Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, О самонормированных суммах случайных величин и статистике Стьюдента, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 365–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:43:14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ottaviani G.* Sulla indipendenza delle funzioni misurabili. — Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 1947, v. 2, p. 393–398.
2. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.

Поступила в редакцию
21.IV.2004

© 2004 г.

НОВАК С. Ю.*

О САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СТАТИСТИКЕ СТЬЮДЕНТА

В статье оценивается точность нормальной аппроксимации распределений некоторых нелинейных функционалов от сумм независимых случайных векторов. В качестве следствия получена оценка типа Берри–Эссеена с явными константами для распределений самонормированных сумм случайных величин и статистики Стьюдента.

Ключевые слова и фразы: самонормированные суммы случайных величин, статистика Стьюдента.

1. Введение. Задача оценивания точности нормальной аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин восходит к работе А. М. Ляпунова [16]. Решение задачи в случае сумм с неслучайной нормировкой было найдено Э. Берри [5] и К.-Г. Эссееном [12]: если $X, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $EX = 0$ и $E|X|^3 < \infty$, то

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma \sqrt{n}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \leq C_* n^{-1/2} E|X|^3 \sigma^{-3},$$

где C_* — абсолютная постоянная (известно [24], что $C_* \leq 0.7655$), $\sigma^2 = DX$ и Φ — функция распределения нормальной $\mathcal{N}(0; 1)$ случайной величины. В приложениях, как правило, дисперсия σ^2 не известна и должна быть заменена ее состоятельной оценкой $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2$, где $\hat{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ есть выборочное среднее. Таким образом, мы приходим к задаче оценивания точности нормальной аппроксимации для распределения статистики Стьюдента

$$t_n = \sum_{i=1}^n X_i \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2 \right]^{-1/2}$$

Статистика Стьюдента известна своими многочисленными приложениями. Ее распределение изучалось в работах В. Бенткуса, Ф. Гётце, Э. Жине, Д. М. Мэйсона, Р. Фишера, П. Холла, К.-Л. Чжуна, Д. М. Чибисова, Б. Эфрона и других специалистов.

В. А. Егоров [28] и Э. Жине, Ф. Гётце и Д. М. Мэйсон [14] нашли необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности t_n . В. В. Славова [23], применив результаты Чибисова [7], [8], показала, что

$$\Delta_n \equiv \sup_x |\mathbf{P}\{t_n < x\} - \Phi(x)| \leq C n^{-1/2} \quad (\exists C < \infty). \quad (1)$$

* Middlesex University Business School, The Burroughs, London, NW4 4BT, UK;
e-mail: s.novak@mdx.ac.uk

Бенткус и Гётце [3] установили, что существует абсолютная постоянная $C < \infty$ такая, что

$$\Delta_n \leq C(\mathbf{E}X^2\mathbf{I}^> + n^{-1/2}\mathbf{E}|X|^3\mathbf{I}^<), \quad (2)$$

где $\sigma = 1$, $\mathbf{I}^< = \mathbf{I}\{X^2 \leq n\}$ и $\mathbf{I}^> = \mathbf{I}\{X^2 > n\}$. Равномерная и неравномерная оценки $|\mathbf{P}\{t_n < x\} - \Phi(x)|$ с явными постоянными впервые найдены в [19] (см. также [20]). Отметим, что оценки в [19], [20] имеют порядок убывания $n^{-1/2}$ при конечном четвертом моменте, но убывают как $n^{-2/7}$, если только третий момент конечен.

Статистика Стьюдента t_n тесно связана с самонормированной суммой

$$t_n^* = \sum_{i=1}^n X_i \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 \right]^{-1/2}$$

Действительно, обозначим $s_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда при $x \in [0; \sqrt{n}]$ (отметим, что $|t_n^*| \leq \sqrt{n}$)

$$\begin{aligned} \{t_n \geq x\} &= \left\{ s_n \geq x \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})^2} \right\} = \left\{ s_n^2 \geq x^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{s_n^2}{n} \right), s_n \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ s_n^2 \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \geq x^2 \sum_{i=1}^n X_i^2, s_n \geq 0 \right\} = \left\{ t_n^* \geq \frac{x}{\sqrt{1 + x^2/n}} \right\}, \end{aligned}$$

ср. с [9] (мы полагаем $t_n = \infty$, если $X_1 = \dots = X_n$). Таким образом, результаты о распределении t_n^* влекут соответствующие утверждения о t_n .

