Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гущин, У. Кюхлер, О восстановлении меры по ее симметризации, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 352–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:17:15

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2004 г.

ГУЩИН А. А.*, КЮХЛЕР У.**

О ВОССТАНОВЛЕНИИ МЕРЫ ПО ЕЕ СИММЕТРИЗАЦИИ¹⁾

Показано, что σ -конечная борелевская мера на положительной полу-прямой с невозрастающей плотностью (относительно меры Лебега) однозначно характеризуется своей симметризацией.

Ключевые слова и фразы: симметризация, восстановление фазы, преобразование Фурье, факторизационные теоремы, процесс скользящего среднего.

1. Введение и основные результаты. Рассмотрим σ -конечную меру m на $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Положим $\bar{m}(A) = m(-A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ и ${}^0m := m \star \bar{m}$, где $\star$ обозначает свертку, тогда 0m называется симметризацией m . Эквивалентно,

$${}^0m(A) = \iint_{\{t-s \in A\}} m(ds) m(dt), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}). \quad (1)$$

Разумеется, симметризация меры не меняется при сдвиге меры влево или вправо, а также при ее отражении относительно нуля ($m \rightsquigarrow \bar{m}$).

Для вероятностных мер, заданных, вообще говоря, на $\mathbf{R}^m$ или даже на локально компактной абелевой группе, задача восстановления меры по ее симметризации или, эквивалентно, по модулю характеристической функции хорошо известна в связи с приложениями в оптике и кристаллографии и называется задачей восстановления фазы (phase retrieval), см. [23], [17] и ссылки в этих работах. Вопросы, как устроен класс мер с заданной симметризацией, когда в нем можно выбрать меру с определенными дополнительными свойствами, когда этот класс содержит только меры, получаемые сдвигом и/или отражением, и другие вопросы рассматривались, например, в работах [1], [2], [13], [18], [4]–[7], [10].

Нас в данной работе интересует другая постановка. Мы рассматриваем не обязательно конечные меры и хотим показать, что если мера m сосредоточена на $\mathbf{R}_+ := [0, \infty)$ и имеет *невозрастающую* плотность относительно меры Лебега (допускается также атом в нуле), то она однозначно характеризуется своей симметризацией. Для точной формулировки введем класс $\mathcal{M}$ σ -конечных борелевских мер m на $\mathbf{R}_+$, для которых $m(\mathbf{R}_+) > 0$ и

- 1) функция $F(t) := m([0, t])$ вогнута на $\mathbf{R}_+$;
- 2) ${}^0m((-\delta, \delta)) < \infty$ для некоторого $\delta > 0$.

Подкласс $\mathcal{M}$, состоящий из вероятностных мер, обозначается $\mathcal{M}_1$; выделим также семейство $\mathcal{M}^*$ мер m из $\mathcal{M}$, обладающих следующим свойством: m абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует такое $h > 0$, что плотность меры m

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: gushchin@mi.ras.ru

** Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin, Germany; e-mail: kuechler@mathematik.hu-berlin.de

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ–DFG 02-01-04001.

можно взять постоянной на каждом из интервалов $(0, h), (h, 2h), \dots, (nh, (n+1)h), \dots$. Вероятностное распределение на $\mathbf{R}_+$ принадлежит $\mathcal{M}_1$ тогда и только тогда, когда оно одновершинно (унимодально) и 0 является его модой.

З а м е ч а н и е 1. Из вогнутости $m([0, t])$ на $\mathbf{R}_+$ легко следует вогнутость ${}^0m([0, t])$ на $\mathbf{R}_+$. В частности, из условия 2) следует, что ${}^0m([-t, t]) < \infty$ при любом $t \in \mathbf{R}_+$ для $m \in \mathcal{M}$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $m \in \mathcal{M}$. Из (1) сразу следует неравенство

$$F^2(t) \leq {}^0m([-t, t]), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (2)$$

поэтому $F(t) < \infty$ для любого $t \in \mathbf{R}_+$ в силу предыдущего замечания. Так как F не убывает и вогнута, то

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (3)$$

где в качестве $f(s)$, $s > 0$, мы всегда будем брать правую производную функции F в точке s . Таким образом, плотность f абсолютно непрерывной составляющей меры m относительно меры Лебега непрерывна справа и не возрастает. Предположение $f(s) \geq c > 0$ для $s > 0$ противоречит условию 2) ввиду (1), поэтому

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. *Отображение $\mathcal{M} \ni m \rightsquigarrow {}^0m$ взаимно однозначно.*

Инъективность отображения $m \rightsquigarrow {}^0m$ на множестве $\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}^*$ есть простое следствие теоремы 1 в [21] (см. также [19, предложение С.2.5.3]), и приводимой ниже леммы 1. В указанных работах метод доказательства основан на теоремах типа Фрагмена–Линделёфа, но нам не удалось его адаптировать к случаю бесконечных мер. Мы используем идеи доказательства из работы [1], в частности, факторизационные теоремы для аналитических функций из классов Харди в верхней полуплоскости или единичном круге. Необходимость рассмотрения мер с бесконечными значениями возникла в связи с формулируемой ниже теоремой 2, в доказательстве которой используется тот факт, что мера с $F(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, однозначно восстанавливается по своей симметризации внутри класса $\mathcal{M}$ (независимо от того, принимает ли мера m в теореме 2 только конечные или также и бесконечные значения). Приложения теоремы 2 будут рассмотрены в отдельной публикации.

