Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Липчюс, Одно свойство независимых отображений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 362–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:39:31

21. Seiffert I., Riedel M. Uniqueness of two factorization problems. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 207–211.
22. Smirnoff V. Sur les valeurs limites des fonction régulières à l'intérieur d'un cercle. — Журн. Ленинград. физ.-матем. об-ва, 1928, т. 2, № 2, с. 22–37.
23. Walther A. The question of phase retrieval in optics. — Optica Acta, 1963, v. 10, p. 41–49.

Поступила в редакцию
28.I.2004

© 2004 г.

ЛИПЧЮС А. А.*

ОДНО СВОЙСТВО НЕЗАВИСИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹⁾

В статье рассматривается достаточное условие (справедливое в случае общих вероятностных пространств) того, что с данным отображением могут быть независимы только конечнозначные случайные величины.

Ключевые слова и фразы: независимость, конечное число значений, теорема Оттавиани, абсолютная непрерывность.

Целью данной работы является обобщение следующего результата, полученного в 1947 году Дж. Оттавиани [1]. Пусть $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримые функции, g абсолютно непрерывна и отлична от константы, причем f и g независимы как случайные величины на отрезке с мерой Лебега. Тогда f почти всюду совпадает с функцией, принимающей конечное множество значений.

Естественно возникает вопрос, какие свойства отображения g отвечают за то, что с ним могут быть независимы только ступенчатые функции с конечным числом значений. Оказывается, что для общих вероятностных пространств имеет место следующий более общий результат, в котором независимость отображений f и g со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$ понимается в обычном смысле: $\mathbf{P}\{f \in A, g \in B\} = \mathbf{P}\{f \in A\} \mathbf{P}\{g \in B\}$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$. Через $\mathbf{P} \circ g^{-1}$ будем обозначать образ меры $\mathbf{P}$ при отображении g , т.е. $\mathbf{P} \circ g^{-1}(B) = \mathbf{P}(g^{-1}(B))$. Напомним, что σ -алгебра $\mathcal{A}$ называется счетно-порожденной, если она порождается не более чем счетным семейством множеств. Если существует не более чем счетное семейство множеств $A_n \in \mathcal{A}$, разделяющих точки X (т.е. для всякой пары различных точек $x, y \in X$ найдется такое A_n , что либо $x \in A_n, y \notin A_n$, либо $y \in A_n, x \notin A_n$), то $\mathcal{A}$ называется счетно-разделяющей. Множество E называется измеримым относительно меры ν на $\mathcal{A}$, если оно входит в лебеговское пополнение $\mathcal{A}$ относительно ν .

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство со счетно-порожденной и счетно-разделяющей σ -алгеброй $\mathcal{A}$. Предположим, что отображения $f, g: \Omega \rightarrow X$ измеримы и независимы, причем g удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $g(E)$ измеримо относительно меры $\mathbf{P} \circ g^{-1}$ для всех $E \in \mathcal{F}$;
- 2) для всякой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_k \in \mathcal{F}$ с $\mathbf{P}(A_k) > 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k) = 0$ существует такое n , что $\mathbf{P} \circ g^{-1}(g(A_n)) < 1$.

Тогда f почти всюду совпадает с отображением, принимающим конечное множество значений.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ 04-01-00748.

Доказательство. Так как любое измеримое пространство со счетно-порожденной и счетно-разделяющей σ -алгеброй изоморфно некоторому подмножеству в $[0, 1]$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(M)$ (см. [2, теорема 6.5.8]), то можно считать, что $f, g: \Omega \rightarrow M \subset [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. Докажем следующее вспомогательное утверждение: если $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$ и g независима с I_A , то $P \circ g^{-1}(g(A)) = 1$. Действительно,

$$0 = P\{g \in X \setminus g(A), I_A = 1\} = P\{g \in X \setminus g(A)\} P(A),$$

откуда $P\{g \in X \setminus g(A)\} = 0$, т.е. $P\{g \in g(A)\} = 1$. Отметим, что в этом вычислении мы воспользовались определяющим соотношением независимости g и I_A применительно к множеству $E = X \setminus g(A)$, которое может и не входить в $\mathcal{B}(M)$. Чтобы обосновать это, заметим, что по условию найдутся такие множества $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$, что $B_1 \subset E \subset B_2$ и $P \circ g^{-1}(B_1) = P \circ g^{-1}(B_2)$. Поэтому $g^{-1}(B_1) \subset g^{-1}(E) \subset g^{-1}(B_2)$, откуда вытекает, что $g^{-1}(E)$ измеримо относительно P и имеет равную с $g^{-1}(B_1)$ и $g^{-1}(B_2)$ P -меру. При этом

$$P\{g \in X \setminus g(A), I_A = 1\} = P\{g \in B_1, I_A = 1\} = P\{g \in B_1\} P(A) = P\{g \in E\} P(A).$$

