigma} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{p}, \lambda, i_1, \dots, i_k)} \prod_{i=1}^{\tau} L(x_i),$$

если $\sigma \geq 2$. Используя оценку $n! \geq \sqrt{2\pi n} (n/e)^n \exp(1/(12n+1))$ ([3, с. 73]), получим при $\sigma \geq 2$ оценку

$$\Sigma_1(\lambda) \leq \rho L(n) + e^n \sum_{k=2}^{\sigma} C_r^k g_n^k \sum_{\mathbf{x} \in \omega(n, k)} (x_1 \times \dots \times x_k)^{-1/2} \exp \left(-\sum_{i=1}^k \frac{1}{12x_i + 1} \right),$$

где $g = 1/\sqrt{2\pi}$. Применяя лемму 1 к функции $(12x + 1)^{-1}$, получим оценку

$$\Sigma_1(\lambda) \leq \rho L(n) + e^n \sum_{k=2}^{\sigma} C_r^k g^k \exp\left(-\frac{k^2}{12n+k}\right) T(n, k),$$

затем с помощью леммы 2 неравенство

$$\Sigma_1(\lambda) < \rho L(n) + \pi e^n \sum_{k=2}^{\sigma} C_r^k g^k \exp\left(-\frac{k^2}{12n+k}\right) (2\sqrt{n-k+1}-1)^{k-2}. \quad (6)$$

При $\sigma = 2$ отсюда следует оценка

$$\Sigma_1(\lambda) < \rho L(n) + e^n \frac{r(r-1)}{4} \exp\left(-\frac{2}{6n+1}\right). \quad (7)$$

Пусть $\sigma \geq 3$, $a_k = (2\sqrt{n-k+1}-1) \exp(-k^2/(12n+k))$. Тогда

$$\Sigma_1(\lambda) < \rho L(n) + e^n \frac{r(r-1)}{4} \exp\left(-\frac{2}{6n+1}\right) + \pi e^n \Sigma_2, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k g^k (2\sqrt{n-2}-1)^{k-3} a_k \\ &= a_2 \sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k g^k (2\sqrt{n-2}-1)^{k-3} \prod_{i=3}^k \left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right) \\ &\leq a_2 \sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k g^k (2\sqrt{n-2}-1)^{k-3} \mu^{k-2} \quad \text{при } \mu = \max_{3 \leq i \leq \sigma} \left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right). \end{aligned}$$

Итак, полагая $g_n = g(2\sqrt{n-2}-1)\mu$, получим оценку

$$\Sigma_2 \leq \frac{a_2}{\mu^2 (2\sqrt{n-2}-1)^3} \sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k g_n^k. \quad (9)$$

Докажем, что

$$\mu = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2\sqrt{n-2}-1}{2\sqrt{n-1}-1} z_n. \quad (10)$$

Это верно при $\sigma = 3$. При $\sigma > 3$ достаточно доказать, что $a_{k+1}/a_k < a_k/a_{k-1}$ для $k = 3, \dots, \sigma-1$, что равносильно неравенствам $\ln a_{k+1} + \ln a_{k-1} < 2 \ln a_k$ для $k = 3, \dots, \sigma-1$. Так как $a_k = f_1(k) f_2(k)$, где $f_1(k) = 2\sqrt{n-k+1}-1$, $f_2(k) = \exp(-k^2/(12n+k))$, то достаточно доказать неравенства $\ln f_i(k+1) + \ln f_i(k-1) < 2 \ln f_i(k)$ для $k = 3, \dots, \sigma-1$, $i = 1, 2$. Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенств

$(\ln f_i(x))'' < 0$ для $x \in [2, \sigma]$, $i = 1, 2$, что проверяется просто. Учитывая (10), найдем, что

$$\frac{a_2}{\mu^2(2\sqrt{n-2}-1)^3} = \frac{(2\sqrt{n-1}-1)^3}{(2\sqrt{n-2}-1)^5} y_n,$$

$$g_n = \frac{z_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2\sqrt{n-2}-1)^2}{2\sqrt{n-1}-1}$$

и затем из формул (5), (7)–(9) получим утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 3. Верна оценка

$$Q(n, r, \sigma) \leq \min(C_r^\sigma Q_{n,\sigma}, Q_{n,r}),$$

где

$$Q_{n,t} = (g_n + 1)^t - 2^{-1}t(t-1)g_n^2 - tg_n - 1.$$

Для доказательства достаточно учесть неравенство $C_r^k \leq C_r^\sigma C_\sigma^k$ при $k = 3, \dots, \sigma$.