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathcal{M}$, функция $l(x)$, $x > 0$, медленно меняется в нуле, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $c > 0$, $C_\alpha := 2^{-1-2\alpha} \pi^{-1/2} \Gamma(\frac{1}{2} - \alpha) \Gamma(1 + \alpha)$. Следующие условия эквивалентны:*

$$m([0, t]) \sim ct^\alpha l(t), \quad t \downarrow 0, \quad (5)$$

$${}^0m([0, t]) \sim C_\alpha c^2 t^{2\alpha} l^2(t), \quad t \downarrow 0. \quad (6)$$

Следствие 1. *Пусть X — положительная случайная величина, распределение которой имеет невозрастающую на $(0, \infty)$ плотность $f(t)$. Если $g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) f(t+s) ds$ — плотность распределения $X - Y$, где Y — независимая копия X , числа α, c, C_α и функция $l(x)$ удовлетворяют предположениям теоремы 2, то следующие условия эквивалентны:*

$$f(t) \sim cat^{\alpha-1} l(t), \quad t \downarrow 0, \quad (7)$$

$$g(t) \sim 2C_\alpha c^2 \alpha t^{2\alpha-1} l^2(t), \quad t \downarrow 0. \quad (8)$$

В заключение вводной части мы переформулируем теорему 1 в других терминах. Пусть измеримая функция $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(s) = 0, \quad s < 0, \quad (9)$$

$$R^\varphi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t-s) - \varphi(-s)]^2 ds < \infty \quad \text{для любого } t \in \mathbf{R}_+, \quad (10)$$

$W = (W_s, -\infty < s < \infty)$ — двустороннее броуновское движение. В силу (10) определен процесс $Y^\varphi = (Y_t^\varphi, -\infty < t < \infty)$ скользящего среднего:

$$Y_t^\varphi := \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t-s) - \varphi(-s)] dW_s. \quad (11)$$

Процесс Y^φ является центрированным гауссовским процессом со стационарными приращениями и

$$\mathbf{E} Y_t^\varphi Y_s^\varphi = \frac{1}{2} \mathbf{E} [(Y_t^\varphi)^2 + (Y_s^\varphi)^2 - (Y_t^\varphi - Y_s^\varphi)^2] = \frac{R^\varphi(t) + R^\varphi(s) - R^\varphi(t-s)}{2}.$$

Таким образом, распределение процесса Y^φ полностью определяется функцией R^φ . Заметим также, что $R^\varphi(t) = R^\varphi(-t)$. Если $\varphi(s) = s^{H-1/2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(s)$, $H \in (0, 1)$, то Y^φ есть фрактальное броуновское движение с индексом Харста H (см., например, [20, раздел 7.2]).

Предположим теперь дополнительно, что $\varphi(s) = m((-\infty, s])$, $s \in \mathbf{R}$, где m — σ -конечная мера с носителем в $\mathbf{R}_+$. Тогда по теореме Фубини для $t \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} R^\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{-s < u \leq t-s\}} m(du) \int_{\{-s < v \leq t-s\}} m(dv) ds \\ &= \iint_{\mathbf{R}_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{-(u \wedge v) < s \leq t - (u \vee v)\}} ds m(du) m(dv) \\ &= \iint_{\mathbf{R}_+^2} (t - |u - v|)^+ m(du) m(dv) = \int_{\mathbf{R}} (t - |u|)^+ m(du). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае функция R^φ полностью определяется по симметризации 0m . Далее, если $t \in \mathcal{M}$, из замечания 1 и (12) следует, что для функции φ , определяемой как $\varphi(t) = m((-\infty, t])$, $t \in \mathbf{R}$, условие (10) всегда выполнено. Наконец, из (12) несложными рассуждениями с учетом центральной симметрии 0m выводится, что симметризация 0m однозначно восстанавливается по функции R^φ , что приводит к следующей переформулировке теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ обозначает класс функций $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, равных нулю на $(-\infty, 0)$, непрерывных справа, неубывающих и возгнутых на $\mathbf{R}_+$ и удовлетворяющих соотношению (10). Распределения процессов Y^{φ_1} и Y^{φ_2} , отвечающих $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, различны.

В частности, для процесса фрактального броуновского движения с $H \in [\frac{1}{2}, 1)$ представление в виде процесса скользящего (11) с $\varphi \in \mathfrak{F}$ единственно, а именно, следует взять $\varphi(s) = s^{H-1/2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(s)$.

Отметим, что в работе [9] построен пример функции φ вида $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{[k, k+1)}(s)$, удовлетворяющей условиям (9) и (10) и отличной от $\mathbf{1}_{[0, \infty)}$, для которой процесс Y^φ есть двустороннее броуновское движение, см. также [8]. Разумеется, $\varphi \notin \mathfrak{F}$.