Согласно [22], для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ найдется постоянная $c \in (0; 1)$ такая, что

$$e^{-(1+\varepsilon)x^2/2} \leq \mathbf{P}\{t_n^* \geq x\} \leq e^{-(1-\varepsilon)x^2/2} \quad (c^{-1} < x < cn^{1/2}) \quad (3)$$

для всех достаточно больших n . Объединяя (1) и (3), получим

$$\Delta_n^*(x) \equiv |\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)| \leq Cn^{-(1-\delta)/2} e^{-(1-\varepsilon)\delta x^2/2} \quad (c^{-1} < x < cn^{1/2})$$

для любого $\delta \in (0; 1)$. Теорема 2.2 и следствие 2.3 в [26] утверждают, что найдутся абсолютные постоянные $A \in (0; \infty)$ и $b \in (0; 1)$ такие, что

$$\Delta_n^*(x) \leq AE|X|^{10/3} n^{-1/2} e^{-bx^2/2} \quad (n \geq 1, x \in \mathbf{R}). \quad (4)$$

Обозначим $\varphi = \Phi'$. Чибисов [8] показал, что

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\{t_n < x\} - \Phi(x) - \frac{2x^2 + 1}{6\sqrt{n}} \varphi(x) \mathbf{E}X^3 \right| = o(n^{-1/2}), \quad (5)$$

если $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$ и характеристическая функция случайного вектора (X, X^2) удовлетворяет условию Крамера. П. Холл [15] установил соотношение (5) в предположении, что распределение случайной величины X несингулярно. Согласно М. Блозелису и Х. Путеру [30], соотношение (5) справедливо, если распределение X нерешетчатое. Если, сверх того, $\mathbf{E}|X|^{4+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и условие Крамера выполнено, то правая часть (5) может быть заменена на $O(n^{-1})$ (см. [4]).

Задача установления оценки типа Берри-Эссеена с явными постоянными при правильных моментных ограничениях долгое время оставалась открытой. Результат такого типа необходим, к примеру, при построении неасимптотических доверительных интервалов (ср. с [18], [19]).

Решение указанной задачи изложено в п. 2. Оно получено как следствие более общего результата п. 3, в котором оценивается точность нормальной аппроксимации распределений квадратичных функционалов от сумм независимых случайных векторов. Основным результатом п. 3 является теорема 2, устанавливающая оценку типа Берри-Эссеена для распределений таких функционалов. Решение задачи Ляпунова для статистики Стьюдента (теорема 1 п. 2) получено в качестве следствия теоремы 2. Доказательства результатов п. 2 отнесены в п. 4.

2. Самонормированные суммы. В этом пункте изучается точность нормальной аппроксимации распределений статистики Стьюдента и самонормированных сумм $S_n/\sqrt{T_n}$, где $(\xi, \eta), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ и $T_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$. Не ограничивая общности, достаточно оценить $P\{S_n/\sqrt{T_n} < x\} - \Phi(x)$ для неотрицательных x .

Мы будем предполагать, что $\eta \geq 0$, $E\xi = 0$, $E|\xi|^3 + E\eta^{3/2} < \infty$. Условимся, что $\xi = 0$, если $\eta = 0$, и неопределенность вида $0/0$ равна 0. Черта над случайной величиной означает, что она центрирована своим математическим ожиданием. Операция умножения первична по отношению к делению.

