Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Селиванов, О мартингальных мерах в экспоненциальных моделях Леви, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 317–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 09:26:48

© 2004 г.

СЕЛИВАНОВ А. В.*

О МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕРАХ В
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ЛЕВИ

В работе изучается проблема существования и единственности мартингальных мер в экспоненциальных моделях Леви вида

$$S_t = e^{X_t}, \quad S_t = e^{X_{\tau_t}},$$

где X — процесс Леви, τ — неубывающий процесс, не зависящий от X .

Ключевые слова и фразы: фундаментальная теорема теории арбитража, экспоненциальная модель Леви, мартингальная мера, сигма-мартингальная мера, равномерно интегрируемая мартингальная мера.

1. Введение

В финансовой математике важную роль играет вопрос существования и единственности мартингальной меры в различных моделях цен. Это вопрос о наличии арбитража и полноте в соответствующей модели рынка (см. [11, гл. V, VII]).

В данной работе мы даем ответ на этот вопрос для следующих двух моделей цен, популярных в современной финансовой математике (см. [2], [3], [9], [11]).

1. Экспоненциальная модель Леви, т.е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид

$$S_t = e^{X_t}, \tag{1.1}$$

где X — процесс Леви.

2. Экспоненциальная модель Леви с заменой времени, т.е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид

$$S_t = e^{(X \circ \tau)_t}, \tag{1.2}$$

---

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: a_seliv@mech.math.msu.su

где X — процесс Леви, τ — неубывающий процесс, не зависящий от X , $(X \circ \tau)_t = X_{\tau_t}$ (эта модель была введена в [3]).

Мы рассмотрим случаи как конечного, так и бесконечного временного горизонта.

Классы мартингалов, которые мы будем изучать, — это классы, возникающие в фундаментальной теореме теории арбитража (ФТТА). Для случая непрерывного времени эта теорема может быть сформулирована разными способами. Предположим, что процесс дисконтированной цены S является семимартингалом.

В традиционной ФТТА, полученной Ф. Делбаеном и В. Шахермайером в [6], утверждается, что в модели $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \in [0, T]})$ отсутствует *бесплатный ленч с исчезающим риском* (или, эквивалентно, *бесплатный ленч с ограниченным риском*) тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$, где

$$\mathcal{M}_\sigma = \{\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}: S \text{ является } (\mathcal{F}_t, \mathbf{Q})\text{-}\sigma\text{-мартингалом}\} \quad (1.3)$$

(элемент из $\mathcal{M}_\sigma$ называется *σ -мартингальной мерой*). Этот же результат справедлив и для модели с бесконечным временным горизонтом.

Однако понятие арбитража может быть введено иначе, чем это делается в [6] (см. [11, гл. VII, § 2]). В некоторых случаях (см., например, [14]) ФТТА для моделей с конечным временным горизонтом формулируется с использованием множества

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}: S \text{ является } (\mathcal{F}_t, \mathbf{Q})\text{-мартингалом}\} \quad (1.4)$$

(элемент из $\mathcal{M}$ называется *мартингальной мерой*).

В силу некоторых соображений оказывается полезным рассматривать следующее множество для моделей с бесконечным временным горизонтом:

$$\mathcal{UM} = \{\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}: S \text{ является } (\mathcal{F}_t, \mathbf{Q})\text{-равномерно интегрируемым мартингалом}\} \quad (1.5)$$

(элемент из $\mathcal{UM}$ называется *равномерно интегрируемой мартингальной мерой*).

Заметим, что множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{UM}$ могут быть рассмотрены вместо $\mathcal{M}_\sigma$ в традиционной ФТТА при некоторых дополнительных ограничениях на модель (см. [5]).

В этой работе мы изучаем проблему существования и единственности σ -мартингальной, мартингальной и равномерно интегрируемой мартингальной меры для моделей (1.1) и (1.2) с конечным и бесконечным временным горизонтом. Единственная нерешенная проблема — это изучение $\mathcal{M}_\sigma$ для модели (1.2) с бесконечным временным горизонтом (см. таблицу 1).

Модель	Конечный временной горизонт		Бесконечный временной горизонт	
	$\mathcal{M}_\sigma$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}_\sigma$	$\mathcal{U}\mathcal{M}$
$S_t = e^{X_t}$	3.1	3.2	4.1	4.2
$S_t = e^{(X_{\sigma\tau})_t}$	5.1	5.2		6

Таблица 1. Структурная таблица моделей, рассматриваемых в работе. Номер в ячейке означает пункт, в котором рассматривается соответствующая модель. Например, класс σ -мартингалных мер для модели (1.1) с конечным временным горизонтом исследуется в п. 3.1.

2. Вспомогательные определения и результаты

В этом разделе мы приводим некоторые определения и результаты, которые будут использованы в дальнейших рассуждениях.

2.1. Процессы Леви. Пусть h — функция усечения, т.е. ограниченная функция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ такая, что $h(x) = x$ в некоторой окрестности нуля. Обозначение $X \sim (b, c, \nu)_h$ означает, что X — это процесс Леви с характеристиками (b, c, ν) относительно функции усечения h , т.е.

$$\mathbf{E}e^{i\lambda X_t} = \exp\left\{t \cdot \left[i\lambda b - \frac{\lambda^2}{2}c + \int_{\mathbf{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x))\nu(dx)\right]\right\}, \quad t \geq 0$$

(если $\int_{-1}^1 |x|\nu(dx) < \infty$, мы можем взять $h = 0$). Всюду далее H обозначает каноническую функцию усечения, т.е. $H(x) = xI(|x| \leq 1)$. Понятие $\mathbf{Q}$ -мартингала (локального, σ -мартингала) означает, что процесс является $\mathbf{Q}$ -мартингалом (локальным, σ -мартингалом) на своей натуральной фильтрации.

Предложение 2.1. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_h$. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} < \infty$. Тогда

(i) для любого $t \geq 0$ мы имеем

$$\mathbf{E}e^{X_t} = \exp\left\{t \cdot \left[b + \frac{c}{2} + \int_{\mathbf{R}} (e^x - 1 - h(x))\nu(dx)\right]\right\};$$

(ii) e^X — мартингал (относительно своей натуральной фильтрации) тогда и только тогда, когда

$$b + \frac{c}{2} + \int_{\mathbf{R}} (e^x - 1 - h(x))\nu(dx) = 0.$$

Доказательство. (i) См. [10, теорема 25.17] или [11, гл. VII, § 3с, п. 4].

(ii) Это утверждение следует из (i).

Предложение 2.2. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_h$. Процесс X является неубывающим тогда и только тогда, когда $c = 0$, $\nu((-\infty, 0)) = 0$, $\int_{[0,1]} x \nu(dx) < \infty$ и $b - \int_{\mathbf{R}_+} h(x) \nu(dx) \geq 0$.

Доказательство см. в [10, теорема 21.5].