2. Вспомогательные результаты. В этом пункте предполагается, что m — некоторая мера из $\mathcal{M}$, $F(t) = m([0, t])$, f — непрерывная справа и невозрастающая на $\mathbf{R}_+$ функция, для которой выполнено (3). Очевидно, что в верхней комплексной полуплоскости определено преобразование Фурье меры m :

$$\phi(z) = \int_{\mathbf{R}_+} e^{izt} m(dt), \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Лемма 1. Функция $\phi(z)$ является аналитической в открытой полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и допускает продолжение по непрерывности в замкнутую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z \geq 0, z \neq 0\}$ с выколотой точкой 0, причем

$$\phi(z) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{[0, s]} e^{izt} m(dt), \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad z \neq 0.$$

Функция $\phi(z)$ не имеет нулей в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Если $m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^*$, то $\phi(z)$ не имеет нулей также в $\{\operatorname{Im} z = 0, z \neq 0\}$. Если $m \in \mathcal{M}^*$, то существует такое $r > 0$, что $\{z: \operatorname{Im} z = 0, z \neq 0, \phi(z) = 0\} = \{kr: k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Доказательство. В силу непрерывности справа функции f и соотношения (4) существует такая σ -конечная борелевская мера N на $(0, \infty)$, что

$$N((t, \infty)) = f(t), \quad t \in (0, \infty).$$

По теореме Фубини для любой неотрицательной измеримой функции $h(s)$ на $\mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+} h(s) m(ds) &= h(0)m(\{0\}) + \int_0^\infty h(s) f(s) ds \\ &= h(0)m(\{0\}) + \int_{(0, \infty)} \int_0^t h(s) ds N(dt); \end{aligned} \quad (13)$$

то же верно, если h измерима и интегрируема по m . В частности, беря $h(s) = 1_{[0,1]}(s)$, получим

$$\int_{(0, \infty)} (t \wedge 1) N(dt) < \infty. \quad (14)$$

В силу (14) для любого z с $\operatorname{Im} z \geq 0$ определена функция

$$\psi(z) = im(\{0\})z + \int_{(0, \infty)} (e^{izt} - 1) N(dt), \quad (15)$$

и из (13) следует, что

$$\phi(z) = \frac{\psi(z)}{iz}, \quad \operatorname{Im} z > 0; \quad (16)$$

более того, если z действительно и $z \neq 0$, то

$$\int_{[0,s]} e^{izt} m(dt) = m(\{0\}) + \frac{1}{iz} \int_{(0,s]} (e^{izt} - 1) N(dt) + \frac{e^{izs} - 1}{iz} f(s) \rightarrow \frac{\psi(z)}{iz}, \quad s \rightarrow \infty,$$

где последнее соотношение следует из (4). По формуле Леви-Хинчина $e^{\psi(z)}$, $z \in \mathbf{R}$, есть характеристическая функция безгранично делимого распределения μ без гауссовской компоненты с мерой Леви N , причем носитель $\operatorname{supp} \mu$ распределения μ удовлетворяет соотношению

$$\inf \{t: t \in \operatorname{supp} \mu\} = m(\{0\}), \quad (17)$$

функция $\psi(z)$ является непрерывной в $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ и аналитической в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ (см., например, [19, предложение 7.3.9]). Комбинируя вышеприведенные факты, мы получаем первое утверждение леммы.

Допустим, что $\phi(z) = 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $z \neq 0$. По доказанному $\psi(z) = 0$, в частности, $e^{\psi(z)} = 1$. Но при $\operatorname{Im} z > 0$

$$|e^{\psi(z)}| = \left| \int_{\mathbf{R}_+} e^{izt} \mu(dt) \right| \leq \int_{\mathbf{R}_+} e^{-t \operatorname{Im} z} \mu(dt) \leq 1,$$

и равенство возможно только в случае $\mu = \delta_{\{0\}}$, т.е. $N \equiv 0$ и $m(\{0\}) = 0$, откуда $m \equiv 0$ — случай, который мы исключили из определения $\mathcal{M}$. Значит, ϕ не имеет нулей в открытой верхней полуплоскости. Далее, если $e^{\psi(z)} = 1$ для действительного $z \neq 0$, то распределение μ сосредоточено на решетке $\{0, \pm h, \dots, \pm kh, \dots\}$, где $h = 2\pi/r$, $r = \inf \{z > 0: e^{\psi(z)} = 1\}$, причем $\{z: \operatorname{Im} z = 0, e^{\psi(z)} = 1\} = \{0, \pm r, \dots, \pm kr, \dots\}$. Значит, носитель меры Леви N лежит в множестве $\{h, \dots, kh, \dots\}$, см., например, [15, теорема 1.1.11]. Из (15) теперь следует, что $\psi(kr) = im(\{0\})kr$, поэтому ψ обращается в 0 только при $m(\{0\}) = 0$. Таким образом, мы доказали, что $\phi(z)$ может обращаться в 0 для действительных $z \neq 0$ только в случае $m \in \mathcal{M}^*$. Обратное утверждение проверяется непосредственно.

Определим функцию

$$\Psi(z) := \frac{\phi(z)}{1 - iz}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad z \neq 0.$$

Лемма 2. Для любого $y > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x + iy)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (18)$$

Значения модуля $|\Psi(x)|$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, полностью определяются симметризацией m .

