Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Нелинейное финансовое осреднение, эволюционный процесс и законы эконофизики, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 269–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:33:29

© 2004 г.

МАСЛОВ В. П.*

**НЕЛИНЕЙНОЕ ФИНАНСОВОЕ ОСРЕДНЕНИЕ,
ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС И ЗАКОНЫ ЭКОНОФИЗИКИ**

Сходство и различие как методов, так и результатов финансовой математики и квантовой статистики могут быть полезны для той и другой науки. Рассмотрен процесс, пределом которого являются распределение Гиббса и финансовое осреднение; изучены законы эконофизики для покупателей, приводящие к «фазовым переходам» типа пробоя курса акций и дефолта; получены распределения Парето и Гаусса для доходов и расходов различных слоев общества; введены понятия скорости оборота капитала для квазистабильного состояния общества.

Ключевые слова и фразы: эволюционный процесс, эконофизика, распределение Парето, сокращение информации, акции, финансы.

1. «Эконофизика». Аксиоматика финансового осреднения приводит в случае квазистабильного, осредненного рынка к некоторой формуле выигрыша-проигрыша, если задана случайная величина λ , принимающая значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, означающие, например, цены. Но в обычной частотной теории вероятностей выигрыш (проигрыш) вычисляется как математическое ожидание, умноженное на число испытаний:

$$\sum_{i=1}^n g_i \lambda_i, \quad (1)$$

где $g_i / \sum_{j=1}^n g_j$ — частотные вероятности.

Спрашивается, какой достаточно естественный процесс в пределе приводит нас к финансовому осреднению? В силу того, что оно связано со значением свободной энергии в квантовой статистике, естественно спросить, какой процесс переводит произвольное распределение частиц по уровням энергии λ_i , полученное, например, с помощью «подсветки» материала,

$$\frac{g_i}{\sum_{j=1}^n g_j}, \quad (2)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: viktor_maslov@hotmail.com

в распределение Гиббса. Разница с финансовым осреднением заключается только в знаке: это как бы свободная энергия с отрицательной температурой.

Однако если мы будем рассматривать не доход продавцов, а расход покупателей, то знак остается тот же, что и в распределении Гиббса, т.е. мы получим аналогию с квантовой статистикой при положительной температуре.

При определении искомого процесса мы, разумеется, должны применить некоторые способы осреднения, в том числе сокращение информации — это также один из способов осреднения. Действительно, пусть имеется шестигранная кость с одинаковыми гранями и выигрышем, равным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, и пусть $\lambda_2 = \dots = \lambda_6 \equiv \lambda$. Сократим игру, взяв монетку и поставив на одной ее стороне $\frac{5}{3}\lambda$, а на другой $\frac{1}{3}\lambda_1$. Это есть элементарное сокращение «информации» (см. [1], [3], [2, раздел 4]), учет равновероятности элементарных событий и некоторое «осреднение», так как вероятность есть осреднение частотных вероятностей.

Если осреднять по ансамблю независимых испытаний, то, как известно, единственной функцией от гамильтониана, которая позволяет это совершить, является экспонента от гамильтониана. В частности, эти наводящие соображения приводят нас к той формуле эволюции распределения (2), которая будет приведена ниже.

Мы будем рассматривать исходную случайную величину λ , принимающую значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i > 0$ (для простоты будем считать их несоизмеримыми).

Пусть p_i — отвечающие им эмпирические вероятности, т.е. при M испытаниях значение λ_i выпадает g_i раз,

$$\sum_{i=1}^n g_i = M, \quad p_i = \frac{g_i}{M}. \quad (3)$$

Сопоставим λ случайную величину Y по следующему правилу:

$$Y_{N,K_i} = \sum_{j=1}^n \lambda_i K_j; \quad \sum_{i=1}^n K_i = N. \quad (4)$$

Случайная величина Y_{N,K_i} отвечает исходу (выигрышу-проигрышу) в элементарной игре, например, при $n = 2$ — в игре в «орлянку».

Вероятности соответствующих выигрышей, как известно, равны (с точностью до нормировки)

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^n K_i!} \prod_{i=1}^n g_i^{K_i}. \quad (5)$$

Рассмотрим схему сопоставления вероятностной задаче гильбертова пространства и оператора. Итак, случайная величина λ имеет n значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, соответствующие вероятности имеют вид g_i , а оператор $\hat{H}_1$ задается матрицей размера $nM \times nM$, у которой на главной

диагонали стоят g_1 раз числа λ_1 , g_2 раз числа $\lambda_2, \dots, g_n$ раз числа λ_n , а остальные элементы равны 0, таким образом, кратность собственного значения λ_i равна g_i . Обозначим $l_k, k = 1, \dots, n$, его собственные векторы. Гильбертово пространство, отвечающее серии из N испытаний, в этом случае есть C^{nNM} — пространство векторов длины N , а гамильтониан $\hat{H}_N$ выражается через $\hat{H}_1$ по формуле

$$\hat{H}_N = \sum_{s=1}^N \hat{E} \otimes \dots \otimes \hat{E} \otimes \hat{H}_1 \otimes \hat{E} \otimes \dots \otimes E, \quad (6)$$

где $\hat{E}$ — единичный оператор в пространстве C^{nM} , каждое слагаемое представляет собой тензорное произведение $N - 1$ операторов $\hat{E}$ и оператора $\hat{H}_1$, причем в слагаемом с номером s оператор $\hat{H}_1$ в произведении стоит на s -м месте. Собственные векторы оператора $\hat{H}_N$ имеют вид

$$f_{k_1, \dots, k_N} = e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_N}, \quad (7)$$

где $k_i = 1, \dots, n$, а соответствующие собственные значения суть

$$Y_{k_1, \dots, k_N} = \lambda_{k_1} + \dots + \lambda_{k_N}. \quad (8)$$

Кратности собственных значений оператора $\hat{H}_N$ совпадают с вероятностями «выигрыша» (5).

Рассмотрим теперь обобщения вероятностной задачи о выигрыше в серии из N независимых испытаний. Рассмотрим выигрыш в серии из N испытаний, причем объединим в одну серию все серии, у которых совпадают выигрыши (см. [4, гл. I, § 1, пример 6]), а различие состоит в порядке выпадения исходов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. В некотором смысле можно считать, что испытания тождественны и от их перестановки ничего не меняется.

Сопоставим этой новой задаче пространство C_S^{nNM} , которое является подпространством пространства C^{nNM} и состоит из его элементов, имеющих вид

$$f = \sum_{m_1=1}^n \dots \sum_{m_N=1}^n f(m_1, \dots, m_N) e_{m_1} \otimes \dots \otimes e_{m_N}, \quad (9)$$

где $f(m_1, \dots, m_N)$ — числовые коэффициенты, симметричные относительно перестановок m_s и $m_r, s, r = 1, \dots, N, e_m$ — собственные векторы оператора $\hat{H}_1$. Пространство C_S^{nNM} будем называть симметричным подпространством пространства C^{nNM} . Соответствующий оператор есть ограничение введенного выше оператора $\hat{H}_N$ на подпространство C_S^{nN} . Легко убедиться, что собственные значения этого оператора совпадают со значениями выигрыша, а их кратности равны

$$\prod \frac{(g_j + K_j + 1)!}{(g_j - 1)! K_j!}. \quad (10)$$

Рассмотрим еще одну игру в серии из N испытаний. Так же как в предыдущей задаче, будем считать, что серии с одинаковым выигрышем, отличающиеся только перестановкой исходов $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_N}$, $m_j = 1, \dots, n$, объединяются в одну серию, а кроме того, наложим запрет на серии, в которых хотя бы один из исходов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ встречается больше одного раза. Пространством, отвечающим такой постановке вероятностной задачи о выигрыше в серии из N испытаний, является C_A^{nNM} — подпространство пространства C^{nNM} , состоящее из его элементов, представимых в виде (9), где коэффициенты $f(m_1, \dots, m_N)$ антисимметричны относительно перестановок m_s и m_r , $s, r = 1, \dots, N$. Будем называть C_A^{nNM} антисимметричным подпространством пространства C^{nNM} . Оператором в данном случае является ограничение оператора $\hat{H}_N$ на подпространство C_A^{nNM} . Так же как и в предыдущих случаях, собственные значения оператора совпадают со значениями выигрыша в этой новой игре, а их кратности, совпадающие с точностью до нормировки с вероятностями «выигрыша», равны

$$\prod \frac{g_j!}{K_j! (g_j - K_j)!}. \quad (11)$$

Рассмотренные задачи о серии испытаний принципиально отличаются одна от другой: в рассмотренных задачах существует различие между собственными функциями оператора $\hat{H}_N$. Собственные функции гамильтониана стандартной задачи о выигрыше обладают следующим свойством: если представить их в виде столбца, состоящего из nNM элементов, то квадрат каждого элемента равен сам себе, поскольку в такой записи векторы представляют собой столбцы из 0 и 1. Поэтому в обычной задаче о серии независимых испытаний полуплотность (корень из плотности) совпадает с плотностью вероятности. Это означает, что мы можем ввести норму, отвечающую банахову пространству L_1 , что мы и сделаем в следующем пункте.