Пусть $\sigma_\xi^2 = E\xi^2$ и $m = E\eta$. Обозначим

$$t_n^o = \frac{S_n/\sigma_\xi}{\sqrt{T_n/m}}, \quad t_n^* = \frac{S_n/\sigma_\xi}{\sqrt{T_n/m_\eta}},$$

где $m_\eta = E\eta^\zeta$, $\eta^\zeta = \eta \mathbf{1}\{\eta \leq N\}$ и N есть уровень срезки. Пусть $C_* \leq 0.7655$ и $C_+ \leq C_* + 8(1 + \varepsilon) < 30.52$ — постоянные в равномерном и неравномерном неравенствах Берри–Осеева для сумм случайных величин с неслучайной нормировкой (иначе говоря, при $\eta \equiv 1$, см. [2], [21], [24]). Обозначим

$$c_*^3 = C_*, \quad c_+^3 = C_+, \quad m_0 = E\xi\eta^\zeta, \quad \sigma_\eta^2 = E(\eta^\zeta)^2, \quad \psi_\xi^3 = E|\xi|^3, \quad \psi_\eta^3 = E|\eta^\zeta|^3,$$

$$\psi_* = 1 + \frac{3x(m_0 \vee 0)}{2m_\eta\sigma_\xi\sqrt{n}}, \quad \psi = \left(\psi_\xi + \frac{x\psi_\eta\sigma_\xi}{2m_\eta\sqrt{n}}\right)\psi_*.$$

Кроме того, положим $\kappa = \min\{1; (E|\xi|/\sigma_\xi + xn^{-1/2})\psi_*\}$,

$$r = x^2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \left[\frac{|m_0|/m_\eta}{\sigma_\xi\sqrt{n}} + 4|x| \frac{\sigma_\eta^2}{nm_\eta^2} \right],$$

$$r_* = \frac{(\psi/\sigma_\xi)^3}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right) + \frac{x\sigma_\eta^2\psi_*}{nm_\eta^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{n}\right) + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}} + \frac{2^{5/3}x\psi_*}{m_\eta^2n^{4/3}} \left(2 + \frac{(\psi/\sigma_\xi)^3}{\sqrt{n}}\right)^{1/3} (E|\eta^\zeta|^{3/2})^{5/3},$$

$$r_* = \frac{x\psi_*^2}{m_\eta^2n^{3/2}} \left[\frac{\psi_\xi\psi_\eta^2}{\sigma_\xi} + \frac{x\psi_\eta^3}{2m_\eta\sqrt{n}} + \frac{2^{5/3}}{n^{1/3}} \left(\frac{E|\xi||\eta^\zeta|}{\sigma_\xi} + \frac{x\sigma_\eta^2}{2m_\eta\sqrt{n}} \right) (E|\eta^\zeta|^{3/2})^{2/3} \right],$$

$$R_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{\psi_\xi}{\sigma_\xi} \left(c_* + c_+ \frac{m_0/2 \vee 0}{m_\eta\sigma_\xi\sqrt{n}} \right) + \frac{\psi_\eta/2}{m_\eta\sqrt{n}} \left(c_+ \wedge c_* \frac{m_\eta\sqrt{n}}{\sigma_\eta} \right) \right]^3.$$

Теорема 1. Если $0 \leq x \leq m_\eta\sqrt{n}/3\sigma_\eta$, то

$$-R_n^- \leq P\{t_n^* < x\} - \Phi(x) \leq R_n^+, \quad (6)$$

где $R_n^- = r + r_* + r_*$ и $R_n^+ = R_n^* + r/2 + nP\{\eta > N\}$.

Как отмечено в [19], $P\{t_n^* \geq x\} = O(n^{-2})$ при $x > m_\eta\sqrt{n}/3\sigma_\eta$.