Доказательство. Определим

$$g(t) := \int_{[0,t]} e^{s-t} m(ds) = m(\{0\}) e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} f(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

и $g(t) = 0$ при $t < 0$. Функция g неотрицательна и непрерывна на $\mathbf{R}_+$. Покажем, что

$$\int_0^{\infty} g^2(t) dt < \infty. \quad (19)$$

Действительно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t e^{s-t} f(s) ds \right)^2 dt &= \int_0^{\infty} \int_0^t \int_0^t e^{s-t} e^{u-t} f(s) f(u) ds du dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{s \vee u}^{\infty} e^{s+u-2t} f(s) f(u) dt ds du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-|s-u|} f(s) f(u) ds du \\ &= \frac{1}{2} \iint_{|s-u| \leq 1} e^{-|s-u|} f(s) f(u) ds du + \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{n < s-u \leq n+1} e^{-(s-u)} f(s) f(u) ds du \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{|s-u| \leq 1} f(s) f(u) ds du + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \iint_{0 < s-u \leq 1} e^{-(s-u)} f(s+n) f(u) ds du \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{|s-u| \leq 1} f(s) f(u) ds du + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \iint_{0 < |s-u| \leq 1} e^{-|s-u|} f(s) f(u) ds du \\ &\leq \frac{e}{2(e-1)} \iint_{|s-u| \leq 1} f(s) f(u) ds du = \frac{e}{2(e-1)} {}^0m([-1, 1]) < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку g есть плотность свертки $m \star \nu$ меры m с экспоненциальным распределением ν (со средним 1), имеем

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{izt} g(t) dt, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Далее, $e^{-yt} g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, сходится к $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, в $L^2(\mathbf{R})$ при $y \downarrow 0$ в силу (19), $\Psi(x+iy) \rightarrow \Psi(x)$ при $y \downarrow 0$ для любого $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ по лемме 1, и по теореме Планшереля $\Psi(x)$ есть преобразование Фурье функции $g(t)$ из $L^2(\mathbf{R})$. Следовательно, выполнено второе соотношение в (18). Первое неравенство в (18) есть простое следствие равенства Парсеваля.

Функция ${}^0g(t) := \int_0^{\infty} g(s) g(s+t) ds$, $t \in \mathbf{R}$, есть плотность симметризации ${}^0(m \star \nu) = {}^0m \star {}^0\nu$, поэтому 0g определяется по 0m . С другой стороны, по равенству Парсеваля

$${}^0g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 e^{ixt} dx, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (20)$$

Функция $|\Psi(x)|^2$ интегрируема на $\mathbf{R}$ и непрерывна при $x \neq 0$, поэтому в силу теоремы единственности для преобразования Фурье ее значения при $x \neq 0$ однозначно определяются значениями интеграла в правой части (20), что доказывает заключительное утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 3. Для доказательства (19) мы использовали монотонность f . Интересно, что можно доказать (19) в большей общности, пользуясь результатами П. Мазани [16] о структуре спиралей в гильбертовом пространстве. А именно, пусть

измеримая функция $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям (9) и (10). Для каждого $t \in \mathbf{R}$ определим функцию $x_t \in L^2(\mathbf{R})$ равенством

$$x_t(\cdot) := \varphi(-t - \cdot) - \varphi(-\cdot).$$

Тогда $(x_t, t \in \mathbf{R})$ — спираль в $L^2(\mathbf{R})$ (непрерывность кривой (x_t) следует из леммы 3.4 в [8]). Согласно теореме 2.22 в [16], существует такая единственная непрерывная стационарная кривая $(y_t, t \in \mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{R})$, что справедливо представление

$$x_t = y_t - \left(y_0 - x_0 + \int_0^t y_s ds \right), \quad t \in \mathbf{R},$$

при этом

$$y_t = \int_0^\infty e^{-s} (x_t - x_{t+s}) ds, \quad t \in \mathbf{R},$$

где интегралы понимаются как пределы римановых сумм. Легко проверить, что $y_t = \tilde{g}(-t - \cdot)$, где

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \int_0^t e^{-s} \varphi(t-s) ds, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

В частности, $\tilde{g} \in L^2(\mathbf{R})$. Также легко показать, что $\tilde{g} = g$, если $\varphi(t) = m([0, t])$, $t \in \mathbf{R}_+$.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $m \in \mathcal{M}$. Определим функции $\phi(z)$ и $\Psi(z)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $z \neq 0$, как это было сделано в п. 2. В первой части доказательства будет предполагаться, что $m \notin \mathcal{M}^*$.

По лемме 2 функция $\Psi(z)$ принадлежит классу Харди $H^2(\mathcal{H})$ в верхней полуплоскости $\mathcal{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. По факторизационной теореме для функций из этого класса (см. [14, теорема IX], [12, гл. 8])

$$\Psi(z) = ce^{i\alpha z} B(z) F(z) S(z), \quad z \in \mathcal{H}, \quad (21)$$

где $|c| = 1$, $\alpha \geq 0$, $B(z)$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции Ψ в $\mathcal{H}$, $F(z)$ — внешняя функция, задаваемая формулой

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\Psi(t)| \frac{1+tz}{t-z} \frac{dt}{1+t^2} \right), \quad z \in \mathcal{H}, \quad (22)$$

а $S(z)$ — сингулярная функция, представимая в виде

$$S(z) = \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} \mu(dt) \right), \quad z \in \mathcal{H},$$

где μ — конечная мера на $\mathbf{R}$, сингулярная относительно меры Лебега.