2. Эволюционный процесс, приводящий к распределению Гиббса. Рассмотрим случайную величину λ , которая принимает l различных значений: $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. Далее будем считать, что значения случайной величины находятся в общем положении, значит, для них имеет место условие: если для целых чисел $k_1, \dots, k_l$ выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^l k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i k_i = 0, \quad (12)$$

то $k_i = 0$ при всех $i = 1, \dots, l$.

Вновь сопоставим рассматриваемой случайной величине пространство L , размерность которого равна n , и оператор $\hat{H}_1$ в этом пространстве. Оператор $\hat{H}_1$ имеет набор собственных векторов e_i , $i = 1, \dots, l$, образующих ортонормированный базис в пространстве L . Собственное

значение, отвечающее собственному вектору $\mathbf{e}_i$, равно λ_i . Рассмотрим теперь серию из M одинаковых испытаний, в каждом из которых результатом является выпадение одного из значений $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ случайной величины. Этой вероятностной задаче, согласно вышесказанному, соответствует пространство $\mathcal{L}_M$, которое является тензорным произведением M пространств L . Векторы пространства $\mathcal{L}_M$ имеют вид

$$\Psi = \sum_{i_1=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \psi(i_1, \dots, i_M) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_M}, \quad (13)$$

где $\psi(i_1, \dots, i_M)$ — произвольная функция набора дискретных переменных $i_s = 1, \dots, l$, $s = 1, \dots, M$.

Введем норму в пространстве $\mathcal{L}_M$ следующим образом:

$$\|\Psi\| = \sum_{i_1=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l |\psi(i_1, \dots, i_M)|. \quad (14)$$

Кроме пространства $\mathcal{L}_M$, серии испытаний также соответствует оператор $\widehat{\mathcal{H}}_M$, действующий на векторы (13) согласно соотношениям

$$\widehat{\mathcal{H}}_M \Psi = \sum_{i_1=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \left(\sum_{s=1}^M \lambda_{i_s} \right) \psi(i_1, \dots, i_M) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_M}. \quad (15)$$

Введем для дальнейшего использования обозначения

$$M_i(i_1, \dots, i_M) = \sum_{s=1}^M \delta_{ii_s}, \quad (16)$$

где $\delta_{ii'}$ — символ Кронекера. Теперь определим проекторы $\widehat{P}_{\{M\}}$ следующим образом:

$$\widehat{P}_{\{M\}} \Psi = \sum_{i_1=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \left(\prod_{i=1}^l \delta_{M_i M_i(i_1, \dots, i_M)} \right) \psi(i_1, \dots, i_M) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_M}, \quad (17)$$

здесь $\{M\}$ обозначает произвольный набор неотрицательных целых чисел $M_1, \dots, M_l$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^l M_i = M. \quad (18)$$

Легко убедиться, что для операторов (17) справедливы равенства

$$\widehat{P}_{\{M\}} \widehat{P}_{\{M'\}} = \prod_{i=1}^l \delta_{M_i M'_i} \widehat{P}_{\{M\}} \quad (19)$$

и, таким образом, эти операторы являются проекторами. Оператор $\widehat{\mathcal{H}}_M$ (15) выражается через проекторы $\widehat{P}_{\{M\}}$ следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_M = \sum_{\{M\}} \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i M_i \right) \widehat{P}_{\{M\}}. \quad (20)$$

В подпространстве $\mathcal{L}_{\{M\}}$, на которое проектор $\hat{P}_{\{M\}}$ проектирует пространство $\mathcal{L}_M$, существует выделенный базис, образованный векторами, имеющими вид произведения

$$E_{i_1, \dots, i_M} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_M}, \quad (21)$$

где e_i встречается M_i раз, или, другими словами, набор $i_1, \dots, i_M$ удовлетворяет условиям

$$M_i(i_1, \dots, i_M) = M_i. \quad (22)$$

Введем следующую систему векторов $\Phi_{\{M\}}$:

$$\Phi_{\{M\}} = \hat{P}_{\{M\}} e \otimes \dots \otimes e, \quad e = \sum_{i=1}^l e_i. \quad (23)$$

Векторы (23) равны сумме всех векторов (21) из подпространства $\mathcal{L}_{\{M\}}$, кроме того, имеет место равенство

$$\Phi_{\{M\}} = \frac{1}{M!} \left(\prod_{i=1}^l M_i! \right) \text{Symm}_{i_1, \dots, i_M} E_{i_1, \dots, i_M}, \quad (24)$$

где $\text{Symm}_{i_1, \dots, i_M}$ — оператор симметризации по индексам $i_1, \dots, i_M$.

Теперь определим понятия *эволюции* и *сокращения информации*.

О п р е д е л е н и е 1. *Эволюцией* ансамбля, состоящего из M элементов — компонент вектора $\Psi \in \mathcal{L}_M$, за один шаг будем называть следующий вектор пространства $\mathcal{L}_M$:

$$\Psi_1 = \exp \left(-\beta \hat{\mathcal{H}}_M \right) \Psi, \quad (25)$$

где β — некоторый параметр, означающий покупательную способность рубля (а значит, при $\beta \rightarrow \infty$ Ψ_1 должно стремиться к нулю).

О п р е д е л е н и е 2. *Сокращением информации*, или факторизацией, будем называть операцию, которая любому вектору $\Psi \in \mathcal{L}_M$ сопоставляет другой вектор по следующему закону:

$$R(\Psi) = \sum_{\{M\}} \|\hat{P}_{\{M\}} \Psi\| \Phi_{\{M\}}, \quad (26)$$

где суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $M_1, \dots, M_n$, удовлетворяющих условию (18).

Каждому набору неотрицательных чисел $g_i, i = 1, \dots, l$, сопоставим следующий вектор пространства $\mathcal{L}_M$:

$$\Psi_g = g \otimes \dots \otimes g, \quad (27)$$

где g — вектор пространства L , имеющий вид

$$g = \sum_{i=1}^l g_i e_i. \quad (28)$$

Для любого набора неотрицательных чисел g_i , $i = 1, \dots, l$, определим эволюцию векторов ансамбля из M элементов $\Psi_g(n) \in \mathcal{L}_{\{M\}}$ следующими рекуррентными формулами:

$$\Psi_g(n+1) = R\left(\exp\left(-\beta \widehat{\mathcal{H}}_M\right) \Psi_g(n)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Psi_g(0) = \Psi_g. \quad (29)$$

Обозначим через $\psi_g(i_1, \dots, i_M; n)$ коэффициенты разложения (13) вектора $\Psi_g(n)$ по базису (21). Иными словами, $\psi_g(i_1, \dots, i_M; n)$ и $\Psi_g(n)$ связаны равенством

$$\Psi_g(n) = \sum_{i_1=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \psi_g(i_1, \dots, i_M; n) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_M}. \quad (30)$$

Функцию $\psi_g(i_1, \dots, i_M; n)$ будем считать ненормированной функцией распределения факторизованного ансамбля через n шагов при условии, что в начальный момент функция распределения факторизованного ансамбля имела вид произведения: $\psi_g(i_1, \dots, i_M; 0) = g_{i_1} \cdots g_{i_M}$. В таком случае g_i имеет смысл ненормированной функции распределения для одной системы факторизованного ансамбля. Рассмотрим следующие функции:

$$F(n, g, M) = -\frac{1}{M\beta(n+1)} \ln(\|\Psi_g(n)\|), \quad (31)$$

$$w_i(n, g, M) = \frac{1}{\|\Psi_g(n)\|} \sum_{i_2=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \psi_g(i, i_2, \dots, i_M; n). \quad (32)$$

Так как $\psi_g(i_1, \dots, i_M)$ является функцией распределения для факторизованного ансамбля из M систем, то формула (32) выражает функцию распределения одной системы. Рассмотрим пределы функций распределения (31) и (32) для одной системы факторизованного ансамбля, когда число его элементов M стремится к бесконечности.

