Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Саханенко, О переходных явлениях в случайных блужданиях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 382–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 05:35:03

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blackwell D. On optimal systems. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, p. 394–397.
2. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
3. Boyarchenko S., Levendorskiĭ S. Z. Non-Gaussian Merton–Black–Scholes Theory. River Edge: World Scientific, 2002, 398 p. (Adv. Ser. Statist. Sci. Appl. Probab., v. 9.)
4. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 167 с.
5. Chow Y. S., Teicher T. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. New York: Springer-Verlag, 1997, 488 p.
6. Darling D. A., Liggett T., Taylor H. M. Optimal stopping for partial sums. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 1363–1368.
7. Dubins L. E., Savage L. J. Inequalities for Stochastic Processes (How to Gamble if You Must). New York: Dover, 1976, 255 p.
8. Kingman J. F. C. Inequalities in the theory of queues. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1970, v. 32, p. 102–110.
9. Liu Z., Nain P., Towsley D. Bounds for a class of stochastic recursive equations. — Math. Methods Oper. Res., 1999, v. 49, № 2, p. 325–333.
10. Mordecki E. Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 473–493.
11. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М.: Наука, 1976, 272 с.
12. Stadje W. An iterative approximation procedure for the distribution of the maximum of a random walk. — Statist. Probab. Lett., 2000, v. 50, № 4, p. 375–381.
13. Schoutens W. Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. New York: Springer-Verlag, 2000, 163 p. (Lecture Notes in Statist., v. 146.)
14. Висков О. В. Случайное блуждание с непрерывной вверх компонентой и формула обращения Лагранжа. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 166–175.

Поступила в редакцию
1.VII.2002

© 2004 г.

САХАНЕНКО А. И.*

О ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЯХ

Пусть $\bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k X_{i,n}$, где при каждом $n = 1, 2, \dots$ последовательность $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечными положительными дисперсиями. В работе изучается задача о получении простых и неуплучшаемых достаточных условий, типа условия Линдеберга, которые гарантировали бы сходимость нормированной величины $(\bar{S}_n - A_n)/B_n$ к некоторой невырожденной случайной величине при соответствующим образом подобранных постоянных A_n и $B_n > 0$. Упрощены, уточнены и усилены результаты, полученные ранее в этом направлении Ю. В. Прохоровым и А. А. Боровковым. В частности, подробно рассмотрен неисследованный ранее случай, когда $DX_{1,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: схема серий, максимум последовательных сумм, равномерная сходимость распределений, предельные распределения, принцип инвариантности, расстояние Прохорова.

* Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16, 628012 Ханты-Мансийск, Россия; e-mail: aisakh@hotmail.com

1. Введение и постановка задачи

Предположим, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ нам задана последовательность $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$, состоящая из независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечными положительными дисперсиями. Положим

$$a_n = \mathbf{E}X_{1,n}, \quad 0 < \sigma_n^2 = \mathbf{D}X_{1,n} < \infty, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k X_{i,n}. \quad (1)$$

В работе изучается задача о получении простых достаточных условий, которые гарантировали бы сходимость нормированной величины $(\bar{S}_n - A_n)/B_n$ к некоторой невырожденной случайной величине при соответствующим образом подобранных постоянных A_n и $B_n > 0$. Мы продолжим исследования в этом направлении, начатые Ю. В. Прохоровым в [1] и А. А. Боровковым в [2], где рассматривался частный случай этой задачи, когда

$$\sigma_n \rightarrow \sigma \in (0, \infty), \quad a_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{n} a_n \rightarrow a \in [-\infty, +\infty] \quad (2)$$

при $n \rightarrow \infty$. Мы сейчас приведем соответствующий результат из [2, § 24], занумеровав, для удобства дальнейших ссылок, те пять утверждений, из которых он, на самом деле, состоит.

Теорема 0. Пусть выполнены условия (2) и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E}\{X_{1,n}^2; |X_{1,n}| > \varepsilon\sqrt{n}\} \rightarrow 0. \quad (3)$$

В этом случае справедливы следующие пять утверждений.

A) Если $a = +\infty$ и $a_n > 0$ при всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\bar{S}_n < na_n + x\sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-u^2/2} du.$$

B) Если $a \in (0, +\infty)$ и $a_n > 0$ при всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\bar{S}_n < \frac{x}{|a_n|}\right\} = \frac{e^{x/\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a^2\sigma^2/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{ux^2}{\sigma^4}\right)\right\} du.$$

C) Если $a = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\bar{S}_n < x\sqrt{n}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sigma} e^{-u^2/2} du.$$

D) Если $a \in (-\infty, 0)$ и $a_n < 0$ при всех n , то

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\bar{S}_n < \frac{x}{|a_n|}\right\} \\ &= 1 - e^{-2x/\sigma^2} \left[1 - \frac{e^{x/\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a^2\sigma^2/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{ux^2}{\sigma^4}\right)\right\} du\right]. \end{aligned}$$

E) Если $a = -\infty$ и $a_n < 0$ при всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\bar{S}_n < \frac{x}{|a_n|}\right\} = 1 - e^{-2x/\sigma^2}. \quad (4)$$

Ранее, в [1], утверждения E), D) и C) были доказаны при выполнении следующего, более жесткого, чем (3), условия:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{E}\{X_{1,n}^2; |X_{1,n}| > A\} = 0. \quad (5)$$

Данная работа появилась под влиянием статьи [3], где предлагался другой способ доказательства результатов из [2]. Здесь мы ослабим предположения (2) и еще более упростим формулировки и доказательства из [2] и [3]. Кроме того, мы уточним вид условий Линдеберга, которые на самом деле необходимы и достаточны для справедливости соответствующих результатов.

