Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Фельдман, Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 747–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:40:24

© 1997 г.

ФЕЛЬДМАН Г. М.*

**ТЕОРЕМА СКИТОВИЧА–ДАРМУА ДЛЯ
ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП**

В статье полностью описаны дискретные периодические абелевы группы X , на которых из независимости линейных статистик от независимых случайных величин со значениями в группе X (коэффициенты линейных статистик — автоморфизмы группы) следует, что распределения случайных величин являются сдвигами распределений Хаара компактных подгрупп группы X .

Для рассматриваемого класса групп приведенная теорема является групповым аналогом известной теоремы Скитовича–Дармуа о характеристизации гауссовского распределения независимостью линейных статистик.

Ключевые слова и фразы: локально компактная абелева группа, гауссовское распределение, идемпотентное распределение, независимые линейные статистики.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$, $M^1(X)$ — множество вероятностных распределений на группе X , $\hat{\mu}(y)$ — характеристическая функция распределения $\mu \in M^1(X)$, $\Gamma(X)$ — множество гауссовских распределений на группе X , $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на группе X , т.е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X , $\text{Aut}(X)$ — группа всех топологических автоморфизмов группы X .

Рассмотрим две линейные формы

$$L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \dots + \alpha_s(\xi_s) \quad \text{и} \quad L_2 = \beta_1(\xi_1) + \dots + \beta_s(\xi_s),$$

где ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , а $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, и сформулируем следующую задачу.

Для каких групп X из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что все распределения $\mu_j \in I(X) * \Gamma(X)$. (Отметим, что если распределение $\mu_j \in I(X) * \Gamma(X)$, то μ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы $K \subset X$, и μ при естественном гомоморфизме

*Физико-технический институт низких температур НАН Украины, пр. Ленина, 47, 310164 Харьков, Украина.

$X \rightarrow X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение.)

В. П. Скитовичем и Дармуа было впервые обнаружено, что этим свойством обладает группа вещественных чисел $\mathbf{R}$ (см. [1], [2]). Затем Гурье и Олкин установили аналогичный результат для групп $\mathbf{R}^n$, $n > 1$ ([3]). В [4] сформулированная задача решена в классе конечных абелевых групп, а в [5] — в классе компактных абелевых групп. В настоящей работе мы делаем еще один шаг в решении общей задачи, а именно, даем ее решение в классе дискретных периодических абелевых групп. Поскольку на таких группах гауссовские распределения вырождены, то речь будет идти о характеристизации идемпотентных распределений.

Условимся о некоторых обозначениях. Нейтральный элемент группы X обозначим через 1_X . Если H — замкнутая подгруппа группы Y , то обозначим через $A(X, H)$ ее аннулятор:

$$A(X, H) = \{x \in X: (x, y) = 1 \text{ для любых } y \in H\}.$$

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Обозначим через $f_n: X \rightarrow X$, $n \in \mathbf{N}$, гомоморфизм, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Положим $X^{(n)} = \text{Im } f_n$, $X_{(n)} = \text{Ker } f_n$. Если $\alpha \in \text{Aut}(X)$, то сопряженный гомоморфизм $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(Y)$ определяется формулой $(x, \tilde{\alpha}(y)) = (\alpha(x), y)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Подгруппа G группы X , которая отображается в себя при всяком автоморфизме $\alpha \in \text{Aut}(X)$, называется характеристической подгруппой группы X .

Через $Z(m)$ обозначим мультипликативную группу корней степени m из единицы. Пусть p — простое число. Через $Z(p^\infty)$ обозначим рассматриваемую в дискретной топологии мультипликативную группу корней степени p^n из единицы, где n пробегает все неотрицательные целые числа. Через Δ_p обозначим группу p -адических целых чисел. Как множество Δ_p совпадает с множеством последовательностей $x = (x_0, x_1, \dots)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, а сумма $z = x + y$, $x, y \in \Delta_p$, определяется следующим образом.