Предложение 2.3. Пусть $(X_t)_{t \in [0, T]}$ — процесс Леви по мере $\mathbf{P}$ с характеристиками $(b, c, \nu)_h$. Пусть число λ таково, что

$$\int_{\mathbf{R}} |e^{\lambda x}(e^x - 1) - h(x)| \nu(dx) < \infty$$

и

$$b + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) c + \int_{\mathbf{R}} (e^{\lambda x}(e^x - 1) - h(x)) \nu(dx) = 0.$$

Определим меру $\mathbf{P}^\lambda = k e^{\lambda X_T} \mathbf{P}$, где k — нормирующая постоянная. Тогда процесс $(e^{X_t})_{t \in [0, T]}$ является $\mathbf{P}^\lambda$ -мартингалом.

Доказательство см. в [11, гл. VII, § 3с, теорема 4].

Обозначим через $D(\mathbf{R}_+)$ ($D([0, T])$) пространство càdlàg функций (т.е. функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева) из $\mathbf{R}_+$ (из отрезка $[0, T]$) в $\mathbf{R}$.

Предложение 2.4. Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на пространстве $D(\mathbf{R}_+)$ такая, что канонический процесс X (т.е. процесс, определяемый по формуле $X_t(\omega) = \omega(t)$) является $\mathbf{P}$ -процессом Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_h$. Пусть $\tilde{\nu}$ — мера Леви, $\tilde{\nu} \sim \nu$ и

$$\int_{\mathbf{R}} \left| h(x) \left(1 - \frac{d\tilde{\nu}}{d\nu}(x) \right) \right| \nu(dx) < \infty, \quad \int_{\mathbf{R}} \left(1 - \sqrt{\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu}(x)} \right)^2 \nu(dx) < \infty.$$

Тогда существует мера $\tilde{\mathbf{P}} \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}$ (знак « $\stackrel{\text{loc}}{\sim}$ » используется для локальной эквивалентности относительно канонической фильтрации на $D(\mathbf{R}_+)$) такая, что X является $\tilde{\mathbf{P}}$ -процессом Леви с характеристиками $(\tilde{b}, c, \tilde{\nu})_h$, где $\tilde{b} = b + \int_{\mathbf{R}} h(x) (\tilde{\nu} - \nu)(dx)$.

Доказательство см. в [8, теорема 4.39].

З а м е ч а н и е. Мера Леви $\tilde{\nu} \sim \nu$, совпадающая с ν в окрестности нуля, удовлетворяет условиям предложения 2.4.

Локально мартингальной мерой для процесса мы будем называть меру Q , эквивалентную исходной, относительно которой процесс является Q -локальным мартингалом.

Через δ_a мы будем обозначать дельта-меру в точке a .

Лемма 2.1. (i) Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на пространстве $D([0, T])$ или $D(\mathbf{R}_+)$ такая, что канонический процесс X является $\mathbf{P}$ -процессом Леви с характеристиками $(b, 0, \alpha \delta_a)_0$, $b = -\alpha(e^a - 1)$. Тогда мера $\mathbf{P}$ — единственная локально мартингальная мера для процесса $S_t = e^{X_t}$. Мера $\mathbf{P}$ является также единственной мартингальной мерой для процесса S .

(ii) Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на пространстве $D([0, T])$ или $D(\mathbf{R}_+)$ такая, что канонический процесс X является $\mathbf{P}$ -процессом Леви с характеристиками $(-c/2, c, 0)_0$. Тогда мера $\mathbf{P}$ — единственная локально мартингальная мера для процесса $S_t = e^{X_t}$. Мера $\mathbf{P}$ является также единственной мартингальной мерой для процесса S .

Доказательство. Сначала заметим, что, по предложению 2.1, мера $\mathbf{P}$ в (i) и (ii) является мартингальной для процесса S . Далее, если $X \equiv 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., то утверждения очевидны. Поэтому мы будем предполагать, что $X \not\equiv 0$.

(i) Известно, что $X_t = aN_t + bt$, где N — пуассоновский процесс с параметром α относительно меры $\mathbf{P}$. По формуле Ито, имеем

$$dS_t = de^{aN_t + bt} = (e^a - 1) S_{t-} dN_t + bS_{t-} dt = (e^a - 1) S_{t-} d(N_t - \alpha t). \quad (2.1)$$

Предположим, что существует мера $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ такая, что процесс S является $\mathbf{Q}$ -локальным мартингалом. Из (2.1) следует, что $(N_t - \alpha t)$ является (с точностью до константы) стохастическим логарифмом от процесса S . Значит, $(N_t - \alpha t)$ также является $\mathbf{Q}$ -локальным мартингалом (см. [8, гл. II, теорема 8.3]). Поэтому (αt) есть $\mathbf{Q}$ -компенсатор точечного процесса N . Согласно [8, гл. II, теорема 4.5], процесс N — пуассоновский с параметром α относительно меры $\mathbf{Q}$. Таким образом, распределения канонического процесса по мерам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ совпадают, т.е. $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$.

(ii) Известно, что $X_t = \sqrt{c}B_t - ct/2$, где B — броуновское движение относительно меры $\mathbf{P}$. По формуле Ито, имеем

$$dS_t = de^{X_t} = \sqrt{c} S_t dB_t. \quad (2.2)$$

Предположим, что существует мера $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ такая, что процесс S является $\mathbf{Q}$ -локальным мартингалом. Из (2.2) следует, что B также является $\mathbf{Q}$ -локальным мартингалом (см. [8, гл. II, теорема 8.3]). Известно, что для любого t

$$\sum_{t_{i-1}, t_i \in T^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \langle B \rangle_t = t,$$

где $T^n = \{(t_1, \dots, t_n): 0 = t_1 < \dots < t_n = t\}$ и

$$d(T^n) = \max_{t_{i-1}, t_i \in T^n} |t_i - t_{i-1}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{t_{i-1}, t_i \in T^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{Q}} \langle B \rangle_t = t.$$

Итак, B — непрерывный $\mathbf{Q}$ -локальный мартингал с квадратической вариацией $\langle B \rangle_t = t$. По теореме Леви, B является $\mathbf{Q}$ -броуновским движением. Таким образом, распределения канонического процесса по мерам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ совпадают, т.е. $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$.

2.2. Сигма-мартингалы. Приводимое ниже определение дано Т. Голлом и Я. Каллсенем в [7].

О п р е д е л е н и е 2.1. Семимартингал $(X_t)_{t \in [0, T]}$ (соответственно $(X_t)_{t \geq 0}$) называется σ -мартингалом, если существует последовательность $(D_n)_{n=1}^\infty$ предсказуемых множеств таких, что $D_n \subseteq D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = \Omega \times [0, T]$ (соответственно, $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = \Omega \times \mathbf{R}_+$) и для любого n стохастический интеграл $\int_0^\bullet I_{D_n} dX_s$ является равномерно интегрируемым мартингалом.