Теорема 1. При $M \rightarrow \infty$ функции распределения $F(n, g, M)$ и $w_i(n, g, M)$ имеют следующие пределы:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F(n, g, M) = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\sum_{i=1}^l e^{-n\beta\lambda_i/(n+1)} g_i^{1/(n+1)} \right) \equiv \tilde{F}(n, g), \quad (33)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} w_i(n, g, M) = \frac{e^{-n\beta\lambda_i/(n+1)} g_i^{1/(n+1)}}{\sum_{j=1}^l e^{-n\beta\lambda_j/(n+1)} g_j^{1/(n+1)}} \equiv \tilde{w}_i(n, g). \quad (34)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор (27) представляется в виде

$$\Psi_g = \sum_{\{M\}} \left(\prod_{i=1}^l g_i^{M_i} \right) \Phi_{\{M\}}. \quad (35)$$

Подставив (35) в (29), получим

$$\Psi_g(n) = (M!)^l \sum_{\{M\}} \left(\prod_{i=1}^l \frac{g_i^{M_i} e^{-n\beta\lambda_i M_i}}{(M_i!)^n} \right) \Phi_{\{M\}}. \quad (36)$$

Из (36) следует

$$\psi_g(i_1, \dots, i_M; n) = (M!)^l \left(\prod_{i=1}^l \frac{(g_i e^{-n\beta\lambda_i})^{M_i}}{(M_i!)^n} \right), \quad (37)$$

где M_i выражается через $i_1, \dots, i_M$ согласно (16). Подставляя выражения (37) в (14), а также суммируя (37) по всем индексам кроме одного, получим

$$\|\Psi_g(n)\| = (M!)^{n+1} \sum_{\{M\}} \prod_{i=1}^l \frac{g_i^{M_i} e^{-n\beta\lambda_i M_i}}{(M_i!)^{n+1}}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i_2=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \psi_g(i, i_2, \dots, i_M; n) \\ &= (M!)^{n+1} \sum_{\{M\}} \left(\prod_{i=1}^l \frac{g_i^{M_i} e^{-n\beta\lambda_i M_i}}{(M_i!)^{n+1}} \right) \left(\sum_{j=1}^l \frac{M_j}{M} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Для нахождения асимптотики при $M \rightarrow \infty$ сумм в формулах (38), (39) используем метод Лапласа [8], [9]. Применение этого метода дает следующие равенства:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \ln (\|\Psi_{p,\lambda}(n)\|) = (n+1) \ln \left(\sum_{i=1}^l e^{-n\beta\lambda_i/(n+1)} g_i^{1/(n+1)} \right), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\Psi_{p,\lambda}(n)\|} \sum_{i_2=1}^l \cdots \sum_{i_M=1}^l \psi_{p,\lambda}(i, i_2, \dots, i_M; n) \\ &= \frac{e^{-n\beta\lambda_i/(n+1)} g_i^{1/(n+1)}}{\sum_{j=1}^l e^{-n\beta\lambda_j/(n+1)} g_j^{1/(n+1)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подстановка равенств (40), (41) в формулы (31), (32) приводит к (33), (34). Теорема доказана.

Таким образом, в силу (34) нормированное распределение $\tilde{w}_i(0, g) = g_i / \sum_{j=1}^l g_j$ за n шагов эволюции переходит в $\tilde{w}_i(n, g)$.

Рассмотрим теперь выражения $\tilde{F}(n, g)$ (33) и $\tilde{w}_i(n, g)$ (34) при $n \rightarrow \infty$, т.е. предельные распределения. Пусть I — непустое подмножество множества $1, \dots, l$, и пусть для g_i выполняются условия

$$g_i > 0 \quad \text{при} \quad i \in I, \quad g_i = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I. \quad (42)$$

В таком случае из (33), (34) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}(n, g) = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\sum_{i \in I} e^{-\beta \lambda_i} \right), \quad (43)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}_i(n, g) = \frac{e^{-\beta \lambda_i}}{\sum_{j=1}^l e^{-\beta \lambda_j}} \equiv \rho_i. \quad (44)$$

В случае, когда множество I совпадает с множеством $\{1, \dots, l\}$, выражения (43) и (44) являются соответственно свободной энергией и распределением Гиббса при температуре $1/\beta$ для системы, уровни энергии которой невырождены и равны $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. В случае, когда I меньше, чем множество $\{1, \dots, l\}$, выражения (43) и (44) соответствуют распределению системы не по всем уровням, а по части. Заметим также, что если для g_i выполняется

$$g_i = \begin{cases} Ae^{-\beta \lambda_i}, & \text{при } i \in I, \\ 0 & \text{при } i \notin I, \end{cases} \quad (45)$$

где A — произвольное положительное число, то $\tilde{w}_i(n, g)$ (34) совпадает с ρ_i (44) при любом n . Таким образом, полное и частичные распределения Гиббса оказываются инвариантными относительно приведенной эволюции. В случае $\beta < 0$ формула (43) совпадает с финансовым осреднением дохода [5], [10], [11] (с точностью до константы), при $\beta > 0$ — с финансовым осреднением расхода.

Рассмотрим частный случай, встречающийся в финансовых задачах, когда случайная величина λ принимает значение полинома:

$$\mathcal{E}(N_1) = \sum_{q=0}^p A_q N_1^q, \quad (46)$$

где N_1 принимает значения $0, 1, \dots, N$. Исследуем вопрос о выполнении условия (12) в этом случае.

Утверждение 1. В случае, когда $p < N$, условие (12) не выполняется ни при каких значениях коэффициентов A_q , а в случае, когда $p \geq N$, условие (12) выполняется для коэффициентов A_q в общем положении.

Доказательство. В рассматриваемом случае условие (12) принимает следующий вид: не существует ненулевого набора целых чисел $P_0, P_1, \dots, P_N$, для которого одновременно выполняются равенства

$$\sum_{N_1=0}^N \mathcal{E}(N_1) P_{N_1} = 0, \quad \sum_{N_1=0}^N P_{N_1} = 0. \quad (47)$$

По-другому это условие можно сформулировать так: не существует набора целых чисел $P_1, \dots, P_N$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{N_1=1}^N (\mathcal{E}(N_1) - \mathcal{E}(0)) P_{N_1} = \sum_{q=1}^p A_q \left(\sum_{N_1=1}^N N_1^q P_{N_1} \right) = 0. \quad (48)$$

В курсе линейной алгебры доказано, что определитель матрицы Вандермонда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \quad (49)$$

отличен от нуля, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, а кроме того, если числа x_i целые, то обратная к (49) матрица состоит из рациональных чисел. Отсюда следует, что при $p < N$ система уравнений

$$\sum_{N_1=1}^N N_1^q P_{N_1} = 0, \quad q = 1, \dots, p, \quad (50)$$

имеет ненулевые целые решения и, следовательно, существует ненулевой набор целых чисел $P_1, \dots, P_N$, для которого выполняется равенство (48). Таким образом, первая часть утверждения доказана. В случае, когда $p \geq N$, из указанных свойств матрицы (49) следует, что не существует ненулевого решения системы уравнений (50). Поэтому для любого ненулевого набора целых чисел $P_1, \dots, P_N$ хотя бы одно из чисел

$$J_q(P) = \sum_{N_1=1}^N N_1^q P_{N_1}, \quad q = 1, \dots, p, \quad (51)$$

отлично от нуля. Отсюда следует, что если при $p \geq N$ существует ненулевой набор целых чисел $P_1, \dots, P_N$, для которого выполняется равенство (48), то коэффициенты A_q не находятся в общем положении. А именно, в этом случае существуют число $1 \leq q_0 \leq p$ и набор рациональных чисел R_q , $q \neq q_0$, такие, что

$$A_{q_0} = \sum_{1 \leq q \leq N, q \neq q_0} A_q R_q. \quad (52)$$

При фиксированных коэффициентах A_q , $q \neq q_0$, в силу рациональности чисел R_q , $q \neq q_0$, правая часть равенства (52) принимает только счетное число значений, а в общем положении коэффициент A_{q_0} может принимать несчетное множество значений. Таким образом, равенство (48) может быть выполнено только не в общем положении.

3. Зависимость покупательной способности и среднего дохода населения от числа покупателей на специализированном рынке и в регионе. Распределение Парето. Рассмотрим рынок каких-либо специализированных товаров, например, авторынок. На рынке имеется n различных товаров, цена товара с номером j равна λ_j рублей. Пусть имеется N покупателей, которые покупают какой-либо

один предмет. Обозначим через N_j , $j = 1, \dots, n$, число покупателей, купивших товар с номером j ; таким образом,

$$\sum_{j=1}^n N_j = N. \quad (53)$$

Доход, полученный продавцом, выражается формулой $\mathcal{E}(\{N\}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j$, где $\{N\}$ обозначает набор целых неотрицательных чисел $N_1, \dots, N_n$, удовлетворяющих условию (53).

Глобальное финансовое осреднение имеет вид (см. [6]) $\mathbb{E} = \beta^{-1} \times \ln(\sum_{\{N\}} \alpha(\{N\}) \exp(\beta \mathcal{E}(\{N\})))$, где $\alpha(\{N\})$ — зависящие от набора $\{N\}$ неотрицательные числа, которые удовлетворяют условию нормировки: $\sum_{\{N\}} \alpha(\{N\}) = 1$, $\beta > 0$ — покупательная способность рубля, кроме того, $\sum_{\{N\}}$ обозначает сумму по всем наборам $\{N\}$, удовлетворяющим условию (87) (см. ниже п. 4).

В нашем случае перестановка покупателей сказывается на числе вариантов. В физике это значит, что они подчиняются бoльцмановской статистике и, как следует из аксиоматики, в этом случае веса $\alpha(\{N\})$ имеют вид $\alpha(\{N\}) = C \prod_{j=1}^n 1/N_j!$, где число C определяется из условия нормировки. Используем здесь и далее следующее хорошо известное равенство:

$$\sum_{\{N\}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{a_j^{N_j}}{N_j!} \right) = \frac{1}{N!} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^N, \quad (54)$$

которое справедливо для произвольных чисел a_j , $j = 1, \dots, n$. Из (54) следует, что $C = N!/n^N$.