Пусть

$$x_0 + y_0 = pt_0 + z_0, \quad \text{где } z_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}, t_0 \in \mathbf{Z}.$$

Предположим, что числа $z_0, z_1, \dots, z_k, t_0, t_1, \dots, t_k$ уже определены. Тогда положим $x_{k+1} + y_{k+1} + t_k = pt_{k+1} + z_{k+1}$, где $z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $t_{k+1} \in \mathbf{Z}$. Тем самым, по индукции определена последовательность $z = (z_0, z_1, \dots) \in \Delta_p$. Рассматриваемая в тихоновской топологии, группа Δ_p — компактная абелева вполне несвязная группа. Группы $Z(p^\infty)$ и Δ_p являются группами характеров одна другой:

$$(x, y) = \exp \left\{ \frac{2\pi i k}{p^n} (y_0 + y_1 p + \dots + y_{n-1} p^{n-1}) \right\},$$

где

$$x = \exp \left\{ \frac{2\pi i k}{p^n} \right\} \in Z(p^\infty), \quad y = (y_0, y_1, \dots) \in \Delta_p.$$

В группе Δ_p можно определить умножение таким образом, что Δ_p превращается в топологическое кольцо (см. [6, § 10]).

Пусть $\{X_i; i \in I\}$ — семейство групп. Через $\prod_{i \in I} X_i$ будем обозначать прямое произведение групп X_i , а через $\prod_{i \in I}^* X_i$ — слабое прямое произведение групп X_i , т.е. $x = (x_1, \dots, x_i, \dots) \in \prod_{i \in I}^* X_i$, если $x_i \neq 1_{X_i}$ лишь для конечного числа индексов i .

Периодическая группа X называется p -примарной, если порядок любого элемента есть степень простого числа p . Группа X называется делимой, если $X^{(n)} = X$ для любого $n = 2, 3, \dots$. Группа X называется редуцированной, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, а через $D(X)$ — множество всех вырожденных распределений на группе X . Через $\sigma(\mu)$ обозначим носитель распределения μ , а через $\bar{\mu}$ — распределение, задаваемое формулой $\bar{\mu}(E) = \mu(-E)$ для любого борелевского множества $E \subset X$. Отметим, что $\widehat{\bar{\mu}} = \widehat{\mu}(y)$.

Так же как и в классическом случае $X = \mathbf{R}^n$, условие независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$, $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, равносильно тому, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^s \hat{\mu}_j(u + \tilde{\delta}_j(v)) = \prod_{j=1}^s \hat{\mu}_j(u) \prod_{j=1}^s \hat{\mu}_j(\tilde{\delta}_j(v)), \quad u, v \in Y. \quad (1)$$

Основной теореме статьи предпослём ряд лемм.

Лемма 1. Пусть X — дискретная периодическая абелева группа, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , причем все $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. Тогда, если линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$, $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, независимы, то все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ на некоторой открытой подгруппе $B \subset Y$.

Доказательство. Так как группа Y вполне несвязна, то любая окрестность нуля в Y содержит компактную открытую подгруппу L . Выберем L так, чтобы все $\hat{\mu}_j(y) > 0$ при $y \in Y$. В силу непрерывности автоморфизмов $\tilde{\delta}_j$ существует такая открытая подгруппа $M \subset L$, что $\tilde{\delta}_j(M) \subset L$, $j = 1, 2, \dots, s$. Положим $f_j(y) = -\ln \hat{\mu}_j(y)$, $y \in L$. Из (1) получаем

$$\sum_{j=1}^s f_j(u + \tilde{\delta}_j(v)) = \sum_{j=1}^s f_j(u) + \sum_{j=1}^s f_j(\tilde{\delta}_j(v)), \quad u \in L, v \in M. \quad (2)$$

Интегрируя (2) по мере Хаара $dm_L(u)$, находим

$$\sum_{j=1}^s f_j(\tilde{\delta}_j(v)) = 0, \quad v \in M.$$

Значит, все $\hat{\mu}_j(\tilde{\delta}_j(v)) \equiv 1$ при $v \in M$. Положим

$$B = \cap_{j=1}^s \tilde{\delta}_j(M).$$

Тогда B — открытая подгруппа в Y , и все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in B$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $X = \prod_{i \in \mathbb{N}}^* Z(2^{m_i})$, $m_i < m_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , причем все $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. Тогда, если линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$, $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, независимы, то все $\mu_j = E_{1_X}$.