З а м е ч а н и е. Каждый мартингал является σ -мартингалом.

Предложение 2.5 (Ж.-П. Ансель, К. Стрикер). Пусть X — ограниченный снизу σ -мартингал. Тогда X является локальным мартингалом.

Доказательство см. в [1, следствие 3.5].

2.3. Фундаментальная теорема теории арбитража. Здесь мы приводим традиционную формулировку ФТТА, полученную Ф. Делбаеном и В. Шахермайером. Пусть дана модель

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \geq 0}). \quad (2.3)$$

Здесь S — $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ -семимартингал, отвечающий процессу дисконтированной цены некоторого актива.

О п р е д е л е н и е 2.2. (i) *Стратегия* — это пара $\pi = (x, K)$, где $x \in \mathbf{R}$, а $K = (K_t)_{t \geq 0}$ — предсказуемый S -интегрируемый процесс (определение интегрируемости см. в [8, гл. III, § 6с] или в [13]).

(ii) Дисконтированный капитал стратегии π — это процесс $V_t = x + \int_0^t K_u dS_u$ (определение стохастического интеграла см. в [8, гл. III, § 6с] или в [13]).

(iii) Последовательность стратегий $\pi^n = (x^n, K^n)$ реализует *бесплатный ленч с ограниченным риском* (free lunch with bounded risk, FLBR), если для их капиталов V^n выполняются условия:

- (a) $x^n = 0$ для любого n ;
- (b) существует $a \in \mathbf{R}$ такое, что $\mathbf{P}\{\forall t \geq 0, V_t^n \geq a\} = 1$ для любого n ;
- (c) для любого n существует $V_\infty^n = (\text{п.н.}) \lim_{t \rightarrow \infty} V_t^n$;
- (d) существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\mathbf{P}\{V_\infty^n > \delta_1\} > \delta_2$ для любого n ;
- (e) для любого $\delta > 0$ $\mathbf{P}\{V_\infty^n < -\delta\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы будем также говорить, что $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ реализует FLBR, если существует $N > 0$ такое, что последовательность $\{H^n\}_{n=N}^\infty$ реализует FLBR.

Отсутствие бесплатного ленча с ограниченным риском означает, что такой последовательности не существует.

Для модели

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \in [0, T]}) \quad (2.4)$$

с конечным временным горизонтом условие отсутствия бесплатного ленча с ограниченным риском определяется аналогично с заменой V_∞^n на V_T^n .

Предложение 2.6 (ФТТА). В моделях (2.3) и (2.4) отсутствует бесплатный ленч с ограниченным риском тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$, где $\mathcal{M}_\sigma$ определено в (1.3).

Доказательство см. в [6].

3. Модель $S_t = e^{X_t}$ с конечным временным горизонтом

В этом разделе мы фиксируем конечный временной интервал $[0, T]$ и рассматриваем модель

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \in [0, T]}),$$

где $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$, $S_t = e^{X_t}$, $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ — процесс Леви. Здесь и далее $(\mathcal{F}_t^Y)$ означает каноническую фильтрацию процесса Y , т.е. $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_u, u \leq t)$.

Через $|A|$ мы будем обозначать число элементов в множестве A .

3.1. Сигма-мартингальные меры. Следующая теорема утверждает, что «почти всегда» рассматриваемая модель безарбитражна и неполна.

Теорема 3.1. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$, X не является нулевым процессом.

(i) Множество $\mathcal{M}_\sigma$ пусто тогда и только тогда, когда X является монотонным процессом.

(ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma$ непусто. В этом случае $|\mathcal{M}_\sigma| = 1$ тогда и только тогда, когда либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha \delta_a$ (первый случай отвечает модели Блэка–Шоулса, второй — модели Мертона).

Доказательство. (i) Рассмотрим меру Леви

$$\tilde{\nu}(dx) = (I(|x| \leq 1) + e^{-x^2} I(|x| > 1)) \nu(dx).$$

По предложению 2.4, существует мера $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ такая, что X является $\tilde{\mathbf{P}}$ -процессом Леви с характеристиками $(b, c, \tilde{\nu})_H$. Предположим, что X не монотонен. По предложению 2.2, $c \neq 0$ или $c = 0$ и есть некоторые ограничения на b и $\tilde{\nu}$. Легко видеть, что в этих случаях выражение

$$b + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) c + \int_{\mathbf{R}} (e^{\lambda x} (e^x - 1) - H(x)) \tilde{\nu}(dx) \quad (3.1)$$

положительно для некоторого большого значения λ и отрицательно для некоторого маленького значения λ . Поэтому существует λ такое, что выражение в (3.1) равно нулю. Тогда, по предложению 2.3, мера $\tilde{\mathbf{P}}^{\lambda_0} = k e^{\lambda_0 X_T} \tilde{\mathbf{P}}$ является мартингальной для процесса e^X , т.е. $\mathcal{M}_\sigma \supseteq \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Если X монотонен, то ясно, что $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset$.

(ii) *Случай 1.* Предположим, что $\nu \neq \alpha\delta_a$. Очевидно, что существуют две меры $\tilde{\nu}_1$ и $\tilde{\nu}_2$, эквивалентные ν и совпадающие с ν в некоторой окрестности нуля, такие, что для любого $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\int_{\mathbf{R} \setminus [-1, 1]} e^{\lambda x} \tilde{\nu}_i(dx) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Более того, эти меры могут быть выбраны так, чтобы $\tilde{\nu}_1$ не являлась преобразованием Эшера $\tilde{\nu}_2$, т.е. не существовало бы такого λ , что $\tilde{\nu}_1(dx) = e^{\lambda x} \tilde{\nu}_2(dx)$.

По предложению 2.4, существуют меры $\tilde{\mathbf{P}}_i$, $i = 1, 2$, эквивалентные $\mathbf{P}$ и такие, что X является $\tilde{\mathbf{P}}_i$ -процессом Леви с характеристиками $(\tilde{b}_i, c, \tilde{\nu}_i)_H$. Аналогично рассуждениям пункта (i), существуют числа λ_i , $i = 1, 2$, для которых выполняются условия предложения 2.3, примененного к $\tilde{\mathbf{P}}_i$ -процессу Леви X . Меры $\tilde{\mathbf{P}}^{\lambda_i}$ являются мартингальными мерами для процесса e^X . Более того, они не совпадают. Действительно, по [11, гл. VII, § 3с, теоремы 1, 2], X есть $\tilde{\mathbf{P}}^{\lambda_i}$ -процесс Леви с мерой Леви $\tilde{\nu}^{\lambda_i}(dx) = e^{\lambda_i x} \tilde{\nu}_i(dx)$, $i = 1, 2$. Меры $\tilde{\nu}^{\lambda_1}$ и $\tilde{\nu}^{\lambda_2}$ различны, поскольку $\tilde{\nu}_1$ не является преобразованием Эшера $\tilde{\nu}_2$. Таким образом, $|\mathcal{M}_\sigma| \geq |\mathcal{M}| > 1$.