З а м е ч а н и е 4. Учитывая (5), (6), получим при $\sigma \geq 3$ более точную верхнюю оценку суммы $\Sigma(\lambda)$, заменяя b_n величиной

$$\sum_{k=3}^{\sigma} C_r^k (\sqrt{2\pi})^{-k} \exp\left(-\frac{k^2}{12n+k}\right) (2\sqrt{n-k+1}-1)^{k-2}.$$

5. Сравнение оценок. Докажем, что при $n \geq 2$ оценка величины $\Sigma(0)$ теоремы 3 лучше оценки $\Sigma(0) \leq C_{n+r-1}^n$ (см. [2]). Случай $n = 2, 3$ и $n \geq r/w$ проверяются просто. Рассмотрим случай $4 \leq n < r/w$. Методом индукции по n с использованием равенства $C_{n+r+1}^r = C_{n+r}^r(r+n+1)/(n+1)$ легко доказать неравенство $C_{n+r}^r \geq ((n+r)b/n)^n$, если $n \geq 2$, $r \geq \max(2, an)$, $a > 0$, $0 < b \leq \min(\sqrt{\frac{3}{2}}, (1+2^{-1}a/(a+1))^2)$. Полагая $a = 0.25 < w$, $b = 1.21 > h$, убеждаемся, что при $4 \leq n < r/w$

$$C_{n+r}^r > \left(\frac{n+r}{n}h\right)^n, \quad C_{n+r-1}^n > \frac{r}{n+r} \left(\frac{n+r}{n}h\right)^n.$$

Приведем пример применения теоремы 3. Пусть в схеме с r равновероятными исходами после n испытаний, $4 \leq n \leq r$, произошло событие $(n_1, \dots, n_r)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^r I(n_k \geq t) = \nu,$$

где t натуральное. Тогда

$$\lambda_n = \ln \left(\frac{r}{n} \right) + n^{-1} \sum_{k=1}^r \ln(n_k!),$$

$$P_n \leq \frac{r}{n+r} \left(\frac{n+r}{n} h \right)^n \exp(-n\lambda_n) \leq \frac{r}{n+r} \left(\frac{n+r}{r} h \right)^n (t!)^{-\nu}.$$

Например, при $r = 150$, $n = 100$, $t = 4$, $\nu = 25$ (т.е. частоты 25 исходов равны 4, остальные исходы не появились) получим:

$$P_n \leq \frac{3}{5} \left(\frac{5}{3} h (24)^{-1/4} \right)^{100} < 1.76 \cdot 10^{-5}.$$

Сравним оценки суммы $\Sigma(\lambda)$ из теорем 3, 4 при некоторых соотношениях между r, n, σ .

При фиксированном $\sigma \geq 3$ и при $n \rightarrow \infty$ для оценки теоремы 4 имеем

$$f(n, r, \mathbf{p}, \lambda) \leq r + \sqrt{2\pi n} \pi C_r^\sigma \left(\frac{2n}{\pi} \right)^{\sigma/2} \frac{1 + \alpha_n}{4n} + \frac{\sqrt{2\pi n}}{4} r(r-1),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Для всех n $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda) \leq r + \sqrt{2\pi n} r(r-1)/4$ при $\sigma = 2$, $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda) \leq r$ при $\sigma = 1$. Если $n \geq r/w$, то оценка теоремы 3 имеет вид $(n/r + 1)^{r-1}$ и, следовательно, хуже оценки теоремы 4 при фиксированном r и $n \rightarrow \infty$. Если $4 \leq n < r/w$, то оценка теоремы 3 имеет вид $(1+r/n)^n h^n r/(n+r) > (1+r/n)^n h^n w/(w+1)$ и, следовательно, хуже оценки теоремы 4 при фиксированном достаточно большом n , $\sigma \in \{1, \dots, n-1\}$ и при $r \rightarrow \infty$. Докажем, что оценка теоремы 3 лучше оценки теоремы 4, если $\sigma = n \geq 4$ и

$$r \geq n \frac{1 + A_{n,r}}{1 - A_{n,r}} - \frac{1}{1 - A_{n,r}}, \quad (11)$$

где

$$A_{n,r} = \sqrt{2\pi} h e^{-1} \frac{2\sqrt{n-1} - 1}{(2\sqrt{n-2} - 1)^2} D_{n,r},$$

$$D_{n,r} = \left(\kappa^{-1} \frac{r}{n+r} (2\sqrt{n-1} - 1)^{-3} (2\sqrt{n-2} - 1)^5 \right)^{1/n},$$

$\kappa = \pi \exp(-\frac{5}{12})$; $0 < A_{n,r} < 1$ при $n \geq 4$. При $n \geq 4$ неравенство $A_{n,r} < B_n = \sqrt{2\pi} h e^{-1} (2\sqrt{n-3} - 1)^{2/n-1}$ следует из вогнутости функции $\ln(2\sqrt{x-2} - 1)$ на $[3, \infty)$. Так как B_n убывает при $n \geq 4$ и $B_5 < 1$, то $A_{n,r} < B_n < 1$ при всех $n \geq 5$. Неравенство $A_{4,r} < 1$ проверяется вычислением.