Доказательство. Имеем $Y = \prod_{i \in \mathbb{N}} Z(2^{m_i})$. Положим

$$A_j = \prod_{i=j+1}^{\infty} Z(2^{m_i}), \quad H_j = Y_{(2)} \cap A_j.$$

Легко видеть, что

$$H_j = Y_{(2)} \cap Y^{(2^{m_{j+1}-1})}.$$

Поэтому H_j — характеристическая подгруппа группы Y . По лемме 1 существует такая открытая подгруппа $B \subset Y$, что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in B$. Легко видеть, что без ограничения общности можно считать, что $B = A_{k_0}$ при некотором k_0 .

Проверим сначала, что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y_{(2)}$. Рассмотрим сужение уравнения (1) на подгруппу $Y_{(2)}$. Поскольку $H_{k_0} \subset A_{k_0}$, то все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in H_{k_0}$. Заметим теперь, что для любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(Y)$ и любого i выполнено $\alpha(H_{i-1} \setminus H_i)$. Поэтому если $u, v \in H_{i-1} \setminus H_i$, то $u + \alpha(v) \in H_i$. Из (1) при $u, v \in H_{k_0-1} \setminus H_{k_0}$ получаем

$$1 = \prod_{j=1}^s \hat{\mu}_j(u) \prod_{j=1}^s \hat{\mu}_j(\tilde{\delta}_j(v)), \quad u, v \in H_{k_0-1} \setminus H_{k_0}.$$

Следовательно, все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in H_{k_0-1}$. Рассуждая аналогичным образом, последовательно получим, что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in H_0 = Y_{(2)}$.

Заметим теперь, что для любого распределения μ множество $\{y \in Y: \hat{\mu}(y) = 1\}$ — подгруппа в Y . Положим $H = \cap_{j=1}^s \{y \in Y: \hat{\mu}_j(y) = 1\}$. По доказанному $Y_{(2)} \cup A_{k_0} \subset H$.

По определению $Y = Z(2^{m_1}) \times \dots \times Z(2^{m_k}) \times A_k$. Докажем, что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y$ индукцией по m_k . При $m_k = 1$ имеем $k = 1$,

$Y = Z(2) \times A_1$, и утверждение верно. Поскольку все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y_{(2)}$, то каждая характеристическая функция $\hat{\mu}_j(y)$ постоянна на классах смежности $y + Y_{(2)}$ и индуцирует некоторую характеристическую функцию $\tilde{\nu}_j(y)$ на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$. С другой стороны, так как $Y_{(2)}$ — характеристическая подгруппа группы Y , то каждый автоморфизм $\tilde{\delta}_j$ индуцирует некоторый топологический автоморфизм фактор-группы $Y/Y_{(2)}$, для которого мы сохраним обозначение $\tilde{\delta}_j$. Это позволяет рассмотреть уравнение (1) на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$. Имеем

$$\prod_{j=1}^s \tilde{\nu}_j(u + \tilde{\delta}_j(v)) = \prod_{j=1}^s \tilde{\nu}_j(u) \prod_{j=1}^s \tilde{\nu}_j(\tilde{\delta}_j(v)), \quad u, v \in Y/Y_{(2)}.$$

Но $Y/Y_{(2)} \approx Z(2^{m_1-1}) \times \dots \times Z(2^{m_k-1}) \times (A_k/H_k)$. По предположению индукции все $\tilde{\nu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y/Y_{(2)}$. Значит, и все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y$, т.е. все $\mu_j = E_{1_X}$. Лемма доказана.