Теорема 1 и очевидные неравенства $\sigma_\eta^2 \leq E|\eta|^{3/2}N^{1/2}$ и $\psi_\eta^3 \leq E|\eta|^{3/2}N^{3/2}$ влекут

$$\sup_x |P\{t_n^o < x\} - \Phi(x)| \leq Cn^{-1/2}(E|\xi|^3 \vee E\eta^{3/2}), \quad (7)$$

если $E\xi^2 = 1$ и $E\eta \geq 1$. В частности, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. Равномерно по $x \geq 0$

$$-An^{-1/2}(1 + o(1)) \leq P\{t_n^o < x\} - \Phi(x) \leq Bn^{-1/2}(1 + o(1)) \quad (8)$$

при $n \rightarrow \infty$, где

$$A = \left(\frac{\psi_\xi}{\sigma_\xi}\right)^3 \left(1 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right) + \frac{2E|\xi|}{\sigma_\xi} + \frac{8|E\xi\eta|}{em\sigma_\xi\sqrt{2\pi}},$$

$$B = C_* \left(\frac{\psi_\xi}{\sigma_\xi}\right)^3 + \frac{4|E\xi\eta|}{m\sigma_\xi e\sqrt{2\pi}}.$$

Предположим, что $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = 1$, и обозначим

$$A_X = \left(1 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{8}{e\sqrt{2\pi}}\right) \mathbf{E}|X|^3 + 2\mathbf{E}|X|,$$

$$B_X = \left(C_* + \frac{4}{e\sqrt{2\pi}}\right) \mathbf{E}|X|^3.$$

Следствие 2. Если $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$, то

$$\inf_{x \geq 0} [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \geq -A_X n^{-1/2}(1 + o(1)),$$

$$\sup_{x \geq 0} [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \leq B_X n^{-1/2}(1 + o(1)),$$

причем статистика t_n^* может быть заменена на t_n .

Из следствия 2 вытекает, что, равномерно по $x \geq 0$,

$$-6.4 \mathbf{E}|X|^3 - 2\mathbf{E}|X| \leq [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \sqrt{n} \leq 1.36 \mathbf{E}|X|^3 \quad (*)$$

для всех достаточно больших n . Отметим, что теорема 1 в [17] утверждает, что

$$\sup_x |\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)| < (43\mathbf{E}|X|^3 + 8) n^{-1/2}, \quad (9)$$

однако ключевая лемма 2.7 в препринте [17] была неверна.

Естественно поставить вопрос о том, насколько мала абсолютная постоянная C в (7). Ответ в случае сумм с неслучайной нормировкой ($\eta \equiv 1$) найден в [29]: константа не может быть лучше, чем $C_E = (3 + \sqrt{10})/6\sqrt{2\pi}$, см. также [11].

Лемма 1. Если неравенство (7) выполнено для всех достаточно больших n , то $C \geq 1/\sqrt{2e} > C_E$.

Отметим, что в случае сумм с неслучайной нормировкой оценки, полученные по методу Стейна, содержат значительно худшие постоянные, чем оценки, полученные с помощью других методов (см. [6], [25]). Наилучшая оценка сверху константы C_* получена с помощью метода характеристических функций (см. [2]). К нашему удивлению, метод Стейна оказался (по крайней мере, на данный момент) наилучшим в случае самонормированных сумм. Другим ключевым моментом доказательства является переход от самонормированных сумм к суммам случайных величин, зависящих от аргумента (ср. с [18], [19]).

3. Функционалы от сумм случайных векторов. В этом пункте оценивается точность нормальной аппроксимации распределения некоторых нелинейных функционалов от сумм независимых случайных векторов.

Пусть $(X, Y), (X_1, Y_1), \dots$ — независимые одинаково распределенные пары случайных величин. Мы будем предполагать, что $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$ и $\mathbf{E}S_{n,X}^2 = 1$, где

$$S_{n,X} = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_{n,Y} = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

В этом пункте мы оцениваем с помощью метода Стейна [25] точность нормальной аппроксимации распределения квадратичных функционалов

$$Z_n = S_{n,X} + cS_{n,Y}^2 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

Напомним некоторые факты, используемые в методе Стейна: существует абсолютно непрерывная функция g такая, что

$$g'(y) - yg(y) = \mathbf{1}\{y < x\} - \Phi(x), \quad \|g\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad \|g'\| \leq 1$$