Следовательно, глобальное финансовое осреднение имеет вид

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{N!}{n^N} \sum_{\{N\}} \exp \left(\beta \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{N_k!} \right) \right). \quad (55)$$

Используя (54), приведем окончательно глобальное финансовое осреднение (86) к виду

$$\mathbb{E} = \frac{N}{\beta} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{\beta \lambda_j} \right). \quad (56)$$

Исследуем асимптотику глобального финансового осреднения при $N \rightarrow \infty$. Без ограничения общности будем дальше считать, что $\lambda_j = \lambda(j/n)$, $j = 1, \dots, n$, где функция $\lambda(x) \in C^\infty([0, 1])$ не зависит от N . Кроме того, предположим, что $n = N^\alpha$, где $\alpha > 0$. Для того чтобы найти асимптотику выражения (56), найдем сначала асимптотику при $n \rightarrow \infty$ суммы $n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{\beta \lambda_j}$.

Очевидно, что для произвольной функции $g(x) \in C^\infty([0, 1])$ выполняется равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx + \frac{g(1) - g(0)}{2n} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g(x) \cos(2\pi knx) dx \quad (57)$$

(см. [8]).

Кроме того, для любых целых $k, n \neq 0$ имеем

$$\int_0^1 g(x) \cos(2\pi knx) dx = \frac{g'(1) - g'(0)}{(2\pi kn)^2} - \frac{1}{(2\pi kn)^3} \int_0^1 g'''(x) \sin(2\pi knx) dx. \quad (58)$$

Подставим (58) в (57) и учтем, что $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g\left(\frac{j}{n}\right) &= \int_0^1 g(x) dx + \frac{g(1) - g(0)}{2n} + \frac{g'(1) - g'(0)}{12n^2} \\ &+ \frac{2}{(2\pi n)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \int_0^1 g'''(x) \sin(2\pi knx) dx. \end{aligned} \quad (59)$$

Заметим теперь, что для любых k и $g(x) \in C^\infty([0, 1])$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$\int_0^1 g'''(x) \sin(2\pi knx) dx = o(1). \quad (60)$$

Учитывая (59) и (60), а также то, что $\lambda_j = \lambda(j/n)$, из тождеств (8.38), (8.56) книги [8] получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{\beta \lambda_j} &= \int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx + \frac{1}{2n} (e^{\beta \lambda(1)} - e^{\beta \lambda(0)}) \\ &+ \frac{\beta}{12n^2} (e^{\beta \lambda(1)} \lambda'(1) - e^{\beta \lambda(0)} \lambda'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (61)$$

Подставим (61) в (56). Поскольку $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + O(x^4)$, а $n = N^\alpha$, то асимптотика глобального финансового осреднения при $N \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{N}{\beta} \ln \left(\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx \right) + \frac{1}{2\beta N^{\alpha-1}} \frac{e^{\beta \lambda(1)} - e^{\beta \lambda(0)}}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} \\ &+ \frac{1}{12N^{2\alpha-1}} \frac{e^{\beta \lambda(1)} \lambda'(1) - e^{\beta \lambda(0)} \lambda'(0)}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} - \frac{1}{8\beta N^{2\alpha-1}} \left(\frac{e^{\beta \lambda(1)} - e^{\beta \lambda(0)}}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} \right)^2 \\ &+ O\left(\frac{1}{N^{3\alpha-1}}\right). \end{aligned} \quad (62)$$

Получим значение величины m , сопряженной к числу покупателей N . Эту величину будем называть *средним покупательным потенциалом*. Согласно приведенной в [6] концепции, для этого продифференцируем глобальное финансовое осреднение по N . Из (62) получим, что в

случае $\alpha \neq 1$ первые два члена асимптотики m при $N \rightarrow \infty$ имеют вид:

$$m = \frac{1}{\beta} \ln \left(\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx \right) + \frac{(1-\alpha)}{2\beta N^\alpha} \frac{e^{\beta \lambda(1)} - e^{\beta \lambda(0)}}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} + O\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right). \quad (63)$$

Если $\alpha = 1$, то из (62) следует, что

$$m = \frac{1}{\beta} \ln \left(\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx \right) - \frac{1}{12N^2} \frac{e^{\beta \lambda(1)} \lambda'(1) - e^{\beta \lambda(0)} \lambda'(0)}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} + \frac{1}{8\beta N^2} \left(\frac{e^{\beta \lambda(1)} - e^{\beta \lambda(0)}}{\int_0^1 e^{\beta \lambda(x)} dx} \right)^2 + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (64)$$

Мы получаем распределение Парето, что согласуется со статистическими данными [12]–[14].

Будем далее считать, что количество каждого товара в магазине ограничено и равно $s \geq N/n$. Такому случаю соответствует следующее локальное финансовое осреднение:

$$\mathbb{E}(s) = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{C(s)} \sum_{\{N\},s} \exp \left(\beta \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{N_k!} \right) \right), \quad (65)$$

где $\sum_{\{N\},s}$ обозначает сумму по всем наборам целых чисел $0 \leq N_j \leq s$, $j = 1, \dots, n$, удовлетворяющим условию (53), а число $C(s)$, согласно условию нормировки, имеет вид

$$C(s) = \sum_{\{N\},s} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!} \right). \quad (66)$$

Утверждение 2. Для сумм в формуле (65) справедливо тождество

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &\equiv \sum_{\{N\},s} \exp \left(\beta \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{N_k!} \right) \\ &= \frac{A^N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi_s(e^{\beta \lambda_j} e^{i\alpha}/A) \right), \end{aligned} \quad (67)$$

где $A \neq 0$ — произвольное число, а функция φ_s имеет вид $\varphi_s(y) = \ln(\sum_{n=0}^s y^n/n!)$.

Доказательство. Заметим, что для $\Sigma(s)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= \sum_{N_1=0}^s \cdots \sum_{N_n=0}^s \Delta \left(N - \sum_{j=1}^n N_j \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{\beta \lambda_k N_k}}{N_k!} \right) \\ &= A^N \sum_{N_1=0}^s \cdots \sum_{N_n=0}^s \Delta \left(\sum_{j=1}^n N_j - N \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{\beta \lambda_k N_k}}{A^{N_k} N_k!} \right), \end{aligned} \quad (68)$$

где $A \neq 0$ — произвольное число, а $\Delta(k)$ — функция целочисленного аргумента, равная 1 при $k = 0$ и 0 при $k \neq 0$:

$$\Delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{ik\alpha}. \quad (69)$$

Отсюда

$$\Sigma(s) = \frac{A^N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \prod_{j=1}^n \left(\sum_{N_j=0}^s \frac{1}{N_j!} \left(\frac{e^{\beta\lambda_j} e^{i\alpha}}{A} \right)^{N_j} \right). \quad (70)$$

Таким образом, равенство (70) совпадает с равенством (67).

Заметим, что $\Sigma(s)$ (см. 67) при $\beta = 0$ совпадает с $C(s)$ (см. 66). Поэтому $C(s)$ в силу доказанного выше утверждения представляется в виде

$$C(s) = \frac{B^N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \exp \left(-iN\alpha + n\varphi_s \left(\frac{e^{i\alpha}}{B} \right) \right). \quad (71)$$

Введенная выше функция $\varphi_s(x)$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$ и обладает следующими свойствами: $(x\varphi_s(x))' = x\varphi_s''(x) + \varphi_s'(x) > 0$ при $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} (x\varphi_s'(x)) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\varphi_s'(x)) = s$.

Найдем асимптотику локального финансового осреднения при $N \rightarrow \infty$ в случае $n = N$, $s > 1$. В этом случае интегралы в формулах (67) и (71) содержат экспоненту от величины порядка N , поэтому асимптотика локального финансового осреднения при $N \rightarrow \infty$ может быть найдена с помощью метода, развитого в теории комплексного роста [8].

Рассмотрим сначала асимптотику $C(s)$. Заметим, что при $n = N$ интеграл в формуле (71) представляется в виде $\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{NS(\alpha, B)}$, где $S(\alpha, B) = -i\alpha + \varphi_s(e^{i\alpha}/B)$. Поскольку число B в равенстве (71) является произвольным, то положим, что $B = B_s$, где B_s — положительное решение следующего уравнения:

$$\varphi_s' \left(\frac{1}{B_s} \right) \frac{1}{B_s} = 1. \quad (72)$$

Уравнение (72) при $s > 1$ имеет положительное решение, а такое решение единственно. Из (72) следует, что $S'(0, B_s) = 0$, если $B = B_s$, кроме того, непосредственными вычислениями легко убедиться, что $S''(0, B_s)$ — действительное отрицательное число, а функция $\operatorname{Re} S(\alpha, B_s)$ имеет максимум по переменной α при $\alpha = 0$. Здесь и далее во всех формулах все производные функции $S(\alpha, B)$ берутся по переменной α . Сформулированные свойства функции $S(\alpha, B)$ позволяют найти асимптотику интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{NS(\alpha, B_s)} &= e^{NS(0, B_s)} \sqrt{\frac{2\pi}{-NS''(0, B_s)}} \\ &\times \left(1 + \frac{S''''(0, B_s)}{8N(S''(0, B_s))^2} - \frac{5(S'''(0, B_s))^2}{24N(S''(0, B_s))^3} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Умножая, согласно равенству (71), левую часть равенства (73) на $B_s^N/(2\pi)$, получим асимптотику $C(s)$ при $N \rightarrow \infty$.