Рассмотрим группу $\text{Aut}(\Delta_p)$. Каждому автоморфизму $\alpha \in \Delta_p$ отвечает элемент $x_\alpha = (x_0, x_1, \dots) \in \Delta_p$, $x_0 \neq 0$, такой, что для любого $y \in \Delta_p$ выполнено $\alpha(y) = x_\alpha \cdot y$ (см. [6, § 2.6]).

Лемма 3. Пусть $X = Z(2^\infty)$, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , причем все $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. Тогда, если линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$, $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, независимы, то все $\mu_j = E_{1_X}$.

Доказательство. Имеем $Y = \Delta_2$. Положим

$$\Lambda_i = \{x = (x_0, x_1, \dots) \in \Delta_2: x_n = 0 \quad \forall n < i\}.$$

Множества Λ_i являются компактными открытыми подгруппами в Δ_2 и образуют базу в точке 1_Y . По лемме 1 существует такая открытая подгруппа B в Δ_2 , что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in B$. Не ограничивая общности, можно считать, $B = \Lambda_{k_0}$ при некотором k_0 . Из определения умножения в Δ_2 следует, что каждая подгруппа Λ_i является характеристической. Рассмотрим сужение уравнения (1) на подгруппу Λ_{k_0} . Имеем

$$\sigma(\mu_j) \subset A(Z(2^\infty), \Lambda_{k_0}) = Z(2^{k_0}).$$

Так как подгруппа $Z(2^{k_0})$ является характеристической подгруппой группы $Z(2^\infty)$, то утверждение леммы вытекает из леммы 2.

Лемма 4 (см. [4]). Пусть $X = Z(3)$, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j . Тогда, если линейные формы $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \dots + \alpha_s(\xi_s)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \dots + \beta_s(\xi_s)$, $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, независимы, то либо все $\mu_j \in D(X)$, либо $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = \mu_X$ по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2} , а остальные μ_j произвольны.

Пусть A — редуцированная p -примарная группа. Положим $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(p^n)}$, $A^{\sigma+1} = (A^{\sigma})^1$ и $A^{\rho} = \bigcap_{\sigma < \rho} A^{\sigma}$, если ρ — предельное порядковое число. Тогда определена вполне упорядоченная последовательность подгрупп

$$A = A^0 \subset A^1 \subset \dots \subset A^{\sigma} \subset \dots \subset A^{\tau} = \{0\}$$

для некоторого порядкового числа τ . Подгруппа A^{σ} называется σ -й ульмовской подгруппой группы A , а фактор-группу $A_{\sigma} = A^{\sigma}/A^{\sigma+1}$ называют σ -м ульмовским фактором группы A . Вполне упорядоченная последовательность

$$A_0, A_1, \dots, A_{\sigma}, \dots \quad (\sigma < \tau)$$

называется последовательностью Ульма группы A , а τ — ульмовским типом группы A .

Если группа A счетна, то все A_{σ} — слабые прямые произведения циклических групп, τ — счетное порядковое число и A_{σ} — неограниченная группа при $\sigma + 1 < \tau$ (см. [7, § 37], [8, § 76]).

Теорема 1. Пусть X — счетная дискретная периодическая абелева группа, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \dots + \alpha_s(\xi_s)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \dots + \beta_s(\xi_s)$ независимы. Тогда справедливы утверждения:

(α) Если X — редуцированная 2-примарная группа ульмановского типа τ с последовательностью Ульма X_{σ} ($0 \leq \sigma < \tau$), удовлетворяющая условиям:

- 1) $X_{\sigma} \approx \prod_{i \in \mathbb{N}}^* Z(2^{m_{\sigma,i}})$, $m_{\sigma,i} < m_{\sigma,i+1}$ при $\sigma + 1 < \tau$;
- 2) если порядковое число $\tau - 1$ существует, то либо

$$X_{\tau-1} \approx Z(2^{m_1}) \times \dots \times Z(2^{m_n}), \quad m_1 < \dots < m_n,$$