и

$$\mathbf{P}\{Z < x\} - \Phi(x) = \mathbf{E}g'(Z) - \mathbf{E}Zg(Z) \quad (10)$$

для любой случайной величины Z с конечным математическим ожиданием. Обозначим

$$\begin{aligned}\Delta &= |\mathbf{P}\{Z_n < x\} - \Phi(x)|, \quad r_1 = \|g\|(2^{-1}n\mathbf{E}|X|^3 + c\mathbf{E}S_{n,Y}^2), \\ r_2 &= c\|g'\|n(\mathbf{E}|X|Y^2 + 2\mathbf{E}|X||Y|\mathbf{E}|S_{n,Y}|), \\ r_3 &= \|g'\|(\mathbf{E}|X| + 2^{-1}n\mathbf{E}|X|^3 + c\mathbf{E}Y^2 + 2c\mathbf{E}|Y|(\mathbf{E}|S_{n,X}|^3)^{1/3}(\mathbf{E}|S_{n,Y}|^{3/2})^{2/3}).\end{aligned}$$

Теорема 2. Если $\mathbf{E}|X|^3 + \mathbf{E}Y^2 < \infty$, то

$$\Delta \leq \frac{9n}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E}|X|^3 + 2(r_1 + r_2 + r_3). \quad (11)$$

Доказательство. Положим $\Delta^+ = |\mathbf{P}\{Z_n + \nu < x\} - \Phi(x)|$, где случайная величина ν не зависит от Z_n и имеет плотность распределения

$$f_\nu(y) = n \int_y^\infty u \mathbf{P}\{X \in du\}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{E}|\nu| = n\mathbf{E}|X|^3/2$. Ввиду (10)

$$\Delta^+ \leq |\mathbf{E}g'(Z_n + \nu) - \mathbf{E}S_{n,X}g(Z_n + \nu)| + r_1.$$

Из (12) следует, что $\mathbf{E}g'(a + \nu) = n\mathbf{E}Xg(a + X)$. Поэтому

$$\Delta^+ \leq |n\mathbf{E}Xg(Z_n + X) - \mathbf{E}S_{n,X}g(Z_n + \nu)| + r_1.$$

Очевидно, что $S_{n+1,Y}^2 = S_{n,Y}^2 + 2Y_{n+1}S_{n,Y} + Y_{n+1}^2$. Следовательно,

$$n|\mathbf{E}Xg(Z_n + X) - \mathbf{E}X_{n+1}g(Z_{n+1})| \leq c\|g'\|n\mathbf{E}|X_{n+1}|(2|Y_{n+1}||S_{n,Y}| + Y_{n+1}^2) \leq r_2.$$

Отметим, что $n\mathbf{E}X_{n+1}g(Z_{n+1}) = \mathbf{E}S_{n,X}g(Z_{n+1})$. Нетрудно убедиться, что

$$|\mathbf{E}S_{n,X}[g(Z_{n+1}) - g(Z_n + \nu)]| \leq r_3.$$

Таким образом,

$$\Delta^+ \leq \sum_{i=1}^3 r_i. \quad (13)$$

Мы применяем неравенство сглаживания Эссеена: если η, ζ и ν — независимые случайные величины,

$$\Delta_\zeta = \sup_x |\mathbf{P}\{\zeta < x\} - \Phi(x)|, \quad \Delta_\zeta^* = \sup_x |\mathbf{P}\{\zeta + \nu < x\} - \mathbf{P}\{\eta + \nu < x\}|,$$

$\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{N}(0; 1)$ и $2\mathbf{P}\{|\nu| > \varepsilon\} < 1$, то

$$\Delta_\zeta \leq \frac{\Delta_\zeta^* + \varepsilon\sqrt{2/\pi}}{1 - 2\mathbf{P}\{|\nu| > \varepsilon\}}.$$

Отсюда, обозначив $\Delta_\zeta^+ = \sup_x |\mathbf{P}\{\zeta + \nu < x\} - \Phi(x)|$, выводим

$$\Delta_\zeta \leq \frac{\Delta_\zeta^+ + \varepsilon\sqrt{2/\pi} + \mathbf{E}|\nu|/\sqrt{2\pi}}{1 - 2\mathbf{E}|\nu|/\varepsilon}. \quad (14)$$

Положим $\zeta = Z_n$ и $\varepsilon = 2n\mathbf{E}|X|^3$ в (14). Тогда

$$\Delta \leq 2\Delta^+ + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} n\mathbf{E}|X|^3. \quad (15)$$

Объединяя (13) и (15), получим (11).