Сразу заметим, что два сомножителя в правой части (21) однозначно определяются по симметризации m : для F это вытекает из (22) и леммы 2, а $B(z) \equiv 1$, так как Ψ не имеет нулей в $\mathcal{H}$ по лемме 1.

Далее, покажем, что μ может нагружать только точку 0. Для этого надо повторить рассуждения Э. Акутовича [1, с. 182–183] (с небольшими упрощениями благодаря отсутствию произведений Бляшке) и последовательно вывести, что

— $\lim_{y \downarrow 0} |F(x+iy)| = |\Psi(x)|$ в каждой точке непрерывности предельной функции, т.е. для любого $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

— $\lim_{y \downarrow 0} |S(x+iy)| = 1$ для любого $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ в силу (21) (здесь вновь используется непрерывность $|\Psi(z)|$ в $\{\operatorname{Im} z = 0, z \neq 0\}$ и отсутствие нулей у этой функции на этом множестве);

— мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в любом замкнутом интервале, не содержащем 0.

Ввиду того, что μ сингулярна относительно меры Лебега, мы получаем, что μ может быть сосредоточена только в точке 0 (именно в этой части доказательства используется предположение $m \notin \mathcal{M}^*$; если $m \in \mathcal{M}^*$, мы получим тем же рассуждением

только то, что носитель μ лежит в $\{0, \pm r, \dots, \pm kr, \dots\}$, где r берется из леммы 1). Таким образом,

$$S(z) = \exp\left(-\frac{i\beta}{2\pi z}\right), \quad z \in \mathcal{H}, \quad (23)$$

где $\beta \geq 0$.

Далее, поскольку $|\Psi(t)|$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, — четная функция, из (22) следует, что $F(z)$ принимает положительные действительные значения на мнимой полупрямой $\{z = iy: y > 0\}$. То же верно для $S(z)$ в силу (23) и для $\tilde{\Psi}(z)$ по определению. Поэтому $c = 1$.

Предположим теперь, что $\tilde{m} \in \mathcal{M}$ и ${}^0\tilde{m} = {}^0m$. Определим для $\tilde{m}$ аналогично функции $\tilde{\phi}(z)$ и $\tilde{\Psi}(z)$, $\text{Im } z \geq 0$, $z \neq 0$. По лемме 2 $|\tilde{\Psi}(x)| = |\Psi(x)|$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, поэтому $\tilde{\Psi}$ не имеет нулей на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $\tilde{m} \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^*$ по лемме 1. Согласно доказанному, преобразования Лапласа $\phi(iy)$ и $\tilde{\phi}(iy)$, $y > 0$, мер m и $\tilde{m}$ удовлетворяют соотношениям

$$\phi(iy) = (1+y)e^{-\alpha y} F(iy) e^{-\beta/(2\pi y)} \quad \text{и} \quad \tilde{\phi}(iy) = (1+y)e^{-\tilde{\alpha} y} F(iy) e^{-\tilde{\beta}/(2\pi y)},$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0$, откуда

$$\phi(iy) = \tilde{\phi}(iy) e^{(\tilde{\alpha}-\alpha)y} e^{(\tilde{\beta}-\beta)/(2\pi y)}, \quad y > 0. \quad (24)$$

Из (14) и (15) следует, что $\psi(iy) \uparrow 0$ при $y \downarrow 0$, и в силу (16) $\phi(iy) = o(y^{-1})$, $y \downarrow 0$. Если $\tilde{\beta} > \beta$, то из (24) следует, что $\tilde{\phi}(iy) \rightarrow 0$ при $y \downarrow 0$, что приводит к противоречию, так как

$$\tilde{\phi}(iy) = \int_{\mathbf{R}_+} e^{-yt} \tilde{m}(dt) \uparrow \tilde{m}(\mathbf{R}_+), \quad y \downarrow 0.$$

Меня ролями ϕ и $\tilde{\phi}$, получаем, что случай $\tilde{\beta} < \beta$ также невозможен. Поэтому $\tilde{\beta} = \beta$.

Наконец, из (24) (с учетом равенства $\tilde{\beta} = \beta$) и теоремы единственности для преобразования Лапласа следует, что мера m получается из $\tilde{m}$ сдвигом на $\alpha - \tilde{\alpha}$ вправо. Поскольку 0 является левой крайней точкой носителя любой меры из $\mathcal{M}$, получаем, что $\tilde{\alpha} = \alpha$ и $\tilde{m} = m$.