Теперь найдем, исходя из тех же формул (8.38) и (8.56) книги [8], асимптотику $\Sigma(s)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi_s \left(\frac{e^{\beta\lambda_j} e^{i\alpha}}{A} \right) \right). \quad (74)$$

Из (61) следует, что интеграл (74) представляется в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \exp \left(NS_0(\alpha, A) + S_1(\alpha, A) + \frac{1}{N} S_2(\alpha, A) + \frac{1}{N^2} S_3(\alpha, A) \right), \quad (75)$$

где функции $S_0(\alpha, A)$, $S_1(\alpha, A)$, $S_2(\alpha, A)$, $S_3(\alpha, A)$ выражаются следующим образом:

$$S_0(\alpha, A) = -i\alpha + \int_0^1 \varphi_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(x)} e^{i\alpha}}{A} \right) dx, \quad (76)$$

$$S_1(\alpha, A) = \frac{1}{2} \left(\varphi_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(1)} e^{i\alpha}}{A} \right) - \varphi_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(0)} e^{i\alpha}}{A} \right) \right), \quad (77)$$

$$S_2(\alpha, A) = \frac{\beta e^{i\alpha}}{12A} \left(\varphi'_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(1)} e^{i\alpha}}{A} \right) e^{\beta\lambda(1)} \lambda'(1) - \varphi'_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(0)} e^{i\alpha}}{A} \right) e^{\beta\lambda(0)} \lambda'(0) \right), \quad (78)$$

$$S_3(\alpha, A) = O(1). \quad (79)$$

Здесь число A произвольное. В частности, его можно положить для удобства равным A_s , где A_s — положительное решение уравнения

$$\int_0^1 \varphi'_s \left(\frac{e^{\beta\lambda(x)}}{A_s} \right) \frac{e^{\beta\lambda(x)}}{A_s} dx = 1. \quad (80)$$

Только в этом случае мы сможем воспользоваться асимптотическими формулами, использующими теорию комплексного роста [8]. Здесь φ'_s — производная по аргументу, стоящему в скобках.

Уравнение (80) имеет единственное положительное решение. Непосредственные вычисления позволяют убедиться, что $S'_0(\alpha, A_s) = 0$, $S''_0(\alpha, A_s)$ — действительное отрицательное число и функция $\text{Re } S_0(\alpha, A_s)$ имеет максимум по переменной α в точке $\alpha = 0$. Отметим, что здесь и далее во всех формулах производные функций $S_l(\alpha, A)$, $l = 1, 2, 3$, берутся по переменной α . Свойства функции $S_0(\alpha, A_s)$ позволяют найти следующую асимптотику интеграла (74), (75) при $N \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi_s \left(\frac{e^{\beta\lambda_j} e^{i\alpha}}{A} \right) \right) = e^{NS_0(0, A_s)} e^{S_1(0, A_s)} \sqrt{\frac{2\pi}{-NS''_0(0, A_s)}}$$

$$\times \left(1 + \frac{S_2(0, A_s)}{N} + \frac{S_0''''(0, A_s)}{8N(S_0''(0, A_s))^2} - \frac{5(S_0''''(0, A_s))^2}{24N(S_0''(0, A_s))^3} - \frac{(S_1'(0, A_s))^2}{2NS_0''(0, A_s)} + \frac{S_0''''(0, A_s)S_1'(0, A_s)}{2N(S_0''(0, A_s))^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right). \quad (81)$$

Чтобы получить асимптотику $\Sigma(s)$, в силу (67) достаточно умножить правую часть равенства (81) на $A_s^N/(2\pi)$.

Подстановка полученных асимптотик $C(s)$ и $\Sigma(s)$ в формулу (65) и разложение логарифма позволяют получить асимптотику локального финансового ожидания, аналогичную асимптотике (62) при $\alpha = 1$:

$$\mathbb{E}(s) = ND_0(s) + D_1(s) + \frac{1}{N} D_2(s) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (82)$$

где коэффициенты $D_l(s)$, $l = 0, 1, 2$, выражаются следующим образом:

$$D_0(s) = S_0(0, A_s) - S(0, B_s) + \ln\left(\frac{A_0}{B_0}\right), \quad (83)$$

$$D_1(s) = S_1(0, A_s) + \ln\left(\frac{S'''(0, B_s)}{S_0''(0, A_s)}\right), \quad (84)$$

$$\begin{aligned} D_2(s) = & \frac{S_2(0, A_s)}{N} + \frac{S_0''''(0, A_s)}{8N(S_0''(0, A_s))^2} - \frac{5(S_0''''(0, A_s))^2}{24N(S_0''(0, A_s))^3} \\ & - \frac{(S_1'(0, A_s))^2}{2NS_0''(0, A_s)} + \frac{S_0''''(0, A_s)S_1'(0, A_s)}{2N(S_0''(0, A_s))^2} - \frac{S'''(0, B_s)}{8N(S''(0, B_s))^2} \\ & + \frac{5(S'''(0, B_s))^2}{24N(S''(0, B_s))^3} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \quad (85)$$

Дифференцирование асимптотики (82) по N приводит к выражению, аналогичному (64). Таким образом, для локального среднего покупательного потенциала также имеет место *распределение Парето*.

Далее мы хотим определить по осредненному покупательному потенциалу на отдельных рынках специализированных товаров все средние расходы среднего покупателя по всем рынкам и тем самым определить его средний доход. Ясно, что мы должны сложить все расходы (покупательные потенциалы) по всем рынкам. Действительно, расходы и покупательные способности гражданина относительно автомобиля и хлеба должны складываться, но по какому закону сложения? Очевидно, в силу построенной нелинейной арифметики, они должны складываться именно по тому же нелинейному закону сложения.

Такой способ сложения отличается от глобального математического осреднения только нормировкой. Поэтому общая сумма $\tilde{\mathbb{E}}_k$ отличается от (55) только дополнительным слагаемым: $\tilde{\mathbb{E}}_k = \mathbb{E} + N \ln(n/k)$. Если k не зависит от N , а $n = N^\alpha$, $\alpha > 0$, то второе слагаемое в формуле дает главный вклад в асимптотику при $N \rightarrow \infty$. Сопряженная к N величина

в этом случае принимает вид $\tilde{m}_k = \alpha \ln(N) + m + \alpha(1 - \ln(k))$, где m выражается формулой (63) или (64). Выражение $\tilde{m}_k$ логарифмически растет с ростом N , это означает, что средний доход населения данного региона логарифмически возрастает с ростом населения, что совпадает со статистическими данными [14].

4. Расходы покупателей и скорость оборота при нелинейном финансовом осреднении. Рассмотрим следующую модель. На специализированном рынке, или в специализированном магазине, имеется $n \geq 2$ различных товаров, цену товара с номером $j = 1, \dots, n$ обозначим λ_j , кроме того, будем считать, что $0 < \lambda_j < \lambda_{j+1}$. Пусть товары разделены на две группы следующим образом: в первую группу входят товары с номерами $1 \leq j \leq n_1$, а во вторую группу — с номерами $n_1 + 1 \leq j \leq n$, здесь $1 \leq n_1 \leq n - 1$ — некоторое целое число. Будем считать, что на рынке имеется S_1 штук каждого товара из первой группы, а каждого товара из второй группы имеется S_2 штук. Пусть на рынок приходят $N \leq n_1 S_1 + n_2 S_2$, где $n_2 = n - n_1$, покупателей, каждый из которых покупает одну вещь. Рассмотрим финансовое осреднение расхода покупателей. Пусть товар с номером $j = 1, \dots, n$ купили N_j человек, в таком случае общий расход покупателей равен

$$\mathcal{E}(\{N\}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j, \quad (86)$$

где $\{N\}$ — обозначение для набора чисел $N_1, \dots, N_n$. В силу оговоренных выше свойств рассматриваемой модели для чисел N_j выполняются условия

$$\begin{aligned} 0 \leq N_j \leq S_1 & \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq n_1, \\ 0 \leq N_j \leq S_2 & \quad \text{при} \quad n_1 + 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\sum_{j=1}^n N_j = N. \quad (88)$$

Финансовое осреднение расхода (86) имеет вид

$$\mathbb{E}(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{C(N, S_1, S_2)} \sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2} e^{-\beta \mathcal{E}(\{N\})} \prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!} \right), \quad (89)$$

где $0 < \beta$ — покупательная способность рубля, т.е. количество золота или твердой валюты, которое можно купить на один рубль,

$$C(N, S_1, S_2) = \sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2} \prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!}, \quad (90)$$

а, кроме того, для суммы по всем наборам целых неотрицательных чисел $N_1, \dots, N_n$, удовлетворяющих условиям (87), (88), использовано обозначение $\sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2}$.

Заметим что знак минус перед логарифмом и в экспоненте связан с тем, что покупатели стремятся минимизировать свои расходы. Сформулируем свойства финансового осреднения расхода (89).

Утверждение 3. Если $S_1, S_2 \geq N$ и $S'_1, S'_2 \geq N$, то

$$\mathbb{E}(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \mathbb{E}(N, S'_1, S'_2, \lambda, \beta), \quad (91)$$

кроме того,

$$\mathbb{E}(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) > 0. \quad (92)$$

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения достаточно заметить, что в силу условия (88) и неотрицательности чисел N_j выполняются неравенства $N_j \leq N$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому при $S_1, S_2 \geq N$ условия (87) становятся тривиальными и не накладывают дополнительных ограничений на наборы $\{N\}$, по которым ведется суммирование в формулах (89) и (90), отсюда следует (91).