4. Доказательства теоремы 1 и следствия 2. Наш метод отличается от предложенных в [3], [7], [9], [15], [17], [23], [26]. Ключевыми моментами являются подход, предложенный в [18], [19], и метод Стейна.

Как и в [18], [19], первый шаг состоит в сведении задачи о самонормированных суммах к задаче о суммах случайных величин с неслучайной нормировкой, но зависящих от аргумента x . Затем мы применяем теорему 2. Заключительный этап состоит в оценивании остаточных членов.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $a = m_0/2m_\eta\sigma_\xi\sqrt{n}$, $b = \sigma_\eta/2m_\eta\sqrt{n}$, и пусть $\Phi_c = 1 - \Phi$. Для любого $x \in [0; m_\eta\sqrt{n}/3\sigma_\eta]$ положим

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - 2ax + b^2x^2}}, \quad d = \frac{\sigma_\xi}{ay + \sqrt{1 + a^2y^2 - b^2y^2}},$$

$$c = \frac{y}{2}, \quad X_i = \frac{\xi_i}{d\sqrt{n}} - \frac{y\bar{\eta}_i^<}{2m_\eta n}, \quad Y_i = \frac{\bar{\eta}_i^<}{m_\eta n}.$$

Тогда $\mathbf{E}S_{n,X}^2 = 1$ (ср. с [19]). Поскольку $\sqrt{1+y} \geq 1 + y/2 - y^2/2$ при $y \geq -1$, имеем

$$\mathbf{P}\{t_n^* \geq x\} \leq \mathbf{P}\left\{\frac{S_n/\sigma_\xi\sqrt{n}}{\sqrt{T_n^</math>$$

и $R_n^* \sim C_* \mathbf{E}|\xi|^3 \sigma_\xi^{-3} n^{-1/2}$. Согласно теореме 2,

$$\sup_{0 \leq x \leq x_n} [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \leq B n^{-1/2} (1 + o(1)),$$

где $x_n = m_\eta \sqrt{n}/3\sigma_\eta$. Ввиду формулы (3.6*) работы [19] $\mathbf{P}\{t_n^* \geq x_n\} = o(n^{-1})$. Кроме того, $n^{1/2}/\sigma_\eta \gg n^{1/6}$. Поэтому

$$\sup_{x \geq 0} [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \leq B n^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (16)$$

Так как $m_\eta = \mathbf{E}\eta + o(n^{-1/2})$, мы можем заменить здесь t_n^* на t_n^o .

Положим теперь $N \asymp n/(1+x)^2$. Тогда, равномерно по $x \in [0; n^{1/6}]$,

$$r_* = o(n^{-1/2}), \quad n^{1/2} r_* = \left(\frac{\psi}{\sigma_\xi}\right)^3 \left(1 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right) + \frac{2\mathbf{E}|\xi|}{\sigma_\xi} + o(1).$$

Теорема 2 влечет

$$\inf_{0 \leq x \leq n^{1/6}} [\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)] \geq -A n^{-1/2} (1 + o(1)).$$

Поскольку $\mathbf{E}\eta^{3/2} < \infty$, имеем $|m_\eta - \mathbf{E}\eta| = \mathbf{E}\eta \mathbf{I}\{\eta > N\} = (1+x)n^{-1/2}v_n(x)$, где $v_n(x) \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0; n^{1/6}]$. Следовательно, мы вправе заменить t_n^* на t_n^o . Отметим, что $\mathbf{P}\{t_n^o \geq n^{1/6}\} = O(n^{-1})$ (ср. с (3.6*) в [19]). Поэтому

$$\inf_{x \geq 0} [\mathbf{P}\{t_n^o < x\} - \Phi(x)] \geq -A n^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (17)$$

Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 1. Достаточно построить последовательность распределений таких, что $\eta = \xi^2$ и левая часть (7) асимптотически эквивалентна $\mathbf{E}|\xi|^3/\sqrt{2e}\pi$.