Предположим, что $m \in \mathcal{M}^*$. По лемме 1 m абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с плотностью

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{[nh, (n+1)h)}(t),$$

где $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \downarrow 0$. Предполагается, что h выбрано максимально возможным, т.е. $h = 2\pi/\tau$, где τ взято из леммы 1. Поскольку

$${}^0m\left(\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]\right) = \frac{3}{4}h^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{4}h^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n a_{n+1},$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty. \quad (25)$$

Определим на единичном круге $D := \{z: |z| < 1\}$ комплексной плоскости функцию

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (26)$$

Хорошо известно, что при условии (25) ряд в (26) абсолютно сходится в D и Φ является аналитической функцией из класса Харди $H^2(D)$. Кроме того, для z с $\text{Im } z > 0$

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} e^{izt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{i(n+1)hz} - e^{inhz}}{iz} = \frac{e^{ihz} - 1}{iz} \Phi(e^{ihz}). \quad (27)$$

Отображение $z \rightsquigarrow e^{ihz}$ переводит полосу $\{\text{Im } z \geq 0, 0 \leq \text{Re } z < r\}$ в $D \setminus \{0\}$, интервал $\{\text{Im } z = 0, 0 \leq \text{Re } z < r\}$ — в $\partial D = \{z: |z| = 1\}$, мнимую полупрямую $\{\text{Re } z = 0,$

$\operatorname{Im} z \geq 0$ — в интервал $\{\operatorname{Im} z = 0, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$, а точку 0 — в точку 1. Отсюда и из леммы 1 следует, что функция $\Phi(z)$ допускает продолжение по непрерывности в $D \setminus \{1\}$, где она не имеет нулей (учитывается также, что $\Phi(0) = a_0 > 0$).

Оставшаяся часть доказательства по существу повторяет доказательство в случае $m \notin \mathcal{M}^*$ с заменой $\mathcal{H}$ на D и Ψ на Φ , поэтому мы отмечаем только основные моменты доказательства и не останавливаемся на деталях. По факторизационной теореме для функций из класса $H^2(D)$ (см. [22], [12, гл. 5])

$$\Phi(z) = cB(z)F(z)S(z), \quad z \in D, \quad (28)$$

где $|c| = 1$, $B(z)$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции Φ в D , т.е. $B(z) \equiv 1$, $F(z)$ — внешняя функция, задаваемая формулой

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln |\Phi(e^{i\vartheta})| \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \lambda(d\vartheta)\right), \quad z \in D,$$

где λ — мера Лебега на ∂D , $S(z)$ — сингулярная функция, представимая в виде

$$S(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \mu(d\vartheta)\right), \quad z \in D,$$

где μ — конечная мера на ∂D , сингулярная относительно λ .

Функция F однозначно определяется по симметризации m . Как и выше, исходя из того, что Φ непрерывна и не обращается в нуль в точках множества $\partial D \setminus \{1\}$, доказывается, что мера μ может быть сосредоточена только в точке 1, откуда $S(z) = \exp(-\beta(1+z)/[2\pi(1-z)])$, $\beta \geq 0$. Далее, $|\Phi(e^{i\vartheta})| = |\Phi(e^{-i\vartheta})|$, что позволяет доказать положительность функции F (так же, как Φ и S) на $\{\operatorname{Im} z = 0, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, откуда $c = 1$. Выражая теперь преобразование Лапласа $\phi(iy)$, $y > 0$, меры m через Φ из соотношения (27) и подставляя (28), мы получаем, что

$$\phi(iy) = \frac{1 - e^{-hy}}{y} F(e^{-hy}) \exp\left(-\frac{\beta}{2\pi} \frac{1 + e^{-hy}}{1 - e^{-hy}}\right), \quad y > 0.$$

Аналогично первому случаю доказывается, что β определяется из предыдущего соотношения однозначно. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2 и следствия 1. Мы начинаем со вспомогательных утверждений. Для $x, y > 0$ положим $A_x := \{(s, u) \in \mathbf{R}_+^2: 0 \leq s - u \leq x\}$, $B_y = [y, \infty) \times [y, \infty)$. Определим меру m^* на $\mathbf{R}_+$ из соотношения $m^*([0, t]) = t^\alpha$, где $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ фиксировано. Непосредственным вычислением находится, что

$${}^0m^*([0, t]) = C_\alpha t^{2\alpha}, \quad (29)$$

где C_α указано в формулировке теоремы 2, в частности, $m^* \in \mathcal{M}$.

Лемма 3. Пусть $m \in \mathcal{M}$ и

$$\limsup_{t \downarrow 0} t^{-\alpha} l^{-1}(t) m([0, t]) < \infty, \quad (30)$$

где функция $l(x)$, $x > 0$, медленно меняется в нуле и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \limsup_{t \downarrow 0} t^{-2\alpha} l^{-2}(t) m \times m(A_{tx} \cap B_{ty}) = 0 \quad \text{для любого } x > 0.$$

Доказательство. Поскольку $m(\{0\}) = 0$ в силу (30), $m([0, t]) = \int_0^t f(s) ds$, где f непрерывна справа и не возрастает. Тогда

$$m \times m(A_{tx} \cap B_{ty}) = \int \int_{\substack{0 \leq u-s \leq tx \\ s \geq ty, u \geq ty}} f(s) f(u) ds du \leq tx \int_{ty}^\infty f^2(s) ds. \quad (31)$$

Ввиду (30) можно выбрать $a > 0$ так, что

$$t^{-\alpha} l^{-1}(t) m([0, t]) \leq C < \infty, \quad t \in (0, a].$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f^2(s) ds &\leq \frac{1}{a} \int_a^\infty f(s) \int_{s-a}^s f(u) du ds \leq \frac{1}{a} \iint_{A_a} f(s) f(u) ds du \\ &= \frac{1}{a} {}^0m([0, a]) < \infty \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{ty}^a f^2(s) ds &\leq \int_{ty}^a \frac{\{m([0, s])\}^2}{s^2} ds \leq C^2 \int_{ty}^a \frac{l^2(s)}{s^{2-2\alpha}} ds \\ &\sim C^2 \frac{l^2(t)}{(1-2\alpha)t^{1-2\alpha}y^{1-2\alpha}}, \quad t \downarrow 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где последнее соотношение вытекает из классических теорем Караматы о правильно меняющихся функциях, см., например, [11, гл. VIII, § 9, теорема 1 б)]. Утверждение леммы следует из (31)–(33).