Случай 2. Предположим, что $\nu = \alpha\delta_a$, $c \neq 0$, $\alpha a \neq 0$. Процесс X может быть представлен в виде $X_t = b't + \sqrt{c}B_t + aN_t$, где $b' = b - \alpha H(a)$, B — броуновское движение, N — пуассоновский процесс с параметром α , B и N — независимые процессы. Возьмем произвольные $(\lambda, \beta) \in (\mathbf{R}, (0, \infty))$. По теореме Гирсанова и предложению 2.4, существует мера $\mathbf{P}^{\lambda\beta} \sim \mathbf{P}$ такая, что

$$X_t = b't + \sqrt{c}(B_t^{\lambda\beta} + \lambda t) + aN_t^{\lambda\beta},$$

где $B^{\lambda\beta}$ — $\mathbf{P}^{\lambda\beta}$ -броуновское движение, $N^{\lambda\beta}$ — $\mathbf{P}^{\lambda\beta}$ -пуассоновский процесс с параметром β . Другими словами, X — это $\mathbf{P}^{\lambda\beta}$ -процесс Леви с характеристиками $(b' + \sqrt{c}\lambda, c, \beta\delta_a)_0$. В силу предложения 2.1, e^X является $\mathbf{P}^{\lambda\beta}$ -мартингалом, если

$$b' + \sqrt{c}\lambda + \frac{c}{2} + \beta(e^a - 1) = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что существует много пар чисел $(\lambda, \beta) \in (\mathbf{R}, (0, \infty))$ таких, что верно (3.2). Следовательно, $|\mathcal{M}_\sigma| \geq |\mathcal{M}| > 1$.

Случай 3. Предположим, что либо $\nu = \alpha\delta_a$, $c = 0$, либо $\nu = 0$, $c \neq 0$. В этом случае единственность σ -мартингальной меры следует из леммы 2.1 и предложения 2.5.

Теорема доказана.

3.2. Мартингальные меры. Доказательство теоремы 3.1 показывает, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$, X не является нулевым процессом.

(i) Множество $\mathcal{M}$ пусто тогда и только тогда, когда X является монотонным процессом.

(ii) Предположим, что $\mathcal{M}$ непусто. В этом случае $|\mathcal{M}| = 1$ тогда и только тогда, когда либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha\delta_a$.

З а м е ч а н и е. Часть (i) теоремы 3.2 была доказана другим методом в [9, теорема 1].

4. Модель $S_t = e^{X_t}$ с бесконечным временным горизонтом

В этом разделе мы рассматриваем модель

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \geq 0}),$$

где $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$, $S_t = e^{X_t}$, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — процесс Леви.

4.1. Сигма-мартингальные меры.

Теорема 4.1. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$, X не является нулевым процессом.

(i) Множество $\mathcal{M}_\sigma$ непусто только в следующих случаях:

(a) S является $\mathbf{P}$ -мартингалом;

(b) $\mathbf{E}S_1 < 1$ и скачки процесса X не ограничены сверху.

(ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma$ непусто. В этом случае $|\mathcal{M}_\sigma| = 1$ тогда и только тогда, когда либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha\delta_a$.

Нам будут нужны некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 4.1 (Б. Эссеен). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство. Предположим, что $\mathcal{F} = \bigvee_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$. Пусть $\mathbf{Q}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$ такая, что $\mathbf{Q} \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}$, т.е. $\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_n} \sim \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_n}}{d\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}\text{-п.н.}} \frac{d\mathbf{Q}^a}{d\mathbf{P}},$$

где $\mathbf{Q}^a$ — это абсолютно непрерывная часть $\mathbf{Q}$ относительно $\mathbf{P}$.

Доказательство см. в [15, гл. V, теорема 5.2.26].

Лемма 4.1. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$,

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0: X_t \geq \ln \frac{3}{2} \text{ или } X_t \leq \ln \frac{1}{2} \right\}.$$

Если $\mathbf{E}e^{X_1} > 1$, то $\mathbf{E}e^{X_\tau} > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} < \infty$. Пусть $N > 0$. Известно, что $X = X^1 + X^2$ п.н., где X^1 и X^2 — независимые процессы Леви с характеристиками $(b', c, \nu^1)_H$ и $(0, 0, \nu^2)_0$ соответственно, $b' = b - \int_{\mathbf{R}} H(x) \nu^2(dx)$, $\nu^1 = \nu|_{[-N, N]}$, $\nu^2 = \nu|_{\mathbf{R} \setminus [-N, N]}$.

Пусть θ — момент первого скачка процесса X^2 . Тогда

$$\begin{aligned} X_\tau &= X_\tau^1 I(\theta > \tau) + (X_\tau^1 + X_\tau^2) I(\theta \leq \tau), \\ e^{X_\tau} &= e^{X_\tau^1} I(\theta > \tau) + e^{X_\tau^1 + X_\tau^2} I(\theta \leq \tau) \end{aligned}$$

и $\mathbf{E}e^{X_\tau} \geq \mathbf{E}e^{X_\tau^1} I(\theta > \tau)$. Рассмотрим момент остановки

$$\tau^1 = \inf \left\{ t \geq 0: X_t^1 \geq \ln \frac{3}{2} \text{ или } X_t^1 \leq \ln \frac{1}{2} \right\}.$$

Заметим, что $\tau = \tau^1$ на множестве $\{\theta > \tau\}$.

Поскольку X^1 и X^2 независимы, мы можем предположить, что они заданы на различных вероятностных пространствах $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$ соответственно, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$. Тогда (« $\mathbf{E}_i$ » означает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_i$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{X_\tau} &\geq \mathbf{E}e^{X_\tau^1} I(\theta > \tau) = \mathbf{E}e^{X_{\tau^1}^1} I(\theta > \tau^1) \\ &= \mathbf{E}_1 \exp \{X_{\tau^1(\omega_1)}^1(\omega_1)\} \mathbf{E}_2 I(\theta(\omega_2) > \tau^1(\omega_1)) \\ &= \mathbf{E}_1 \exp \{X_{\tau^1(\omega_1)}^1(\omega_1)\} \mathbf{P}_2 \{X_{\tau^1(\omega_1)}^2(\omega_2) = 0\} \\ &= \mathbf{E} \exp \{X_{\tau^1}^1 - \tau^1 \nu(\mathbf{R} \setminus [-N, N])\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что существует N такое, что $\mathbf{E} \exp \{X_1^1 - \nu(\mathbf{R} \setminus [-N, N])\} > 1$. Положим $a = \ln \mathbf{E} \exp \{X_1^1 - \nu(\mathbf{R} \setminus [-N, N])\}$, $a > 0$. Тогда процесс $M_t = \exp \{X_t^1 - t\nu(\mathbf{R} \setminus [-N, N]) - at\}$ является мартингалом. Процесс $M_t^{\tau^1} = M_{t \wedge \tau^1}$ ограничен и, следовательно, является равномерно интегрируемым мартингалом. Поэтому

$$\mathbf{E}e^{X_\tau} \geq \mathbf{E} \exp \{X_{\tau^1}^1 - \tau^1 \nu(\mathbf{R} \setminus [-N, N])\} > \mathbf{E}M_{\tau^1} = \mathbf{E}M_0 = 1.$$