Напомним, что число x называется существенным значением измеримого отображения f в $\mathbf{R}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ имеем $P\{f \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} > 0$. Теперь докажем, что множество существенных значений отображения f конечно. Предположим противное, т.е. что имеется счетное число существенных значений $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Будем строить последовательность множеств $A_n \in \mathcal{F}$ таких, что они имеют положительные стремящиеся к нулю меры, g независима с каждым I_{A_n} . Положим $U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. По определению существенного значения существует такое $\varepsilon_{1,1} > 0$, что $P\{f \in U_{\varepsilon_{1,1}}(x_1)\} > 0$. Положим $A_1 := f^{-1}(U_{\varepsilon_{1,1}}(x_1))$. Существуют такие $\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{2,2} > 0$, что $U_{\varepsilon_{1,2}}(x_1) \cap U_{\varepsilon_{2,2}}(x_2) = \emptyset$. Существует $k \in \{1, 2\}$ такое, что $0 < P\{f \in U_{k,2}\} < \frac{1}{2}$. Положим $A_2 = f^{-1}(U_{k,2}(x_k))$. Продолжая индуктивно, на n -м шаге получаем, что существуют такие $\varepsilon_{1,n}, \dots, \varepsilon_{n,n} > 0$, что $U_{\varepsilon_{i,n}}(x_i)$ попарно не пересекаются, $i = 1, \dots, n$, а также существует такое $k \in \{1, \dots, n\}$, что $0 < P\{f \in U_{k,n}(x_k)\} < n^{-1}$. Положим $A_n = f^{-1}(U_{k,n}(x_k))$.

В силу построения и независимости f и g получили требуемую последовательность множеств A_n . Из построения видно, что A_k можно было брать непересекающимися. Используя доказанное выше утверждение, имеем $P \circ g^{-1}(g(A_n)) = 1$ для всех n — противоречие с условием.

Итак, доказано, что множество существенных значений f конечно. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — все эти значения, т.е. других существенных значений нет. Докажем, что

$$P \circ f^{-1}(M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = 0.$$

Это и будет означать утверждение теоремы. Пусть $G = M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Обозначим через τ топологию в M , индуцированную из $[0, 1]$. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетная база топологии τ . По определению G для всякого $x \in G$ существует такой интервал $U_x \in \tau$, что $x \in U_x$ и $P \circ f^{-1}(U_x) = 0$. Тогда $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$, причем для каждого $k \in \mathbf{N}$ найдется такая точка $x \in G$, что $B_{n_k} \subset U_x$, откуда $P \circ f^{-1}(B_{n_k}) \leq P \circ f^{-1}(U_x) = 0$. Таким образом, получаем $P \circ f^{-1}(G) = P \circ f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P \circ f^{-1}(B_{n_k}) = 0$.

Отметим, что условие 1) автоматически выполнено для борелевских отображений суслинских пространств, наделенных борелевскими σ -алгебрами. Поэтому в большинстве реально возникающих ситуаций остается лишь условие 2).

Теперь покажем, что теорема Оттавиани непосредственно вытекает из нашего результата. Известно (см. [2]), что борелевское отображение отрезка в $\mathbf{R}$ обладает тем свойством, что образы борелевских множеств универсально измеримы. Кроме того, абсолютно непрерывная функция на отрезке с мерой Лебега λ обладает свойством (S) Банаха: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что как только $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ и $\lambda(A) < \delta$, то $\lambda(g(A)) < \varepsilon$. Так как функция g отлична от константы, то у меры $\mu \circ g^{-1}$ имеется компонента, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега (таковой будет образ сужения меры Лебега на множество, где производная g существует и отлична от нуля, см. [2, лемма 5.8.13]), а тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем, что g удовлетворяет условиям теоремы Оттавиани.

Получаем, что в теореме Оттавиани условие абсолютной непрерывности, накладываемое на функцию g , можно ослабить до следующих трех условий: измеримость образов борелевских множеств относительно меры, индуцированной g (что автоматически выполнено для борелевских функций), свойство (S) Банаха и наличие у образа меры Лебега при отображении g абсолютно непрерывной компоненты относительно меры Лебега. Заметим, что свойство (S) нельзя заменить на более слабое свойство (N) Лузина (образ всякого множества меры нуль имеет меру нуль). Это будет показано в следующем замечании.

З а м е ч а н и е 1. Если в теореме Оттавиани заменить отрезок $[0,1]$ на интервал $(0,1)$ и понимать абсолютную непрерывность как абсолютную непрерывность на каждом подотрезке, то теорема будет неверна. Пример: положим $g(x) = 2^{2k}(x - \alpha_{2k})$ при $x \in (\alpha_{2k}, \beta_{2k}]$ и $g(x) = 2^{2k-1}(\beta_{2k-1} - x)$ при $x \in (\alpha_{2k-1}, \beta_{2k-1}]$, где

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_{k+1} = \beta_k, \quad \beta_{k+1} = \beta_k + \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} k I_{(\alpha_k, \beta_k]}.$$

Тогда g абсолютно непрерывна на каждом подотрезке, f и g независимы, у f счетное множество существенных значений.