Чтобы доказать вторую часть утверждения, рассмотрим следующее неравенство:

$$0 < \frac{1}{C(N, S_1, S_2)} \sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2} e^{-\beta \mathcal{E}(\{N\})} \prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!} < e^{-\beta \lambda_1} < 1. \quad (93)$$

Неравенство (93) является следствием (88), (90) и того, что выполняются условия $0 < \beta$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Подстановка (93) в (89) приводит к (92).

Рассмотрим отдельно сумму, стоящую в формуле (89) под логарифмом:

$$\Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2} e^{-\beta \mathcal{E}(\{N\})} \prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!}. \quad (94)$$

Заметим, что для произвольных значений λ_j , $j = 1, \dots, n$, при $\beta = 0$ сумма (94) совпадает с (90):

$$\Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, 0) = C(N, S_1, S_2). \quad (95)$$

Далее для удобства записи формул используем обозначение

$$s_j = \begin{cases} S_1, & \text{если } 1 \leq j \leq n_1, \\ S_2, & \text{если } n_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Утверждение 4. Для $\Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, \beta)$ выполняется равенство

$$\Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \frac{A^N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \left(\prod_{j=1}^n \Phi_{s_j} \left(\frac{e^{i\alpha} e^{-\beta \lambda_j}}{A} \right) \right), \quad (96)$$

где $A \neq 0$ — произвольное число, а функции Φ_S имеют вид

$$\Phi_S(x) = \sum_{n=0}^S \frac{x^n}{n!}. \quad (97)$$

Доказательство. Запишем для суммы (94) следующее очевидное равенство:

$$\sum_{\{N\}}^{N, S_1, S_2} e^{-\beta \mathcal{E}(\{N\})} \prod_{j=1}^n \frac{1}{N_j!} = A^N \sum_{N_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{N_n=0}^{s_n} \Delta \left(\sum_{i=1}^n N_i - N \right) \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\beta \lambda_j N_j}}{A^{N_j} N_j!}, \quad (98)$$

где $A \neq 0$ — произвольное число, $\Delta(N)$ — следующая функция целочисленного аргумента:

$$\Delta(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 0, \\ 0, & \text{если } N \neq 0. \end{cases} \quad (99)$$

Функция (99) представляется в виде

$$\Delta(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iN\alpha} d\alpha. \quad (100)$$

Подстановка равенства (100) в формулу (98), изменение порядка суммирования и интегрирования и учет определения (97) приводят к равенству (96).

Теорема 2. *Финансовое осреднение расхода (89) при заданных значениях $N, S_1, S_2, n_1, \lambda_j, j = 1, \dots, n$, является убывающей функцией переменной β .*

Доказательство. Пусть $x_k, g_k, k = 1, \dots, L$, — два набора чисел, удовлетворяющие условиям

$$x_k > 0, \quad \sum_{k=1}^L x_k = 1; \quad g_k > 0, \quad \sum_{k=1}^L g_k = 1. \quad (101)$$

Рассмотрим следующие функции:

$$f_1(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\sum_{k=1}^L g_k e^{-\beta x_k} \right), \quad (102)$$

$$f_2(t) = f_1\left(\frac{1}{t}\right) = -t \ln \left(\sum_{k=1}^L g_k \exp \left(-\frac{x_k}{t} \right) \right). \quad (103)$$

Рассмотрим производную функции (103):

$$f_2'(t) = -\ln \left(\sum_{k=1}^L g_k \exp \left(-\frac{x_k}{t} \right) \right) - \frac{1}{t} \frac{\sum_{k=1}^L x_k g_k \exp(-x_k/t)}{\sum_{l=1}^L g_l \exp(-x_l/t)}. \quad (104)$$

Из (101) для функции (104) следует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2'(t) = 0. \quad (105)$$

Также рассмотрим вторую производную:

$$\begin{aligned} f_2''(t) &= -\frac{1}{t^3} \frac{\sum_{k=1}^L x_k^2 g_k \exp(-x_k/t)}{\sum_{l=1}^L g_l \exp(-x_l/t)} + \frac{1}{t^3} \left(\frac{\sum_{k=1}^L x_k g_k \exp(-x_k/t)}{\sum_{l=1}^L g_l \exp(-x_l/t)} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{t^3} \sum_{k=1}^L h_k (x_k - \bar{x})^2, \end{aligned} \quad (106)$$

где

$$h_k = \frac{g_k \exp(-x_k/t)}{\sum_{l=1}^L g_l \exp(-x_l/t)}, \quad (107)$$

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^L h_k x_k. \quad (108)$$

По определению (107) числа h_k удовлетворяют условиям $h_k > 0$, $\sum_{k=1}^L h_k = 1$ (см. 101), поэтому из (106) следует, что при $t > 0$ выполняется неравенство

$$f_2''(t) < 0. \quad (109)$$

Из (109) следует, что первая производная (104) является убывающей функцией при $t > 0$. Отсюда в силу (105) вытекает, что при $t > 0$

$$f_2'(t) > 0. \quad (110)$$

Используя равенство

$$f_1'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} f_2'\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (111)$$

из (110) получим, что при $\beta > 0$ выполняется неравенство

$$f_1'(\beta) < 0. \quad (112)$$

Заметим теперь, что финансовое осреднение расхода (89) при любых значениях $N, S_1, S_2, n_1, \lambda_j, j = 1, \dots, n$, имеет вид (102). Отсюда в силу (112) следует утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь финансовое осреднение расхода в пределе при $N \rightarrow \infty$. Будем считать, что S_1 и S_2 зависят от N следующим образом:

$$S_1 = c_1 N, \quad S_2 = c_2 N, \quad (113)$$

где c_1, c_2 — постоянные. Используем далее обозначение

$$\gamma_j = \begin{cases} c_1, & \text{если } 1 \leq j \leq n_1, \\ c_2, & \text{если } n_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (114)$$

Теорема 3. Пусть c_1 и c_2 таковы, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sum_{j \notin J} \gamma_j \frac{e^{-\beta \lambda_k}}{\gamma_k}}{\sum_{k \in J} e^{-\beta \lambda_k}} &< 1 & \text{при } k \in J, \\ \frac{1 - \sum_{j \notin J} \gamma_j \frac{e^{-\beta \lambda_k}}{\gamma_k}}{\sum_{k \in J} e^{-\beta \lambda_k}} &> 1 & \text{при } k \notin J, \end{aligned} \quad (115)$$

где J — подмножество множества $1, \dots, n$. Тогда асимптотика суммы (94) при $N \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \frac{e^N}{\sqrt{2\pi N N^N}} \frac{a^N}{\sqrt{1 - \sum_{j \notin J} \gamma_j}} \times \left(\prod_{i \notin J} \left(\frac{e^{-\beta \lambda_i}}{a \gamma_i} \right)^{N \gamma_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \gamma_i}} \frac{1}{1 - a \gamma_i e^{\beta \lambda_i}} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad (116)$$

где

$$a = \frac{\sum_{i \in J} e^{-\beta \lambda_i}}{1 - \sum_{j \notin J} \gamma_j}. \quad (117)$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Используем равенство (96). Для этого сначала получим оценку для функций (97). Рассмотрим $\Phi_S(B)$ в случае, когда $S \rightarrow \infty$ и B зависит от S следующим образом:

$$B = bS. \quad (118)$$

Пусть $b < 1$, в этом случае

$$\Phi_S(B) = e^B - \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{B^n}{n!}. \quad (119)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (119) представим в виде

$$\frac{B^S}{S!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{S^k} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + i/S}. \quad (120)$$

Воспользуемся следующей цепочкой неравенств:

$$0 < 1 - \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + i/S} < 1 - \frac{1}{(1 + k/S)^k} < \frac{k^2}{S}. \quad (121)$$

Последнее неравенство в (121) является следствием того, что функция $y(x) = 1 - (1 + x)^{-n}$ при любом $n > 0$ является выпуклой вверх. Применяя (121) к (120), получим из (119) асимптотическую формулу

$$\Phi_S(B) = e^B - \frac{B^S}{S!} \frac{b}{1 - b} \left(1 + O\left(\frac{1}{S}\right) \right). \quad (122)$$

Аналогично рассмотрим случай $b > 1$. В этом случае функцию $\Phi_S(B)$ представим в виде

$$\Phi_S(B) = \frac{B^S}{S!} \sum_{k=0}^S \left(\frac{S}{B} \right)^k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{S} \right). \quad (123)$$

Воспользуемся неравенствами

$$0 < 1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{S} \right) < 1 - \left(1 - \frac{k-1}{S} \right)^{k-1} < \frac{(k-1)^2}{S}, \quad (124)$$

где $k > 1$. Последнее неравенство в (124) является следствием того, что функция $y(x) = 1 - (1 - x)^k$ при $x < 1$ и $k > 1$ является выпуклой вверх. Подставляя (124) в (123), получим следующую асимптотику:

$$\Phi_S(B) = \frac{B^S}{S!} \frac{1}{1 - 1/b} \left(1 + O\left(\frac{1}{S}\right) \right). \quad (125)$$

Выберем в формуле (96) A в виде $A = Na$ и подставим в (96) асимптотики (122) и (125), учитывая при этом (115). Получим интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Sigma(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) &= \frac{(aN)^N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \exp \left(-iN\alpha + iN\alpha \sum_{j \notin J} \gamma_j + \frac{N}{a} \sum_{j \in J} e^{-\beta\lambda_j} e^{i\alpha} \right) \\ &\times \prod_{k \notin J} \frac{e^{-\beta\lambda_k}}{(Na)^{N\gamma_k} s_k!} \frac{1}{1 - a\gamma_k e^{\beta\lambda_k} e^{-i\alpha}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right). \end{aligned} \quad (126)$$

Функция под знаком экспоненты имеет максимум действительной части в точке $\alpha = 0$, а производная ее мнимой части в этой точке равна 0, поэтому для нахождения асимптотики интеграла (126) применим метод Лапласа. Применение метода Лапласа к интегралу (126) и учет асимптотической формулы Стирлинга для факториала приводят к выражению (116).