Так как $r \geq n$, $\sigma = n \geq 4$, то для функции $f(n, r, p, \lambda)$ теоремы 4 верны оценки

$$\begin{aligned} f(n, r, p, \lambda) &> \pi \frac{n!e^n}{n^n} b_n > \pi \frac{n!e^n}{n^n} C_r^n g_n^n \\ &> \kappa \left(\frac{e(r-n+1)}{\sqrt{2\pi}n} \frac{(2\sqrt{n-2}-1)^2}{2\sqrt{n-1}-1} \right)^n \frac{(2\sqrt{n-1}-1)^3}{(2\sqrt{n-2}-1)^5} \end{aligned}$$

(используем оценки $n!C_r^n \geq (r-n+1)^n$, $z_n^n > \exp(-\frac{5}{12})$). Достаточно доказать, что

$$\frac{r}{n+r} \left(\frac{n+r}{n} h \right)^n \leq \kappa \left(\frac{e(r-n+1)}{\sqrt{2\pi}n} \frac{(2\sqrt{n-2}-1)^2}{2\sqrt{n-1}-1} \right)^n \frac{(2\sqrt{n-1}-1)^3}{(2\sqrt{n-2}-1)^5},$$

что равносильно неравенству (11).

Получение оценок вероятности P_n свелось к задаче оценивания вероятности Q_n события $I(\underline{x}, p) \geq \lambda_n$ (см. доказательство теоремы 1). Из теорем 3, 4 работы [7] следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n/R_n) = 1$$

при фиксированном r , где

$$R_n = R_{n,1} = (\lambda_n n)^{(r-3)/2} \left(\Gamma \left(\frac{r-1}{2} \right) \right)^{-1} \exp(-n\lambda_n),$$

если $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\lambda_n) = \infty$,

$$R_n = R_{n,2} = d_n n^{(r-3)/2} \exp(-n\lambda_n), \quad d_n \in [d, D]$$

при некоторых неизвестных положительных d, D , $d < D$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \quad \text{и} \quad \lambda \in \left(0, \frac{p}{2(1-p)} \right).$$

С учетом замечания 1 делаем вывод: при достаточно больших n с вероятностью, близкой к 1, величина λ_n близка к 0 при выполнении гипотезы $H(p, n)$ (поскольку в этом случае $\underline{n}$ сходится по вероятности к p) и близка к $\lambda = I(q, p)$ при выполнении гипотезы $H(q, n)$, $q = (q_1, \dots, q_r) > (0, \dots, 0)$, $q_1 + \dots + q_r = 1$, (поскольку в этом случае $\underline{n}$ сходится по вероятности к q). Таким образом, могут наступать ситуации:

$$Q_n \approx R_{n,1} \quad \text{при выполнении гипотезы } H(p, n),$$

$$Q_n \approx R_{n,2} \quad \text{при выполнении гипотезы } H(q, n).$$

Заметим, что $2^{-1}p/(1-p) < \gamma_r$ при всех достаточно больших n и фиксированном r . Действительно, последнее неравенство равносильно

неравенству

$$\frac{p}{2(1-p)} + \ln p < u_{n,r} = \ln(1 - (r-1)n^{-1}) - (r-1)n^{-1} \ln(n-r+1),$$

а $2^{-1}p/(1-p) + \ln p \leq (2(r-1))^{-1} - \ln r \leq \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$ при $0 < p \leq 1/r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,r} = 0$.

Таким образом, при достаточно больших n и когда либо λ_n близко к λ , $0 < \lambda = I(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < 2^{-1}p/(1-p)$, либо λ_n близко к 0 и величина $n\lambda_n$ достаточно велика, с помощью теоремы 4 получаем оценку

$$Q_n \leq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{r-3} n^{(r-1)/2} (1 + \alpha_{n,r}) \exp(-n\lambda_n),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,r} = 0$, а с помощью теорем 3, 4 работы [7] получаем оценку

$$Q_n \leq c_{n,r} n^{(r-3)/2} \exp(-n\lambda_n),$$

где $0 < c_1 \leq c_{n,r} \leq c_2 < \infty$ (c_1, c_2 неизвестны), которая при всех достаточно больших n лучше по крайней мере в Cn раз (константа C неизвестна).