Докажем теперь теорему 2. Мы пользуемся обозначениями, введенными выше в этом пункте. Для $t > 0$ зададим меру $m_t \in \mathcal{M}$ соотношением

$$m_t([0, x]) = \frac{m([0, tx])}{ct^\alpha l(t)}.$$

Тогда (5) эквивалентно соотношению

$$\lim_{t \downarrow 0} m_t([0, x]) = m^*([0, x]), \quad x > 0, \quad (34)$$

а (6) — соотношению $\lim_{t \downarrow 0} {}^0m_t([0, x]) = {}^0m^*([0, x])$, $x > 0$, т.е.

$$\lim_{t \downarrow 0} m_t \times m_t(A_x) = m^* \times m^*(A_x), \quad x > 0. \quad (35)$$

Пусть выполнено (34). Поскольку множество $A_x \setminus B_y$ ограничено и мера Лебега его границы равна нулю для любых $x > 0$ и $y > 0$, имеем

$$\lim_{t \downarrow 0} m_t \times m_t(A_x \setminus B_y) = m^* \times m^*(A_x \setminus B_y), \quad (36)$$

в частности, $\liminf_{t \downarrow 0} m_t \times m_t(A_x) \geq m^* \times m^*(A_x)$. Обратное неравенство

$$\limsup_{t \downarrow 0} m_t \times m_t(A_x) \leq m^* \times m^*(A_x)$$

следует из (36) и леммы 3.

Пусть теперь выполнено (35). Положим $F_t(x) = m_t([0, x])$, $x \in \mathbf{R}_+$. В силу неравенства (2) и центральной симметрии 0m

$$\limsup_{t \downarrow 0} F_t(x) \leq \sqrt{2C_\alpha} x^\alpha. \quad (37)$$

По теореме Хелли о выборе, из любой последовательности $\{t'_n\} \downarrow 0$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{t_n\} \downarrow 0$, что имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{t_n}(x) = \widehat{F}(x) \quad (38)$$

в каждой точке непрерывности функции $\widehat{F}(x)$, и для доказательства (34) достаточно показать, что $\widehat{F}(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbf{R}_+$.

Заметим, что $\widehat{F}$ вогнута (так как вогнуты F_t). Из (37) следует, что $\widehat{F}(x) \leq \sqrt{2C_\alpha} x^\alpha$, так что $\widehat{F}$ непрерывна справа в нуле и имеет место представление $\widehat{F}(x) = \int_0^x \widehat{f}(y) dy$, где $\widehat{f}$ непрерывна справа и не возрастает. Из неравенства $\widehat{f}(x) \leq x^{-1} \widehat{F}(x) \leq \sqrt{2C_\alpha} x^{\alpha-1}$ следует, что интеграл $\iint_{A_x} \widehat{f}(s) \widehat{f}(u) ds du$ конечен для каждого $x > 0$, поэтому мера $\widehat{m}$ с плотностью $\widehat{f}$ удовлетворяет свойству 2) в определении класса $\mathcal{M}$. Значит, $\widehat{m} \in \mathcal{M}$.

Поскольку $\hat{m}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, из (38) следует, что для любых $x > 0$ и $y > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{t_n} \times m_{t_n}(A_x \setminus B_y) = \hat{m} \times \hat{m}(A_x \setminus B_y).$$

В силу соотношений (2) и (6) выполнено соотношение (30), поэтому из утверждения леммы 3 и предыдущего равенства, как и выше, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{t_n} \times m_{t_n}(A_x) = \hat{m} \times \hat{m}(A_x).$$