Из формулы (95) следует, что теорема 3 позволяет также находить асимптотику выражения (90). Подстановка асимптотики вида (116) выражений (90) и (94) в (89) приводит к тому, что асимптотика финансового осреднения расхода имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) &= Nm(c_1, c_2, \lambda, \beta) + \frac{1}{2\beta} k(c_1, c_2, \lambda, \beta) \ln(N) \\ &+ l(c_1, c_2, \lambda, \beta) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (127)$$

Явный вид функции $l(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ не является существенным для дальнейшего, а функции $m(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ и $k(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned} m(c_1, c_2, \lambda, \beta) &= m_1(c_1, c_2, \lambda, \beta) - m_2(c_1, c_2, \lambda, \beta), \\ k(c_1, c_2, \lambda, \beta) &= k_1(c_1, c_2, \lambda, \beta) - k_2(c_1, c_2, \lambda, \beta), \end{aligned} \quad (128)$$

где

$$\begin{aligned} m_1(c_1, c_2, \lambda, \beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln a + c_1 \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i + \frac{p_1 c_1}{\beta} \ln(ac_1) \\ &+ c_2 \sum_{i=n_1+1}^{p_2} \lambda_i + \frac{(p_2 - n_1)c_2}{\beta} \ln(ac_2), \end{aligned} \quad (129)$$

$$k_1(c_1, c_2, \lambda, \beta) = p_1 + p_2 - n_1 \quad (130)$$

и

$$a = \frac{1}{1 - c_1 p_1 - c_2 (p_2 - n_1)} \left(\sum_{i=p_1+1}^{n_1} e^{-\beta \lambda_i} + \sum_{i=p_2+1}^n e^{-\beta \lambda_i} \right). \quad (131)$$

В формулах (128)–(131) p_1 и p_2 — целые числа, которые зависят от c_1, c_2, λ, β и однозначно определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} 1 \leq p_1 \leq n_1, \quad e^{-\beta \lambda_{p_1+1}} < a c_1 < e^{-\beta \lambda_{p_1}}, \\ n_1 + 1 \leq p_2 \leq n, \quad e^{-\beta \lambda_{p_2+1}} < a c_2 < e^{-\beta \lambda_{p_2}}. \end{aligned} \quad (132)$$

Вид функций $m_2(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ и $k_2(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ зависит от значений c_1 и c_2 следующим образом. Если выполняются условия

$$c_1 > n^{-1}, \quad c_2 > n^{-1},$$

то

$$m_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = -\frac{1}{\beta} \ln(n), \quad k_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = 0.$$

Если выполняется

$$c_1 > n^{-1}, \quad c_2 < n^{-1},$$

то

$$m_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = -\frac{1}{\beta} \ln(b) + \frac{n_2 c_2}{\beta} \ln(bc_2), \quad k_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = n_2,$$

где

$$b = \frac{n_1}{1 - c_2 n_2}.$$

В случае, когда выполняются условия

$$c_1 < n^{-1}, \quad c_2 > n^{-1},$$

функции m_2 и k_2 выражаются формулами

$$m_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = -\frac{1}{\beta} \ln(b) + \frac{n_1 c_1}{\beta} \ln(bc_1), \quad k_2(c_1, c_2, \lambda, \beta) = n_1,$$

где

$$b = \frac{n_2}{1 - c_1 n_1}.$$

Из теоремы 2 следует, что $m(c_1, c_2, \lambda, \beta)$ при фиксированных c_1, c_2, λ является убывающей функцией переменной β . Этот факт имеет простую экономическую интерпретацию: если покупательная способность рубля β растет, то покупатель тратит на покупку меньшее количество рублей.

Введем теперь понятия *расхода одного человека* и *скорости оборота*. Расходом одного человека будем называть следующее выражение:

$$M(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(N + 1, S_1, S_2, \lambda, \beta) - \mathbb{E}(N - 1, S_1, S_2, \lambda, \beta)).$$

Скоростью оборота будем называть выражение

$$V(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = \frac{\partial}{\partial N} M(N, S_1, S_2, \lambda, \beta).$$

Из (127) следует, что расход одного человека при $N \rightarrow \infty$ имеет вид

$$M(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = m(c_1, c_2, \lambda, \beta) + \frac{1}{2\beta N} k(c_1, c_2, \lambda, \beta) + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

а скорость оборота есть

$$V(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = -\frac{1}{2\beta N^2} k(c_1, c_2, \lambda, \beta) + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (133)$$

В общем случае выражение (133) слишком сложное для аналитического исследования. Рассмотрим случай, когда $n_2 = n_1 = n/2$. В этом случае из (133) следует, что максимальное значение главного члена асимптотики скорости оборота равно

$$V(N, S_1, S_2, \lambda, \beta) = -\frac{n}{4\beta N^2} \quad (134)$$

и достигается при

$$c_1 = \frac{e^{-\beta\lambda_1}}{\sum_{j=1}^n e^{-\beta\lambda_j}}, \quad c_2 = \frac{e^{-\beta\lambda_{n_1+1}}}{\sum_{j=1}^n e^{-\beta\lambda_j}}. \quad (135)$$

Из (135) следует, что одним из условий максимальности скорости оборота является следующее: число дешевых товаров должно быть больше, чем число дорогих.

Далее покупателя акций будем называть игроком. Пусть существует всего два типа акций, первый условно будем называть «дешевыми» акциями, а второй — «дорогими». Будем считать, что игрок покупает пакет из N акций, в котором количество дешевых акций равно N_1 , а количество дорогих акций соответственно равно $N_2 = N - N_1$. Игрок тратит деньги на покупку акций, при этом покупаемое количество акций оказывает влияние на цену акций обоих типов. В частности, чем больше дорогих акций покупает игрок, тем дешевле их ему продадут. Поэтому далее будем считать, что расход игрока на пакет акций зависит от количества купленных дешевых и дорогих акций нелинейно. Например, квадратичным образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(N_1) &= \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 - \frac{\gamma N_1^2}{2N} - \frac{\gamma N_2^2}{2N} \\ &= \lambda_2 N - \frac{\gamma N}{2} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma) N_1 - \frac{\gamma N_1^2}{2N}, \end{aligned} \quad (136)$$

где числа $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 < \lambda_2, \quad \lambda_2 - \lambda_1 < \gamma. \quad (137)$$

Из условий (137) следует, что функция (136) при $N_1 = 0, 1, \dots, N$ имеет глобальный минимум при $N_1 = N$ и локальный минимум при $N_1 = 0$. Это означает, что хотя расход покупателя минимален, если он купил только дешевые акции, однако купить только дорогие акции тоже в некотором смысле выгодно.

Рассмотрим теперь локальные финансовые осреднения дохода игрока. Будем считать, что дешевые акции игрок может купить у G_1 дилеров, а дорогие — у G_2 дилеров. В таком случае количество разных способов, которым игрок может купить пакет акций, равно

$$\Gamma(N_1) = \frac{(N_1 + G_1 - 1)! (N - N_1 + G_2 - 1)!}{(G_1 - 1)! N_1! (G_2 - 1)! (N - N_1)!}. \quad (138)$$

З а м е ч а н и е. Вместо введения разных дилеров можно было бы считать, что самих дешевых и дорогих акций соответственно G_1 и G_2 разных типов, которые стоят одинаково.