Этот же пример показывает, что свойство (S) нельзя заменить на свойство (N). Действительно, доопределим f и g на концах интервала, например, нулем. Тогда g обладает свойством (N), так как она взаимно однозначна на каждом интервале (α_k, β_k) , но не обладает свойством (S) в силу того, что образ интервала $(1 - \varepsilon, 1)$ для всех $\varepsilon > 0$ имеет меру 1.

З а м е ч а н и е 2. В теореме Оттавиани требование абсолютной непрерывности нельзя заменить на непрерывность и ограниченность вариации. Например, в качестве g возьмем лестницу Кантора, которая является непрерывной функцией ограниченной вариации, но не абсолютно непрерывна. Дополнение к множеству Кантора — счетное множество непересекающихся интервалов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Положим

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2^n}, \alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2^{n-1}} \right) \quad \text{при } n = 2, 3, \dots,$$

$A_1 = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k$. Пусть $f = \sum_{k=1}^{\infty} k I_{A_k}$, тогда f и g независимы.

З а м е ч а н и е 3. Если в качестве g в нашей теореме взять тождественное отображение $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g(x) = x$, с борелевскими σ -алгебрами, то предположения теоремы будут выполнены, однако если изменить g на множестве Кантора, а именно определить ее там как биекцию множества Кантора с отрезком $[0, 1]$, которая сохраняет порядок, то первое условие сохранится, а второе нарушится. Этот пример показывает, что невыполнение второго условия еще не влечет существование функции, независимой с данной и принимающей хотя бы счетное множество существенных значений. Более того, так как свойство независимости двух отображений инвариантно относительно переопределения отображений на множестве меры нуль, то в нашей теореме достаточно потребовать от отображения g наличия модификации с условиями 1) и 2). Однако остается открытым вопрос: если функция g такова, что условие 2) не выполняется ни для какой ее версии, для которой выполнено условие 1), то всегда ли существует функция f , независимая с ней и принимающая счетное множество существенных значений?

Этот же пример показывает, что если требовать выполнения второго условия нашей теоремы лишь для последовательностей непересекающихся множеств, то получится строго более слабое условие. Действительно, если в качестве $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ взять покрытия множества Кантора интервалами со сколь угодно малой суммой длин, то условие 2) выполняться не будет, однако последовательности непересекающихся множеств с тем же свойством для данной функции нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ottaviani G.* Sulla indipendenza delle funzioni misurabili. — Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 1947, v. 2, p. 393–398.
2. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.

Поступила в редакцию
21.IV.2004

© 2004 г.

НОВАК С. Ю.*

О САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СТАТИСТИКЕ СТЬЮДЕНТА

В статье оценивается точность нормальной аппроксимации распределений некоторых нелинейных функционалов от сумм независимых случайных векторов. В качестве следствия получена оценка типа Берри–Эссеена с явными константами для распределений самонормированных сумм случайных величин и статистики Стьюдента.

Ключевые слова и фразы: самонормированные суммы случайных величин, статистика Стьюдента.

1. Введение. Задача оценивания точности нормальной аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин восходит к работе А. М. Ляпунова [16]. Решение задачи в случае сумм с неслучайной нормировкой было найдено Э. Берри [5] и К.-Г. Эссееном [12]: если $X, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $EX = 0$ и $E|X|^3 < \infty$, то

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma \sqrt{n}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \leq C_* n^{-1/2} E|X|^3 \sigma^{-3},$$

где C_* — абсолютная постоянная (известно [24], что $C_* \leq 0.7655$), $\sigma^2 = DX$ и Φ — функция распределения нормальной $\mathcal{N}(0; 1)$ случайной величины. В приложениях, как правило, дисперсия σ^2 не известна и должна быть заменена ее состоятельной оценкой $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2$, где $\hat{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ есть выборочное среднее. Таким образом, мы приходим к задаче оценивания точности нормальной аппроксимации для распределения статистики Стьюдента

$$t_n = \sum_{i=1}^n X_i \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2 \right]^{-1/2}$$

Статистика Стьюдента известна своими многочисленными приложениями. Ее распределение изучалось в работах В. Бенткуса, Ф. Гётце, Э. Жине, Д. М. Мэйсона, Р. Фишера, П. Холла, К.-Л. Чжуна, Д. М. Чибисова, Б. Эфрона и других специалистов.

В. А. Егоров [28] и Э. Жине, Ф. Гётце и Д. М. Мэйсон [14] нашли необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности t_n . В. В. Славова [23], применив результаты Чибисова [7], [8], показала, что

$$\Delta_n \equiv \sup_x |\mathbf{P}\{t_n < x\} - \Phi(x)| \leq C n^{-1/2} \quad (\exists C < \infty). \quad (1)$$

* Middlesex University Business School, The Burroughs, London, NW4 4BT, UK;
e-mail: s.novak@mdx.ac.uk