либо

$$X_{\tau-1} \approx \prod_{i \in \mathbb{N}}^* Z(2^{m_i}), \quad m_i < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

то все $\mu_j \in D(X)$;

(β) Если $X \approx Z(2^{\infty}) \times F$, где F — такая группа, как в (α), то все $\mu_j \in D(X)$;

(γ) Если $X \approx Z(3) \times G$, где G — такая группа, как в (α) или в (β), то либо все $\mu_j \in D(X)$, либо распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j , что $\mu'_{j_1} = \mu'_{j_2} = m_{Z(3)}$ по крайней мере для двух распределений μ'_{j_1} и μ'_{j_2} , а остальные μ'_j произвольны, причем все $\sigma(\mu'_j) \subset Z(3)$.

Доказательство. Полагая $\eta_j = \alpha_j(\xi_j)$, мы сведем доказательство к случаю, когда линейные формы имеют вид

$$L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s \quad \text{и} \quad L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s), \quad \delta_j \in \text{Aut}(X).$$

(α). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тогда $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$. Так как характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (1), то уравнению (1) будут удовлетворять и характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$. Это позволяет с самого начала считать, что все $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. Утверждение (α) будет доказано, если мы установим, что при этом предположении все $\mu_j = E_{1_X}$.

Положим $L = A(Y, X^1)$. Поскольку X^1 — характеристическая подгруппа группы X , то L — характеристическая подгруппа группы Y . Рассмотрим сужение уравнения (1) на подгруппу L . Поскольку $L \approx X_0^*$, то, применяя лемму 2, получаем, что все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in L$, а, значит, $\sigma(\mu_j) \subset A(X, L) = X^1$.

Очевидно, что X^Δ — характеристическая подгруппа группы X при любом $\Delta < \tau$. Предположим, что уже доказано включение $\sigma(\mu_j) \subset X^\Delta$, $j = 1, 2, \dots, s$, где $\Delta < \rho$. Если порядковое число $\rho - 1$ существует, то рассуждение, проведенное выше, где вместо X рассматривается $X^{\rho-1}$, доказывает, что все $\sigma(\mu_j) \subset X^\rho$. Если же ρ — предельное порядковое число, то $X^\rho = \bigcap_{\delta < \rho} X^\delta$, и поэтому также все $\sigma(\mu_j) \subset X^\rho$. Следовательно, все $\sigma(\mu_j) \subset X^\tau = \{0\}$, т.е. все $\mu_j = E_{1_X}$.

(β). Рассуждая так же, как и при доказательстве (α), будем считать, что все $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$. По условию $X = Z(2^\infty) \times F$, где F — такая группа, как в (α). Положим $H = A(Y, Z(2^\infty)) \approx F^*$. Так как $Z(2^\infty)$ — максимальная делимая подгруппа группы X , то $Z(2^\infty)$ — характеристическая подгруппа группы X . Поэтому H — характеристическая подгруппа группы Y . Рассмотрим сужение уравнения (1) на подгруппу H . Как доказано в (α), все $\hat{\mu}_j(y) \equiv 1$ при $y \in Y$, а значит, все $\sigma(\mu_j) \subset A(X, H) = Z(2^\infty)$. Применяя лемму 3, доказываем искомое утверждение.