Пусть ξ — случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi = p^{1/2}(1-p)^{-1/2}\} = 1-p, \quad \mathbf{P}\{\xi = -(1-p)^{1/2}p^{-1/2}\} = p, \quad (18)$$

где $p \in (0; 1)$. Тогда $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = 1$, $t_n^o = t_n^*$ и

$$\mathbf{P}\{t_n^* \geq \sqrt{n}\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \dots = \xi_n = p^{1/2}(1-p)^{-1/2}\} = (1-p)^n.$$

Если (7) выполнено, то

$$C\mathbf{E}|\xi|^3 \geq ((1-p)^n - \Phi(-\sqrt{n}))\sqrt{n}.$$

Так как $\mathbf{E}|\xi|^3 \sim 1/\sqrt{p}$ при $p \rightarrow 0$, имеем

$$C \geq (1-p)^n \sqrt{np} (1 + o(1)) \sim \frac{1}{\sqrt{2e}},$$

если $p = 1/(2n)$. Лемма 1 доказана.

Пример (18) обнаруживает неожиданный недостаток самонормированных сумм: t_n^* может принимать «большие» значения, когда все $X_1, \dots, X_n$ «малы». Действительно, если $X_1 = \dots = X_n = y > 0$, то $t_n^* = \sqrt{n}$ (заметим, что $\sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$). Этот пример показывает также, что оценка (4) неверна. Более того, если поставить вопрос о том, может ли при всех достаточно больших n иметь место неравенство вида

$$|\mathbf{P}\{t_n^* < x\} - \Phi(x)| \leq A\mathbf{E}|X|^3 g(x) n^{-1/2} \quad (x \in \mathbf{R}), \quad (19)$$

где A — абсолютная постоянная и функция $g(x) > 0$ монотонно убывает к нулю при $x \rightarrow \infty$, то ответ будет отрицательным. Достаточно положить $p = 1/n$ и $x = \sqrt{n}$, тогда левая часть (19) стремится к $1-1/e$ при $n \rightarrow \infty$, в то время как правая часть (19) сходится к нулю.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания. Результаты настоящей статьи были представлены в [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von Bahr B., Esseen C.-G.* Inequalities for the r -th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. — *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 36, № 1, p. 299–303.
2. *Bentkus V.* On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — *J. Theoret. Probab.*, 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
3. *Bentkus V., Götze F.* The Berry–Esseen bound for Student's statistic. — *Ann. Probab.*, 1996, v. 24, № 1, p. 491–503.
4. *Bentkus V., Götze F., van Zwet W. R.* An Edgeworth expansion for symmetric statistics. — *Ann. Statist.*, 1997, v. 25, № 2, p. 851–896.
5. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1941, v. 49, № 1, p. 122–136.
6. *Bolthausen E.* An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1984, v. 66, № 3, p. 379–386.
7. *Чубисов Д. М.* Асимптотическое разложение для распределения статистики, допускающей стохастическое разложение. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, т. 25, в. 4, с. 745–756.
8. *Чубисов Д. М.* Асимптотические разложения в задачах проверки гипотез. I. — *Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук*, т. 5, с. 18–26.
9. *Chung K.-L.* The approximate distribution of Student's statistic. — *Ann. Math. Statist.*, 1946, v. 17, p. 447–465.
10. *Efron B.* Student's t -test under symmetry conditions. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1969, v. 64, p. 1278–1302.
11. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 1942, v. 28A, № 9, p. 1–19.
12. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — *Acta Math.*, 1945, v. 77, p. 1–125.
13. *Fisher R. A.* Applications of Student's distribution. — *Metron*, 1925, v. 5, p. 90–104.
14. *Giné E., Götze F., Mason D. M.* When is the Student t -statistic asymptotically standard normal? — *Ann. Probab.*, 1997, v. 25, № 3, p. 1514–1531.
15. *Hall P.* Edgeworth expansion for Student's t -statistic under minimal moment conditions. — *Ann. Probab.*, 1987, v. 15, № 3, p. 920–931.
16. *Liapunov A. M.* Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités. — *Mem. Acad. Imp. Sci. St.-Peterburg*, 1901, v. 12, p. 1–24.
17. *Nagaev S. V.* The Berry–Esseen bound for the self-normalized sums. — *Препринт № 82. Новосибирск: Институт математики СО РАН*, 2001; *Siberian Adv. Math.*, 2002, v. 12, № 3, p. 79–125.
18. *Новак С. Ю.* О распределении отношения сумм случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, т. 41, в. 3, с. 479–503.
19. *Novak S. Y.* On self-normalized sums. — *Math. Methods Statist.*, 2000, v. 9, № 4, p. 415–436.
20. *Novak S. Y.* On self-normalized sums. Supplement. — *Math. Methods Statist.*, 2002, v. 11, № 2, p. 256–258.
21. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — *Statistics*, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.
22. *Shao Q.-M.* Self-normalized large deviations. — *Ann. Probab.*, 1997, v. 25, № 1, p. 285–328.
23. *Slavova V. V.* On the Berry–Esseen bound for Student's statistic. — *Lecture Notes in Math.*, 1985, v. 1155, p. 335–390.
24. *Шуганов И. С.* Уточнение верхней границы константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — *Проблемы устойчивости стохастических моделей*. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
25. *Stein C.* Approximate computation of expectations. Hayward: Institute of Mathematical Statistics, 1986, 164 p.
26. *Wang Q., Jing B.-Y.* An exponential nonuniform Berry–Esseen bound for self-normalized sums. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 4, p. 2068–2088.
27. *Novak S. Y.* On self-normalised sums and Student's statistic. Technical Report TR/18/01. Brunel University of West London, 2001.