Случай 2. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X^1} = \infty$. Известно, что $X = X^1 + X^2$ п.н., где X^1 и X^2 — независимые процессы Леви с характеристиками $(b, c, \nu^1)_H$ и $(0, 0, \nu^2)_0$ соответственно, $\nu^1 = \nu|_{[-1, 1]}$, $\nu^2 = \nu|_{\mathbf{R} \setminus [-1, 1]}$. Процесс X^2 является составным пуассоновским процессом, и он может быть представлен в виде $X_t^2 = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$, где N — пуассоновский процесс с параметром $\nu^2(\mathbf{R})$, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\nu^2/\nu^2(\mathbf{R})$. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ не зависит от N .

Так как $\mathbf{E}e^{X_t^1} < \infty$ и $\infty = \mathbf{E}e^{X_t} = \mathbf{E}e^{X_t^1} \cdot \mathbf{E}e^{X_t^2}$, то $\mathbf{E}e^{X_t^2} = \infty$. Далее,

$$\mathbf{E}e^{X_t^2} = \mathbf{E} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k \right\} = \mathbf{E} (\mathbf{E}e^{\xi_1})^{N_t} = \exp \{(\mathbf{E}e^{\xi_1} - 1) \nu^2(\mathbf{R}) t\},$$

откуда $\mathbf{E}e^{\xi_1} = \infty$. Пусть θ — момент первого скачка процесса X^2 (заметим, что $\Delta X_\theta^2 \geq 1 > \ln \frac{3}{2}$), $\tau^1 = \inf \{t \geq 0: X_t^1 \geq \ln \frac{3}{2} \text{ или } X_t^1 \leq \ln \frac{1}{2}\}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{X_\tau} &= \mathbf{E}e^{X_{\tau^1}} I(\tau^1 < \theta) + \mathbf{E}e^{X_{\tau^1} + X_{\tau^2}} I(\tau^1 \geq \theta) \geq \mathbf{E}e^{X_{\tau^2}} I(\tau^1 \geq \theta) \\ &= \mathbf{E}e^{X_{\theta}^2} I(\tau^1 \geq \theta) = \mathbf{E}e^{\xi_1} I(N_{\tau^1} \geq 1) = \mathbf{E}e^{\xi_1} \cdot \mathbf{P}\{N_{\tau^1} \geq 1\} = \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма будет играть существенную роль в построении мартингалльной меры в случае (b) теоремы 4.1.

Лемма 4.2. Пусть $N \geq 1$, X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$ такой, что $\mathbf{E}e^{X_1} < 1$ и $\nu(a, \infty) > 0$ для любого $a > 0$. Тогда существует мера Леви $\tilde{\nu}$ такая, что

- i) $\tilde{\nu} \sim \nu$;
- ii) $\tilde{\nu}|_{(-\infty, N]} = \nu|_{(-\infty, N]}$;
- iii) $\tilde{\nu}(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R})$;
- iv) $b + c/2 + \int_{\mathbf{R}} (e^x - 1 - H(x)) \tilde{\nu}(dx) = 0$.

Мера $\tilde{\nu}$ может быть выбрана не единственным образом.

Доказательство. В силу предложения 2.1,

$$b + \frac{c}{2} + \int_{\mathbf{R}} (e^x - 1 - H(x)) \nu(dx) < 0.$$

Возьмем такое $M > N$, что $\nu((N, M)) > 0$, и выберем такое $a > 0$, что

$$b + \frac{c}{2} + \int_{(-\infty, N]} (e^x - 1 - H(x)) \nu(dx) + (e^a - 1) \nu((N, M)) > 0.$$

Очевидно, что существует такое $\alpha \in (0, 1)$, что для меры

$$\tilde{\nu} = \nu - \alpha \nu|_{(N, M)} + \alpha \frac{\nu((N, M))}{\nu((a, \infty))} \nu|_{(a, \infty)}$$

выполняются требуемые в лемме условия.

Ясно, что подобная конструкция позволяет получать различные меры $\tilde{\nu}$, что завершает доказательство.

Лемма 4.3. Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на пространстве $D(\mathbf{R}_+)$ такая, что канонический процесс X — это ненулевой $\mathbf{P}$ -процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$. Пусть $S_t = e^{X_t}$, $t \geq 0$, и предположим, что S является $\mathbf{P}$ -мартингалом. Тогда мера $\mathbf{P}$ — это единственная σ -мартингалльная (и мартингалльная) мера для процесса S в том и только том случае, когда либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha \delta_a$.

Доказательство. Если $c \neq 0$, $\nu = 0$ или $c = 0$, $\nu = \alpha \delta_a$, то единственность σ -мартингалльной меры следует из леммы 2.1 и предложения 2.5.

Предположим, что эти условия не выполнены. Пусть

$$\mathbf{P}_1 = \text{Law}(X_t; t \leq 1), \quad \mathbf{P}_2 = \text{Law}(X_{t+1} - X_1; t \geq 0).$$

Тогда мера $\mathbf{P}$ — это образ $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ при отображении

$$D([0, 1]) \times D(\mathbf{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega \in D(\mathbf{R}_+),$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t), & t \leq 1, \\ \omega_2(t-1) + \omega_1(1), & t > 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

В силу теоремы 3.1, существует мера $\tilde{\mathbf{P}}_1 \sim \mathbf{P}_1$ такая, что $\tilde{\mathbf{P}}_1 \neq \mathbf{P}_1$ и $(e^{X_t})_{t \leq 1}$ является $\tilde{\mathbf{P}}_1$ -мартингалом. Тогда мера $\tilde{\mathbf{P}}$, определенная как образ $\tilde{\mathbf{P}}_1 \times \mathbf{P}_2$ при отображении (4.1), является мартингальной мерой для $(e^{X_t})_{t \geq 0}$ и $\tilde{\mathbf{P}} \neq \mathbf{P}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Ясно, что мы можем предположить, что X — это канонический процесс на $D(\mathbf{R}_+)$.