6. Оценка вероятности ошибки второго рода при альтернативной гипотезе $H(\mathbf{q}, n)$. Докажем, что критерий (2) позволяет уверенно отклонять гипотезу $H(\mathbf{p}, n)$ при фиксированном r и достаточно больших n , когда на самом деле верна гипотеза $H(\mathbf{q}, n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_r) > (0, \dots, 0)$, $q_1 + \dots + q_r = 1$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln f(n, r, \mathbf{p}, \lambda_n) = 0$ (в частности, при $\varepsilon_n = \varepsilon > 0$, $f(n, r, \mathbf{p}, \lambda)$ из теорем 3, 4). При этих условиях с учетом замечания 1 критерий (2) можно представить в виде неравенства

$$I(\underline{n}, \mathbf{p}) \geq \delta_n = n^{-1} \left(\ln f(n, r, \mathbf{p}, \lambda_n) - \ln \varepsilon_n + M(n, r) - \sum_{k=1}^r \varphi(n_k) \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Теорема 5. Если верна гипотеза $H(\mathbf{q}, n)$, то для вероятности P события $I(\underline{n}, \mathbf{p}) < \delta$ при некотором $\delta \in (0, I(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ верна оценка

$$P \leq \exp(-nI(\mathbf{z}, \mathbf{q})),$$

где

$$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \neq \mathbf{q}, \quad z_k = p_k q_k^{1-\tau} \left(\sum_{i=1}^r p_i q_i^{1-\tau} \right)^{-1}$$

для $k = 1, \dots, r$, τ — единственный на $(0, 1)$ корень уравнения

$$F(t) = (t-1)f'(t) - f(t) - \delta = 0,$$

$$f(t) = \ln \sum_{i=1}^r p_i^t q_i^{1-t} \quad \text{для } t \in [0, 1].$$

Доказательство. Полагая

$$p_k(t) = p_k^t q_k^{1-t} \left(\sum_{i=1}^r p_i^t q_i^{1-t} \right)^{-1} \quad \text{при } t \in [0, 1],$$

получим

$$F'(t) = (t-1)f''(t),$$

$$f''(t) = \sum_{i=1}^r p_i(t) \left(\ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) - \sum_{k=1}^r p_k(t) \ln \left(\frac{p_k}{q_k} \right) \right)^2 > 0$$

для $t \in [0, 1]$, $F(0) = I(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \delta > 0$, $F(1) = -\delta < 0$. Отсюда следует утверждение о τ .

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{I(\mathbf{n}, \mathbf{p}) < \delta} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} q_1^{n_1} \dots q_r^{n_r} \\ &= \sum_{I(\mathbf{n}, \mathbf{p}) < \delta} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} z_1^{n_1} \dots z_r^{n_r} \exp \left(-n \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{n} \left(1 + \ln \frac{z_i}{q_i} \right) + n \right) \\ &\leq \exp \left(-n \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{u}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^r u_i \left(1 + \ln \frac{z_i}{q_i} \right) - 1, \\ U &= \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): u_1 \geq 0, \dots, u_r \geq 0, -\sum_{i=1}^r u_i + 1 \geq 0, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^r u_i - 1 \geq 0, -I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) + \delta \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1 - f(\tau)}{1 - \tau} > 0, \quad \beta_3 = \frac{\tau}{1 - \tau} > 0.$$

Точка $\mathbf{z}$ удовлетворяет следующей системе неравенств и уравнений: $z_1 > 0, \dots, z_r > 0$,

$$-\sum_{i=1}^r z_i + 1 = 0, \quad \sum_{i=1}^r z_i - 1 = 0, \quad -I(\mathbf{z}, \mathbf{p}) + \delta = 0,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{z}} &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(-\sum_{i=1}^r u_i + 1 \right) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{z}} \\ &+ \beta_2 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\sum_{i=1}^r u_i - 1 \right) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{z}} + \beta_3 \frac{\partial (-I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) + \delta)}{\partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{z}} \end{aligned}$$

для $j = 1, \dots, r$. Применяя достаточное условие глобального минимума основной задачи выпуклого программирования (см., например, теорему 3.5.1 в [8, с. 53, 43–45]), найдем, что

$$\min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{u}) = H(\mathbf{z}) = I(\mathbf{z}, \mathbf{q}).$$

Заметим, что при $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ верны неравенства $\mathbf{z} \neq \mathbf{q}$, $I(\mathbf{z}, \mathbf{q}) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокс Д., Хинкли Д. Задачи по теоретической статистике с решениями. М.: Мир, 1981, 224 с.
2. Hoeffding W. Asymptotically optimal tests for multinomial distributions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 369–401.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Мир, 1984, 527 с.
4. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, 319 с.
5. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982, 255 с.
6. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (ред.) Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1. М.: Наука, 1974, 311 с.
7. Санов И. Н. Способ получения асимптотики вероятности больших отклонений нелинейных статистик от мультиномиального распределения и его применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 4, с. 761–763.
8. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980, 256 с.

Поступила в редакцию
12.V.1996