(γ). Как и при доказательстве (α) и (β), положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Имеем $Y = Z(3) \times H$, где $H = G^*$. Очевидно, что H — характеристическая подгруппа группы Y . Рассматривая сужение уравнения (1) для характеристических функций $\hat{\nu}_j(y)$ на подгруппу H и учитывая, что в случаях (α) и (β) теорема уже доказана, заключаем, что все $\hat{\nu}_j(y) \equiv 1$ на H . Поэтому $\sigma(\nu_j) \subset A(X, H) = Z(3)$. Поскольку $Z(3)$ — характеристическая подгруппа группы X , то по лемме 4 либо все $\nu_j = E_{1_X}$, а тогда все $\mu_j \in D(X)$, либо $\nu_{j_1} = \nu_{j_2} = m_{Z(3)}$ по крайней мере для двух распределений ν_{j_1} и ν_{j_2} , а остальные ν_j произвольны. Отсюда непосредственно вытекает искомое утверждение. Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть X — счетная дискретная абелева группа без кручения, ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j и $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Тогда, как доказано в [4], если линейные формы $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \dots + \alpha_s(\xi_s)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \dots + \beta_s(\xi_s)$ независимы, то все $\mu_j \in D(X)$.

Это замечание позволяет доказать, что теорема 1 справедлива для

произвольных счетных дискретных абелевых групп. При этом условия (α) , (β) и (γ) накладываются на периодическую часть группы X .

Теорема 1 точна в классе дискретных периодических абелевых групп в следующем смысле.

Теорема 2. Пусть X — счетная дискретная периодическая абелева группа, неизоморфная группам, перечисленным в теореме 1. Тогда существуют такие независимые случайные величины ξ_j со значениями в группе X и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$ независимы, а все $\mu_j \notin I(X)$.

Для доказательства нам понадобятся два предложения.

Предложение 1 (см. [4]). Пусть X — локально компактная абелева группа, содержащая ненулевую компактную подгруппу K , $K \not\cong Z(3)$. Пусть A — такое конечное подмножество в $\text{Aut}(K)$, что выполнены следующие условия: (i) любой автоморфизм $\alpha \in A$ продолжается до топологического автоморфизма группы X ; (ii) для любого $l \in K^*$, $l \neq 0$, существует такой автоморфизм $\alpha \in A$, что $\tilde{\alpha}(l) \neq l$. Тогда существуют такие независимые случайные величины ξ_j со значениями в группе X и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\delta_j \in \text{Aut}(X)$, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$ независимы, а все $\mu_j \notin I(X) * \Gamma(X)$.

Предложение 2 (см. [5]). Локально компактная абелева группа X удовлетворяет условиям предложения 1, если выполнено одно из условий: (i) группа X содержит такую ненулевую компактную подгруппу K , что $K \not\cong Z(3)$ и $K^{(2)} = K$; (ii) $X \approx Z(2^k) \times Z(2^k)$.

Доказательство теоремы 2. Представим группу X в виде слабого прямого произведения своих p -примарных подгрупп $X = \prod_{p \in \mathcal{P}} {}^*X_p$, где $\mathcal{P}$ — множество всех простых чисел. Заметим, что для любой подгруппы $G \subset X_p$ при $p \geq 3$ выполнено $G^{(2)} = G$. Поэтому если $X_3 \neq \{0\}$ и $X_3 \not\cong Z(3)$, или $X_p \neq \{0\}$ хотя бы при одном $p > 3$, то группа X удовлетворяет условию (i) предложения 2, откуда и вытекает утверждение теоремы. Следовательно, в доказательстве нуждается лишь случай, когда $X = X_2 \times X_3$, где либо $X_3 = \{0\}$, либо $X_3 \approx Z(3)$.

Представим группу X_2 в виде прямого произведения $X_2 = D \times N$, где D — максимальная делимая подгруппа группы X_2 , а N — редуцированная 2-примарная группа. Группа D изоморфна слабому прямому произведению групп $Z(2^\infty)$. Поскольку группа X не изоморфна группам, перечисленным в теореме 1, то могут представиться следующие две возможности.