(i) Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} > 1$ (в частности, $\mathbf{E}e^{X_1}$ может быть бесконечным). Построим последовательность стратегий, которая реализует FLBR. Положим

$$\tau_0 = 0, \dots, \tau_n = \inf \left\{ t \geq \tau_{n-1} : |S_t - S_{\tau_{n-1}}| \geq \frac{1}{2} S_{\tau_{n-1}} \right\}$$

$$= \inf \left\{ t \geq \tau_{n-1} : X_t - X_{\tau_{n-1}} \geq \ln \frac{3}{2} \text{ или } X_t - X_{\tau_{n-1}} \leq \ln \frac{1}{2} \right\};$$

$$K_t^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_{\tau_{k-1}}} I(\tau_{k-1} < t \leq \tau_k), \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим стратегии $\pi^n = (0, K^n)$. Их капиталы имеют вид

$$V_t^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{S_{\tau_k \wedge t} - S_{\tau_{k-1} \wedge t}}{S_{\tau_{k-1}}}, \quad V_\infty^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}}}{S_{\tau_{k-1}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

По строго марковскому свойству процессов Леви, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. По закону больших чисел, $n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow \mathbf{E}\xi_1$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$, а $\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}S_{\tau_1} - 1$. По лемме 4.1, $\mathbf{E}S_{\tau_1} - 1 > 0$. Таким образом, стратегии π^n реализуют FLBR и, в силу предложения 2.6, $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset$.

Случай 2. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} = 1$. В силу предложения 2.1, e^X является $\mathbf{P}$ -мартингалом, т.е. $\mathbf{P} \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\sigma$.

Случай 3. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} < 1$ и скачки процесса X ограничены сверху. Тогда стратегии $\pi^n = (0, -K^n)$, где K^n определяются как в случае 1, реализуют FLBR (заметим, что $\mathbf{E}S_{\tau_1} < 1$ по теореме об остановке). В силу предложения 2.6, $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset$.

Случай 4. Предположим, что $\mathbf{E}e^{X_1} < 1$ и скачки процесса X не ограничены сверху. Построим мартингальную меру. Рассмотрим последовательность мер $(\mathbf{Q}_n)_{n=1}^\infty$, определяемую на $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ следующей процедурой.

Шаг 1. В силу леммы 4.2, существует мера Леви ν_1 такая, что $\nu_1|_{(-\infty, 1]} = \nu|_{(-\infty, 1]}$, $\nu_1(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R})$ и существует мера $\tilde{\mathbf{P}}_1 \sim \mathbf{P}$, относительно которой $X \sim (b, c, \nu_1)_H$ и e^X является $\tilde{\mathbf{P}}_1$ -мартингалом. Обозначим $g_1(x) = \ln \frac{d\nu_1}{d\nu}(x)$. Очевидно, что $g_1(x) = 0$ для $x \leq 1$. Известно, что процесс плотности меры $\tilde{\mathbf{P}}_1$ относительно меры $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_t^1(X) &= \exp \left\{ \sum_{s \leq t} g_1(\Delta X_s) I(\Delta X_s \neq 0) + t(\nu - \nu_1)(\mathbf{R}) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{s \leq t} g_1(\Delta X_s) \right\}, \quad X \in D(\mathbf{R}_+) \end{aligned}$$

(см. [10, теорема 33.2]). Положим $\mathbf{Q}_1 = \rho_1^1 \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_1}$.

Шаг n , где $n \geq 2$. Существует мера Леви ν_n такая, что $\nu_n \sim \nu$, $\nu_n|_{(-\infty, n]} = \nu|_{(-\infty, n]}$, $\nu_n(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R})$ и для ν_n выполняются условия леммы 4.2. Обозначим $g_n(x) = \ln \frac{d\nu_n}{d\nu_{n-1}}(x)$. Очевидно, что $g_n(x) = 0$ для $x \leq n-1$. Рассмотрим

$$\rho_t^n(X) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \leq n-1, \\ \exp \left\{ \sum_{n-1 < s \leq t} g_n(\Delta X_s) \right\} & \text{для } t > n-1 \end{cases}$$

и положим $\mathbf{Q}_n = \rho_n^n \rho_n^{n-1} \dots \rho_1^1 \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_n}$. В силу [10, теорема 33.2], процесс $(X_t)_{t \in [0, 1]}$ — это $\mathbf{Q}_n$ -процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu_1)_H, \dots$, процесс $(X_{t+n-1} - X_{n-1})_{t \in [0, 1]}$ — это $\mathbf{Q}_n$ -процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu_n)_H$. При этом $(e^{X_t})_{t \in [0, n]}$ является $\mathbf{Q}_n$ -мартингалом.

Обозначим $Z_n = \rho_n^n \dots \rho_1^1$, тогда $\mathbf{Q}_n = Z_n \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_n}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \exp \left\{ \sum_{s \leq 1} \ln \frac{d\nu_1}{d\nu}(\Delta X_s) + \sum_{1 < s \leq 2} \ln \left[\frac{d\nu_1}{d\nu}(\Delta X_s) \frac{d\nu_2}{d\nu_1}(\Delta X_s) \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n-1 < s \leq n} \ln \left[\frac{d\nu_1}{d\nu}(\Delta X_s) \dots \frac{d\nu_n}{d\nu_{n-1}}(\Delta X_s) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{s \leq 1} \ln \frac{d\nu_1}{d\nu}(\Delta X_s) + \sum_{1 < s \leq 2} \ln \frac{d\nu_2}{d\nu}(\Delta X_s) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n-1 < s \leq n} \ln \frac{d\nu_n}{d\nu}(\Delta X_s) \right\} \\ &= \prod_{s \leq 1, \Delta X_s > 1} \frac{d\nu_1}{d\nu}(\Delta X_s) \prod_{1 < s \leq 2, \Delta X_s > 2} \frac{d\nu_2}{d\nu}(\Delta X_s) \times \dots \\ &\quad \times \prod_{n-1 < s \leq n, \Delta X_s > n} \frac{d\nu_n}{d\nu}(\Delta X_s), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $X \in D(\mathbf{R}_+)$.

Построенные меры $\mathbf{Q}_n$ являются согласованными в том смысле, что $\mathbf{Q}_n|_{\mathcal{F}_k} = \mathbf{Q}_k$ для любого $k \leq n$. Следовательно, существует мера $\mathbf{Q}$ такая, что $\mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_n} = \mathbf{Q}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (см. [4, теорема 1]). Мы утверждаем, что $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$.

а) Во-первых, докажем, что $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$. Пусть X — канонический процесс на $D(\mathbf{R}_+)$. Рассмотрим процессы $X_t^2 = \sum_{s \leq t} X_s I(\Delta X_s > 1)$, $X_t^1 = X_t - X_t^2$, $t \geq 0$. Они являются независимыми процессами Леви относительно меры $\mathbf{P}$, $X^1 \sim (b, c, \nu^1)_H$, $X^2 \sim (0, 0, \nu^2)_0$, где $\nu^1 = \nu|_{(-\infty, 1]}$, $\nu^2 = \nu|_{(1, \infty)}$. Заметим, что $\nu^2 \neq 0$, поскольку скачки ΔX не ограничены сверху. Процесс X^2 является составным пуассоновским процессом и имеет вид $X_t^2 = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$, где N — это пуассоновский процесс с параметром $\nu^2(\mathbf{R})$, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\nu^2/\nu^2(\mathbf{R})$. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ не зависит от N .