28. Егоров В. А. Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 643–650.
29. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344.
30. Bloznelis M., Putter H. Second order and bootstrap approximation to Student's t statistic. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 2, с. 374–381.

Поступила в редакцию
15.X.2001

© 2004 г.

НОВИКОВ А. А.*, ШИРЯЕВ А. Н.**

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ¹⁾

В работе найдено решение задачи об оптимальной остановке в случае, когда функция выплат является целой степенной функцией от случайного блуждания, рассматриваемого на бесконечном временном интервале. При этом показано, что оптимальным является момент первого пересечения уровня, определяемого как наибольший корень полинома Аппеля, ассоциированного с распределением максимума случайного блуждания. Показано также, что в задаче об оптимальной остановке на конечном временном интервале $\{0, 1, \dots, T\}$ цена сходится при $T \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью к найденному пределу, когда скачки случайного блуждания экспоненциально ограничены сверху.

Ключевые слова и фразы: оптимальная остановка, случайное блуждание, скорость сходимости, полиномы Аппеля.

§ 1. Введение и основной результат

1. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Свяжем с этой последовательностью однородную марковскую цепь $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ такую, что

$$X_0 = x \in \mathbf{R}, \quad X_k = x + S_k, \quad S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad k \geq 1.$$

Через P_x будем обозначать распределение вероятностей, отвечающее последовательности X . Иначе говоря, система $P_x, x \in \mathbf{R}$, и X задают марковское семейство относительно потока σ -алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$.

Для рассматриваемого случайного блуждания в работе обсуждается задача об оптимальной остановке, состоящая в отыскании функции «цены»

$$V(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{M}}_0^\infty} E_x g(X_\tau) I\{\tau < \infty\}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; Department of Mathematical Sciences, Sydney University of Technology, PO BOX 123, Broadway, Sydney, NSW 2007, Australia; e-mail: alex.novikov@uts.edu.au

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке ARC Large Grant A0010474; работа второго автора поддержана также Российским фондом фундаментальных исследований (грант 02-01-00834).