Кроме того, будем считать, что игрок действует следующим образом: в начальный момент времени игрок покупает некоторый пакет акций, а затем на каждом временном шаге он продает одну акцию одного типа и покупает одну акцию другого типа так, чтобы его расход при этом уменьшился. То есть игрок не рассматривает перспективу, а на каждом шаге действует так, чтобы минимизировать свой расход. Локальное финансовое осреднение расхода игрока в таком случае равно

$$\mathbb{E}(N_1^0, \beta) = -\ln \left(\sum_{N_1 \in I(N_1^0)} \Gamma(N_1) e^{-\beta \mathcal{E}(N_1)} \right) = -\ln \left(\sum_{N_1 \in I(N_1^0)} e^{-\beta F(N_1, \beta)} \right), \quad (139)$$

где β — покупательная способность рубля, функция $F(N_1, \beta)$ выражается формулой

$$F(N_1, \beta) = \mathcal{E}(N_1) - \frac{1}{\beta} \ln(\Gamma(N_1)),$$

а $I(N_1^0)$ обозначает множество, образованное набором чисел N_{1a} , $a = 0, 1, \dots, A$, таких, что выполняются условия

$$|N_{1a} - N_{1,a+1}| = 1, \quad F(N_{1,a+1}, \beta) < F(N_{1a}, \beta), \quad a = 0, 1, \dots, A-1,$$

$$F(N_{1A}) < F(N_{1A} \pm 1) \quad \text{и} \quad N_{10} = N_1^0.$$

Рассмотрим локальные финансовые осреднения (139) в пределе при $N \rightarrow \infty$. Будем при этом считать, что G_1 и G_2 зависят от N так, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G_1}{N} = g_1 > 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G_2}{N} = g_2 > 0.$$

В таком случае асимптотика локальных финансовых осреднений расхода (139) определяется минимальными значениями следующей

функции:

$$f(n, \beta) = \lambda_2 - \frac{\gamma}{2} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma)n - \frac{\gamma n^2}{2} - \frac{1}{\beta} \left((g_1 + n) \ln \left(1 + \frac{n}{g_1} \right) - n \ln \left(\frac{n}{g_1} \right) + (g_2 + 1 - n) \ln \left(1 + \frac{1-n}{g_2} \right) - (1-n) \ln \left(\frac{1-n}{g_2} \right) \right), \quad (140)$$

где n принимает значения на отрезке $[0, 1]$. Оказывается, что существует критическое значение $\beta_c(\lambda_1, \lambda_2, \gamma, g_1, g_2)$ покупательной способности рубля. При $\beta > \beta_c$ функция (140) имеет на отрезке $n \in [0, 1]$ два минимума — глобальный и локальный, — а, кроме того, между этими минимумами находится точка максимума. Пусть минимумы функции (140) находятся в точках $n_1(\beta)$ и $n_2(\beta)$, а максимум — в точке $n_3(\beta)$, причем $n_1 < n_3 < n_2$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. При $N \rightarrow \infty$ и $\beta > \beta_c$ все значения N_1^0 делятся на две части таким образом, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbb{E}(N_1^0, \beta) &\approx f(n_1(\beta), \beta) && \text{при } N_1^0 < N n_3(\beta), \\ \frac{1}{N} \mathbb{E}(N_1^0, \beta) &\approx f(n_2(\beta), \beta) && \text{при } N_1^0 > N n_3(\beta). \end{aligned}$$

При $\beta \rightarrow \beta_c + 0$ локальный минимум и максимум сливаются и при $\beta < \beta_c$ перестают существовать. Таким образом, если покупательная способность рубля меньше критической, функция (140) имеет на отрезке $[0, 1]$ только одну точку экстремума — глобальный минимум. Обозначим эту точку через $n_0(\beta)$.

Утверждение 6. При $N \rightarrow \infty$ и $\beta < \beta_c$ для всех значений N_1^0 выполняется

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}(N_1^0, \beta) \approx f(n_0(\beta), \beta).$$

Исчезновение локального минимума при уменьшении покупательной способности рубля можно интерпретировать как «пробой акций». А именно, игрок, который в результате своей стратегии получения выигрыша на каждом шаге оказался в локальном минимуме, при достижении критического значения покупательной способности рубля уже больше не находится в точке минимума расходов, и поэтому из стремления к выгоде такой игрок должен совершить скачек в точку глобального минимума.

Аналогично можно рассмотреть случай N покупателей, которые покупают два разных товара. При этом покупатели изменяют количество покупаемого товара, чтобы минимизировать расход, но делают это медленно, из-за чего при уменьшении покупательной стоимости рубля происходит дефолт.

В этом случае изменятся кратности (138), которые уже будут иметь не бозонный, а бoльцмановский вид:

$$\Gamma(N_1) = N! \frac{G_1^{N_1}}{N_1!} \frac{G_2^{N-N_1}}{(N-N_1)!}.$$

Соответственно изменится и функция (140), в бoльцмановском случае она примет вид

$$f(n, \beta) = \lambda_2 - \frac{\gamma}{2} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma)n - \frac{\gamma n^2}{2} + \frac{1}{\beta} \left(n \ln \left(\frac{n}{g_1} \right) + (1-n) \ln \left(\frac{1-n}{g_2} \right) \right). \quad (141)$$

Все остальное сказанное выше относительно критической покупательной способности и локальных финансовых осреднений остается в силе. Зависимость точек экстремума функции (141) от покупательной способности рубля можно интерпретировать как лагранжево многообразие (ср. с [23, рис. 1]). Можно считать, что при $\beta > \beta_c$ существуют три ветви лагранжева многообразия: $n_1(\beta)$, $n_2(\beta)$ и $n_3(\beta)$. При $\beta = \beta_c$ две из этих ветвей приходят в одну точку и при $\beta > \beta_c$ перестают существовать, остается только одна ветвь $n_0(\beta)$. В силу свойств функции (141) проекция двух сливающихся ветвей и проекция третьей ветви на ось n не пересекаются ни в одной точке. Это означает, что при достижении критической покупательной способности происходит дефолт. Так как проекции на ось n разных ветвей лагранжева многообразия не пересекаются, то покупатели не могут за счет малого изменения количества покупаемого товара изменить покупательную способность рубля и перейти с одной ветви на другую. Поэтому при достижении критического значения покупательной способности рубля исчезновение ветвей лагранжева многообразия означает исчезновение состояния равновесия для покупателей, находившихся на этих ветвях.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность В. Н. Батурину и С. Г. Лебедеву, которые инициировали реанимацию моих работ 1987–1990 годов (см. [24]), приведших к правильному прогнозированию сегодняшней экономической ситуации в стране, а также Г. В. Ковалю за помощь в подготовке данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вьюгин В. В., Маслов В. П. Об экстремальных соотношениях между аддитивными функциями потерь и колмогоровской сложностью. — Проблемы передачи информации, 2003, т. 39, № 4, с. 71–87.
2. Маслов В. П., Черный А. С. О минимизации и максимизации энтропии в различных дисциплинах. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 3, с. 466–486.

3. Маслов В. П. Замечание о компьютерно-ориентированном языке. — Проблемы передачи информации, 2003, т. 39, № 3, с. 72–76.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
5. Маслов В. П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и аналог фазового перехода. — Докл. РАН, 2003, т. 393, № 6, с. 735–739.
6. Маслов В. П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 799–810.
7. Maslov V. P. The notions of entropy, Hamiltonian, temperature, and thermodynamical limit in probability theory used for solving model problems in econophysics. — Russian J. Math. Phys., 2002, v. 9, № 4, p. 437–445.
8. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973, 544 с.
9. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977, 368 с.
10. Маслов В. П. Зависимость покупательной способности и среднего дохода населения от числа покупателей на специализированном рынке и в регионе. Законы эконофизики. — Докл. РАН, 2004, т. 395, № 2, с. 164–168.
11. Маслов В. П. Расходы покупателей и скорость оборота при нелинейном финансовом осреднении. Законы эконофизики. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 2 (в печати).
12. Dragulescu A., Yakovenko V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in United Kingdom and the United States. — Phys. A, 2001, v. 299, p. 213–221.
13. Чеботарев А. М. Распределение Парето как результат компьютерной реконструкции статистики авторынга России. — Укр. журн. «Економіст», 2003, № 7, с. 6–9.
14. Лощинин М. Закон Парето: потребность переоткрытия. — Укр. журнал «Економіст», 2003, № 2, с. 58–68.
15. Reed W. J. The Pareto law of incomes — an explanation and an extension. — Phys. A, 2003, v. 319, № 1–4, p. 469–486.
16. Nagahara Yu., Okazaki M. Pareto's law for income of individuals and debt of bankrupt companies Hideaki Aoyama and Wataru Souma. — Fractals, 2000, v. 8, № 3, p. 293–300.
17. Sornette D., Zajdenweber D. Economic returns of research: the Pareto law and its implications. — European Phys. J. B, 1999, v. 8, p. 653–664.
18. Dagum C. A systemic approach to the generation of income distribution models. — J. Income Distribution, 1996, v. 6, № 1, p. 105–126.
19. Pareto V. Cours d'économie politique. V. 2. Paris: F. Pichou, 1897.
20. Маслов В. П. Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 403–411.
21. Маслов В. П. Аппроксимационные вероятности, закон квазистабильного рынка и фазовый переход из «конденсатного» состояния. — Докл. РАН, 2003, т. 392, № 6, с. 727–732.
22. Маслов В. П. Среднестатистическая информация относительно выпуклой функции и общие линейные уравнения для пространства $\min, \max$. — Докл. РАН, 2003, т. 393, № 1, с. 20–24.
23. Маслов В. П. Об одной модели высокотемпературной сверхпроводимости. — Докл. РАН, 2003, т. 391, № 5, с. 605–609.
24. Маслов В. П. Экспертизы и эксперименты. — Новый мир, 1991, № 1, с. 243–252.

Поступила в редакцию
23.IV.2004