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_n = \{\exists s \in (n-1, n]: \Delta X_s > n\} = \{\exists s \in (n-1, n]: \Delta X_s^2 > n\} \text{ } \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\{\exists s \leq 1: \Delta X_s^2 > n\} = \mathbf{E} \mathbf{P}(\exists s \leq 1: \Delta X_s^2 > n | N_1).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\exists s \leq 1: \Delta X_s^2 > n | N_1 = k) &= \mathbf{P}(\xi_1 > n \text{ или } \dots \text{ или } \xi_k > n | N_1 = k) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathbf{P}\{\xi_i > n\} = k \mathbf{P}\{\xi_1 > n\} = k \frac{\nu^2((n, \infty))}{\nu^2(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\nu^2((n, \infty))}{\nu^2(\mathbf{R})} \frac{(\nu^2(\mathbf{R}))^k}{k!} e^{-\nu^2(\mathbf{R})} = \nu^2((n, \infty)) = \nu((n, \infty)).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu((n, \infty)) \leq \int_{(1, \infty)} x \nu(dx).$$

Последнее выражение конечно, поскольку $\int_{(1, \infty)} (e^x - 1) \nu(dx) < \infty$ в силу предложения 2.1. По лемме Бореля–Кантелли, $\mathbf{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$. Ввиду (4.2), мы получаем, что для $\mathbf{P}$ -п.в. ω существует $n = n(\omega)$ такое, что для любого $m \geq n$ $Z_m(\omega) = Z_n(\omega)$. Отсюда, в силу предложения 4.1, мы заключаем, что $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$.

б) Теперь докажем, что $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$. Рассмотрим те же множества A_n , что и в случае а). Аналогично, мы получаем

$$\mathbf{Q}(A_n) = \nu_n((n, \infty)) = \nu((n, \infty))$$

(поскольку $\nu_n((-\infty, n]) = \nu((-\infty, n])$ и $\nu_n(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R})$). Следовательно, как и выше, по лемме Бореля–Кантелли, $\mathbf{Q}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$. Ввиду (4.2) получаем, что для $\mathbf{Q}$ -п.в. ω существует $n = n(\omega)$ такое, что $Z_m^{-1}(\omega) = Z_n^{-1}(\omega)$ для любого $m \geq n$. Отсюда, в силу предложения 4.1, заключаем, что $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$.

Мы показали, что мера $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$. Так как процесс S является $\mathbf{Q}$ -мартингалом, то $\mathcal{M}_\sigma \supseteq \mathcal{M} \neq \emptyset$. Первая часть теоремы доказана.

(ii) Множество $\mathcal{M}_\sigma$ непусто только в следующих двух случаях.

Случай 1. Процесс S есть $\mathbf{P}$ -мартингал. Тогда требуемое утверждение — это следствие леммы 4.3.

Случай 2. Математическое ожидание $\mathbf{E}S_1 < 1$ и скачки процесса X не ограничены сверху. Тогда из доказательства пункта (i) видно, что можно построить различные мартингальные меры для e^X .

Теорема 4.1 доказана.

4.2. Равномерно интегрируемые мартингальные меры.

Теорема 4.2. Пусть X — ненулевой процесс Леви. Тогда множество $\mathcal{U}\mathcal{M}$ пусто.

Доказательство. Поскольку $X \not\equiv 0$, мы имеем, что (п.н.) $\limsup_{t \rightarrow \infty} |X_t| = +\infty$. Поэтому, если у процесса S есть $\mathbf{P}$ -п.н. предел S_∞ , то $S_\infty = 0$ или $S_\infty = \infty$ $\mathbf{P}$ -п.н. Следовательно, не существует меры $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ такой, что S является $\tilde{\mathbf{P}}$ -равномерно интегрируемым мартингалом.

5. Модель $S_t = e^{(X \circ \tau)_t}$ с конечным временным горизонтом

Снова зафиксируем конечный временной интервал $[0, T]$ и рассмотрим модель

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \in [0, T]}),$$

где $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$, $S = e^{(X \circ \tau)_t}$, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — процесс Леви, $\tau = (\tau_t)_{t \in [0, T]}$ — неубывающий càdlàg процесс, не зависящий от X .

5.1. Сигма-мартингальные меры.

Теорема 5.1. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$, X не является нулевым процессом, $\mathbf{P}\{\tau_T > \tau_0\} > 0$.

(i) Множество $\mathcal{M}_\sigma$ пусто тогда и только тогда, когда X является монотонным процессом.

(ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma$ непусто. В этом случае $|\mathcal{M}_\sigma| = 1$ тогда и только тогда, когда τ является детерминированным непрерывным процессом и либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha \delta_a$.

Доказательство. (i) Поскольку τ и X — независимые процессы, мы можем предположить, что они заданы на различных вероятностных пространствах $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$ соответственно, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$.

Рассмотрим пространство $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$. Можно предположить, что X — канонический процесс на $D(\mathbf{R}_+)$. Если X монотонен, мы получаем, что $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset$.

Рассмотрим случай, когда X не является монотонным процессом. Доказательство теоремы 3.1 показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует мера $\mathbf{P}_2^n \sim \mathbf{P}_2$ такая, что процесс $(e^{X_t})_{t \in [0, n]}$ является $(\mathcal{F}_t^X, \mathbf{P}_2^n)$ -мартингалом и при этом $\mathbf{P}_2^m|_{\mathcal{F}_n^X} = \mathbf{P}_2^n|_{\mathcal{F}_n^X}$ для $m \geq n$. Положим

$$Z_t^n = \frac{d\mathbf{P}_2^n|_{\mathcal{F}_t^X}}{d\mathbf{P}_2|_{\mathcal{F}_t^X}}.$$

Тогда $Z_t^m = Z_t^n$ для $0 \leq t \leq n \leq m$. Следовательно, существует процесс $(Z_t)_{t \geq 0}$ такой, что $Z_t = Z_t^n$ для $0 \leq t \leq n$. Процесс Z — строго положительный $(\mathcal{F}_t^X, \mathbf{P}_2)$ -мартингал, $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} Z_t = 1$, произведение Ze^X — также $(\mathcal{F}_t^X, \mathbf{P}_2)$ -мартингал (см. [8, гл. III, предложение 3.8]).

Из независимости X и τ мы получаем, что $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} Z_{\tau} = 1$ и $\mathbf{P}\{Z_{\tau} > 0\} = 1$. Следовательно, $\tilde{\mathbf{P}} := Z_{\tau} \mathbf{P}$ — это вероятностная мера, эквивалентная $\mathbf{P}$.