1. Группа D содержит прямой сомножитель, изоморфный $Z(2^\infty) \times Z(2^\infty)$. Положим

$$K = Z(2) \times Z(2) \subset Z(2^\infty) \times Z(2^\infty), \quad A = \{a_1, a_2\} \subset \text{Aut}(K),$$

где

$$a_1(l_1, l_2) = (l_2, l_1), \quad a_2(l_1, l_2) = (l_1, l_1 l_2), \quad (l_1, l_2) \in Z(2) \times Z(2).$$

Очевидно, что X , K и A удовлетворяют условиям предложения 1, откуда и вытекает утверждение теоремы в этом случае.

2. Один из ульмовских факторов N_σ содержит прямой множитель вида $Z(2^k) \times Z(2^k)$. Проверим, что в этом случае группа N содержит такую подгруппу L , изоморфную $Z(2^k) \times Z(2^k)$, что любой ее изоморфизм продолжается до изоморфизма группы N , а следовательно, и группы X . Воспользуемся следующим общим фактом. В любой p -примарной группе M существует подгруппа B , называемая базисной, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) B — слабое прямое произведение циклических групп;
- 2) B — сервантная подгруппа группы M ;
- 3) M/B — делимая группа.

Все базисные подгруппы p -примарной группы изоморфны. Обозначим через B_n слабое прямое произведение циклических сомножителей в B одного и того же порядка, т.е. $B_n = \prod^* Z(p^n)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда для любого n имеет место разложение

$$M = B_1 \times \dots \times B_n \times K_n, \quad (3)$$

где K_n — подгруппа в M , порожденная $\prod_{i \geq n+1}^* B_i$ и $M^{(p^n)}$ (см. [7, § 32, § 33]).

Имеем $N_\sigma = N^\sigma / N^{\sigma+1}$. Пусть C — базисная подгруппа группы N^σ . Тогда $N^{\sigma+1} \cap C = \{0\}$, а образ C_0 при естественном эпиморфизме $\varphi: N^\sigma \rightarrow N_\sigma$ является базисной подгруппой группы N_σ , причем φ — изоморфизм между C_0 и C (см. [7, § 34]). Так как N_σ — слабое прямое произведение циклических групп, то группа N_σ служит сама для себя базисной подгруппой, поэтому $N_\sigma \approx C_0$. Отсюда $N_\sigma \approx C$. Следовательно, подгруппа C содержит прямой множитель L , изоморфный $Z(2^k) \times Z(2^k)$. Имеем $C = L \times F$, где F , как подгруппа C , есть слабое прямое произведение циклических групп. Мы получили разложение группы C в слабое прямое произведение циклических групп. Пусть C_n — слабое прямое произведение циклических множителей в C порядка 2^n . Тогда L — прямой сомножитель в C_k . Используя разложение (3), заключаем, что L — прямой сомножитель в N^σ . Следовательно, любой автоморфизм подгруппы L продолжается до автоморфизма группы N^σ . По теореме Цыпина (см. [8, § 77]) любой автоморфизм подгруппы N^σ продолжается до автоморфизма группы N . Таким образом, любой автоморфизм подгруппы L продолжается до автоморфизма группы N , а следовательно, и до автоморфизма группы X .

По предложению 2 (ii) и предложению 1 существуют такие независимые случайные величины ξ_j со значениями в подгруппе L и с рас-

пределениями μ_j и автоморфизмы $\delta_j \in \text{Aut}(L)$, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_s$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \dots + \delta_s(\xi_s)$ независимы, а все $\mu_j \notin I(L)$. По доказанному автоморфизмы δ_j можно продолжить до автоморфизмов группы X . Сохраним для продолженных автоморфизмов обозначение δ_j . Тогда линейные формы L_1 и L_2 — искомые.

Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скитович В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 2, с. 217–219.
2. Darrois G. Analyse générale des liaisons stochastiques. — Rev. Ist. Internat. Statist., 1953, v. 21, p. 2–8.
3. Ghurye S. G., Olkin I. A characterization of the multivariate normal distribution. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, № 2, p. 533–562.
4. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
5. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для компактных групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 901–906.
6. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974, 336 с.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977, 416 с.

Поступила в редакцию
24.IV.1997