В сочетании с (35) это влечет равенство ${}^0\hat{m} = {}^0m^*$. По теореме 1 $\hat{m} = m^*$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Из цитировавшейся выше теоремы 16) [11, гл. VIII, § 9] о правильно меняющихся функциях следует, что (7) влечет (5), а (8) влечет (6). Обратные импликации следуют из теоремы о монотонной плотности, см., например, [3, теорема 1.7.2b] (монотонность g на $(0, \infty)$ следует из ее определения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akutowicz E. J.* On the determination of the phase of a Fourier integral. I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 83, № 1, p. 179–192.
2. *Akutowicz E. J.* On the determination of the phase of a Fourier integral. II. — Proc. Amer. Math. Soc., 1957, v. 8, № 1, p. 234–238.
3. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 494 p.
4. *Carnal H., Dozzi M.* On a decomposition problem for multivariate probability measures. — J. Multivariate Anal., 1989, v. 31, № 2, p. 165–177.
5. *Carnal H., Fel'dman G. M.* Phase retrieval for probability measures on Abelian groups. — J. Theoret. Probab., 1995, v. 8, № 3, p. 717–725.
6. *Carnal H., Fel'dman G. M.* Phase retrieval for probability measures on Abelian groups. II. — J. Theoret. Probab., 1997, v. 10, № 4, p. 1065–1074.
7. *Carnal H., Feldman G. M.* A stability property for probability measures on Abelian groups. — Statist. Probab. Lett., 2000, v. 49, № 1, p. 39–44.
8. *Cheridito P.* Gaussian moving averages, semimartingales and option pricing. — Stochastic Process. Appl., 2004, v. 109, № 1, p. 47–68.
9. *Cherny A. S.* When is a moving average a semimartingale? Research Report № 2001-28. Aarhus: MaPhySto, 2001.
10. *Ehm W., Gneiting T., Richards D.* Convolution roots of radial positive definite functions with compact support. Technical Report № 428. Washington: Department of Statistics, University of Washington, 2003; Trans. Amer. Math. Soc. (в печати).
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
12. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963, 312 с.
13. *Hofstetter E. M.* Construction of time-limited functions with specified autocorrelation functions. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1964, v. IT-10, № 2, p. 119–126.
14. *Крылов В. И.* О функциях, регулярных в полуплоскости. — Матем. сб., 1939, т. 6, № 1, с. 95–138.
15. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 479 с.
16. *Masani P.* On helixes in Hilbert space. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 1, с. 3–20.
17. *Rosenblatt J.* Phase retrieval. — Comm. Math. Phys., 1984, v. 95, № 3, p. 317–343.
18. *Rosenblatt J.* Determining a distribution from the modulus of its Fourier transform. — Complex Variables Theory Appl., 1988, v. 10, № 4, p. 319–326.
19. *Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G.* Analytic Methods of Probability Theory. Berlin: Akademie-Verlag, 1985, 311 p.
20. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994, 632 p.

21. Seiffert I., Riedel M. Uniqueness of two factorization problems. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 207–211.
22. Smirnoff V. Sur les valeurs limites des fonction régulières à l'intérieur d'un cercle. — Журн. Ленинград. физ.-матем. об-ва, 1928, т. 2, № 2, с. 22–37.
23. Walther A. The question of phase retrieval in optics. — Optica Acta, 1963, v. 10, p. 41–49.

Поступила в редакцию
28.I.2004

© 2004 г.

ЛИПЧЮС А. А.*

ОДНО СВОЙСТВО НЕЗАВИСИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹⁾

В статье рассматривается достаточное условие (справедливое в случае общих вероятностных пространств) того, что с данным отображением могут быть независимы только конечнозначные случайные величины.

Ключевые слова и фразы: независимость, конечное число значений, теорема Оттавиани, абсолютная непрерывность.

Целью данной работы является обобщение следующего результата, полученного в 1947 году Дж. Оттавиани [1]. Пусть $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримые функции, g абсолютно непрерывна и отлична от константы, причем f и g независимы как случайные величины на отрезке с мерой Лебега. Тогда f почти всюду совпадает с функцией, принимающей конечное множество значений.

Естественно возникает вопрос, какие свойства отображения g отвечают за то, что с ним могут быть независимы только ступенчатые функции с конечным числом значений. Оказывается, что для общих вероятностных пространств имеет место следующий более общий результат, в котором независимость отображений f и g со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$ понимается в обычном смысле: $\mathbf{P}\{f \in A, g \in B\} = \mathbf{P}\{f \in A\} \mathbf{P}\{g \in B\}$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$. Через $\mathbf{P} \circ g^{-1}$ будем обозначать образ меры $\mathbf{P}$ при отображении g , т.е. $\mathbf{P} \circ g^{-1}(B) = \mathbf{P}(g^{-1}(B))$. Напомним, что σ -алгебра $\mathcal{A}$ называется счетно-порожденной, если она порождается не более чем счетным семейством множеств. Если существует не более чем счетное семейство множеств $A_n \in \mathcal{A}$, разделяющих точки X (т.е. для всякой пары различных точек $x, y \in X$ найдется такое A_n , что либо $x \in A_n, y \notin A_n$, либо $y \in A_n, x \notin A_n$), то $\mathcal{A}$ называется счетно-разделяющей. Множество E называется измеримым относительно меры ν на $\mathcal{A}$, если оно входит в лебеговское пополнение $\mathcal{A}$ относительно ν .

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство со счетно-порожденной и счетно-разделяющей σ -алгеброй $\mathcal{A}$. Предположим, что отображения $f, g: \Omega \rightarrow X$ измеримы и независимы, причем g удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $g(E)$ измеримо относительно меры $\mathbf{P} \circ g^{-1}$ для всех $E \in \mathcal{F}$;
- 2) для всякой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_k \in \mathcal{F}$ с $\mathbf{P}(A_k) > 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k) = 0$ существует такое n , что $\mathbf{P} \circ g^{-1}(g(A_n)) < 1$.

Тогда f почти всюду совпадает с отображением, принимающим конечное множество значений.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ 04-01-00748.