Для любого $s \leq t$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_t e^{X_s} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} (Z_t e^{X_s} | \mathcal{F}_s^X) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_s e^{X_s} = 1,$$

следовательно, для любого $u \in [0, T]$ мы имеем

$$\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{P}}} S_u = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_{\tau} e^{X_{\tau}(\omega_1)} = 1.$$

Для любых $s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s \leq t \leq w$ и любых $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_w e^{X_t} I(e^{X_{s_1}} \in A_1, \dots, e^{X_{s_n}} \in A_n) \\ = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_t e^{X_t} I(\dots) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_s e^{X_s} I(\dots) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_w e^{X_s} I(\dots), \end{aligned}$$

следовательно, для любых $u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u \leq v$ и любых $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{P}}} S_v I(S_{u_1} \in A_1, \dots, S_{u_n} \in A_n) \\ = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_{\tau} e^{X_{\tau}(\omega_1)} I(e^{X_{\tau u_1}(\omega_1)} \in A_1, \dots, e^{X_{\tau u_n}(\omega_1)} \in A_n) \\ = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_2} Z_{\tau} e^{X_{\tau}(\omega_1)} I(\dots) = \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{P}}} S_u I(S_{u_1} \in A_1, \dots, S_{u_n} \in A_n). \end{aligned}$$

Вместе с леммой о монотонных классах (или теоремой о π - λ -системах, см. [12, гл. II, § 2, теорема 2]) это дает, что S является $(\mathcal{F}_t^S, \tilde{\mathbf{P}})$ -мартингалом.

(ii) Из приведенной выше конструкции меры $\tilde{\mathbf{P}}$ видно, что если существует много мартингалов для процесса e^X , то существует много мартингалов для процесса $e^{X \circ \tau}$. Следовательно, в силу теорем 3.1 и 3.2, если τ — детерминированный и непрерывный процесс,

то $|\mathcal{M}_\sigma| = |\mathcal{M}| = 1$ тогда и только тогда, когда либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha\delta_a$.

Если τ — детерминированный и разрывный процесс, то существует t_0 такое, что $\tau_{t_0-} = u < v = \tau_{t_0}$. Пусть $\tilde{\mathbf{P}} = Z_{\tau_T} \mathbf{P}$ — это мера, определенная в (i). Тогда $\tilde{\mathbf{P}}$ является мартингальной мерой для процесса S . Ясно, что процесс X имеет $\tilde{\mathbf{P}}$ -независимые приращения. Существует $\sigma(X_v - X_u)$ -измеримая случайная величина $\rho \neq 1$ такая, что $\rho > 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. и

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} e^{X_v - X_u} \rho Z_{\tau_{t_0}} = 1, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \rho Z_{\tau_{t_0}} = 1$$

(например, мы можем найти ρ в виде $\rho = a_1 I_{A_1} + a_2 I_{A_2} + a_3 I_{A_3} + I_{\mathbf{R} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$, где $a_i > 0$, A_i — непересекающиеся множества и $\mathbf{P}_2(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$).

Рассмотрим меру $\tilde{\mathbf{P}}' = \rho Z_{\tau_T} \mathbf{P}$. Очевидно, что $e^{(X \circ \tau)}$ является $\tilde{\mathbf{P}}'$ -мартингалом. Поэтому $|\mathcal{M}_\sigma| \geq |\mathcal{M}| > 1$.

Предположим, что τ — недетерминированный процесс. Тогда мы можем найти меру $\mathbf{P}'_1 \sim \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'_1 \neq \mathbf{P}_1$. Пусть Z — это процесс, определенный в (i). Меры $\tilde{\mathbf{P}} = Z_{\tau_T} \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ и $\tilde{\mathbf{P}}' = Z_{\tau_T} \mathbf{P}'_1 \times \mathbf{P}_2$ являются мартингальными для процесса S , т.е. $|\mathcal{M}_\sigma| \geq |\mathcal{M}| > 1$.

Теорема доказана.

5.2. Мартингальные меры. Доказательство теоремы 5.1 показывает, что верно следующее утверждение.

Теорема 5.2. Пусть X — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu)_H$, X не является нулевым процессом, $\mathbf{P}\{\tau_T > \tau_0\} > 0$.

(i) Множество $\mathcal{M}$ пусто тогда и только тогда, когда X является монотонным процессом.

(ii) Предположим, что $\mathcal{M}$ непусто. В этом случае $|\mathcal{M}| = 1$ тогда и только тогда, когда τ является детерминированным непрерывным процессом и либо $c \neq 0$, $\nu = 0$, либо $c = 0$, $\nu = \alpha\delta_a$.

6. Модель $S_t = e^{(X \circ \tau)_t}$ с бесконечным временным горизонтом

В этом разделе мы рассматриваем модель

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}, (S_t)_{t \geq 0}),$$

где $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$, $S = e^{(X \circ \tau)_t}$, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — процесс Леви, $\tau = (\tau_t)_{t \geq 0}$ — неубывающий càdlàg процесс, не зависящий от X .

Мы исследуем только существование и единственность равномерно интегрируемой мартингальной меры.

Теорема 6.1. Пусть $\tau_\infty = \infty$ $\mathbf{P}$ -п.н., X — ненулевой процесс Леви. Тогда множество $\mathcal{M}$ пусто.

Этот результат получается аналогично теореме 4.2.

Благодарность. Я благодарен А. С. Черному за руководство этой работой и за многочисленные замечания и дополнения, которые существенно улучшили текст статьи. Я благодарен А. Н. Ширяеву за важные комментарии и предложения, позволившие, в частности, сократить доказательство теоремы 3.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ansel J.-P., Stricker C. Couverture des actifs contingents et prix maximum. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1994, v. 30, № 2, p. 303–315.
2. Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N. Modelling by Lévy processes for financial econometrics. — Lévy Processes. Theory and Applications. Ed. by O. E. Barndorff-Nielsen et al. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 283–318.
3. Carr P., Geman H., Madan D., Yor M. Stochastic volatility for Lévy processes. — Math. Finance, 2003, v. 13, № 3, p. 345–382.
4. Черный А. С. Семейства согласованных вероятностных мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 118–121.
5. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. — Math. Ann., 1994, v. 300, № 3, p. 463–520.
6. Delbaen F., Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. — Math. Ann., 1998, v. 312, № 2, p. 215–250.
7. Goll T., Kallsen J. A complete explicit solution to the log-optimal portfolio problem. — Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, № 2, p. 774–799.
8. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 661 p.
9. Jakubénaš P. On option pricing in certain incomplete markets. — Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 123–142.
10. Sato K.-I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
11. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. М.: Фазис, 1998, 544 с.
12. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 2004, 927 с.
13. Ширяев А. Н., Черный А. С. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. — Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 12–56.
14. Sin C. A. Strictly local martingales and hedge ratios on stochastic volatility models. Ph. D. Dissertation. Ithaca, NY: Cornell University, Graduate School, 1996.
15. Stroock D. W. Probability Theory. An Analytic View. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 536 p.

Поступила в редакцию
3. II. 2004