Мы начнем с того, что достаточно просто получим, в теореме 1, некоторые равномерные оценки, из которых вытекает теорема 3, представляющая собой одно, простое по виду утверждение, содержащее в себе случаи А)–Д) теоремы 0.

Получение же аналогичных утверждений, содержащих случай Е) теоремы 0, оказалось значительно более трудной задачей. Искомые равномерные оценки установлены в теореме 2, из них в теореме 5 извлечено нужное нам усиление теоремы 0 на случай, когда не выполнено условие (2). А в теореме 6 мы докажем, что условия теоремы 5 являются, в некотором смысле, неулучшаемыми.

В результате этих исследований выяснилось, в частности, что в теореме 0 имеется неточность: как следует из примера 2, утверждение Е) этой теоремы неверно без дополнительных предположений. В следствии 3 мы предлагаем для справедливости Е) требовать выполнения следующего, более жесткого, чем (3), условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E} \left\{ X_{1,n}^2; |X_{1,n}| > \frac{\varepsilon}{|a_n|} \right\} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Это ограничение, однако, слабее предположения (5), использовавшегося в работе [1].

В разделе 4 мы решим поставленную в [3] задачу дать элементарное доказательство одного равенства, играющего важную роль при изучении распределений максимума процесса броуновского движения со сносом. Именно эти распределения выступают в качестве предельных и сопровождающих в рассматриваемой задаче.

Отметим еще следствия 4 и 5, где мы указали на возможность одного нового эффекта в теории очередей, появляющегося при отказе от первого предположения в (2), которое было существенным в теореме 0.

Условимся, что далее все пределы берутся при $n \rightarrow \infty$, если только прямо не оговорено противное.

2. Основные результаты

2.1. Применение идей из принципа инвариантности. Прежде всего мы немного видоизменим задачу. Нам потребуется следующее условие.

У с л о в и е 0. При каждом n нам задана последовательность $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbf{E}\xi_{1,n} = 0$ и $\mathbf{D}\xi_{1,n} = 1$.

Подчеркнем, что в данной работе условие 0 предполагается выполненным всегда, даже когда это явно не оговорено. Для произвольного числа $b \in (-\infty, \infty)$ введем еще следующее обозначение:

$$Y_n(b) \equiv \max_{k \leq n} \sum_{i=1}^k (b + \xi_{i,n}) = \max_{k \leq n} \left(\sum_{i=1}^k \xi_{i,n} + bk \right). \quad (7)$$

З а м е ч а н и е 1. Чтобы теперь вернуться к задаче, поставленной во введении, достаточно положить

$$X_{i,n} = a_n + \sigma_n \xi_{i,n}, \quad b_n = \frac{a_n}{\sigma_n} \quad \text{и} \quad \bar{S}_n = \sigma_n Y_n(b_n) \quad (8)$$

при нужных нам a_n и $\sigma_n > 0$. Иными словами, в остальной части работы предполагается, что вначале были выбраны распределения величин $\{\xi_{i,n}\}$, а только потом были подобраны числа a_n и σ_n . Основная причина, по которой мы вводим такое соглашение, состоит в следующем: в этом случае мы получаем возможность изучать условия, при которых соответствующие сходимости имеют место *равномерно по a_n и σ_n* (или равномерно по b_n и σ_n , что в данном случае окажется естественнее).

Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, определенный при $t \in [0, \infty)$. Положим

$$\bar{W}(b, T) = \max_{0 \leq t \leq T} (W(t) + bt), \quad \bar{W}(b) = \bar{W}(b, 1)$$

и заметим, что при всех $K > 0$

$$\mathbf{P}\{\bar{W}(b, T) < x\} = \mathbf{P}\{\sqrt{T} \bar{W}(\sqrt{T}b) < x\} = \mathbf{P}\left\{K \bar{W}\left(Kb, \frac{T}{K^2}\right) < x\right\}, \quad (9)$$

поскольку процесс $W_K(t) \equiv W(K^2 t)/K$ также является винеровским процессом при всех $K > 0$.

Введем теперь следующее обозначение:

$$\begin{aligned}\Delta_n(b) &\equiv \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \mathbf{P}\{Y_n(b) < x\} - \mathbf{P}\{\bar{W}(b, n) < x\} \right| \\ &= \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \mathbf{P}\left\{\frac{Y_n(b)}{K} - C < x\right\} - \mathbf{P}\left\{\bar{W}\left(Kb, \frac{n}{K^2}\right) - C < x\right\} \right|. \quad (10)\end{aligned}$$

Подчеркнем, что ввиду тождеств (9) равенство в (10) имеет место при любых C и всех $K > 0$. Ниже, в формулах (15) и (18), мы перепишем определение (10) еще двумя способами.

Как мы увидим в разделе 3, следующее утверждение достаточно просто получается из принципа инвариантности Донскера–Прохорова, если только через π_n обозначить расстояние Прохорова между соответствующими распределениями классической случайной ломаной и винеровского процесса.

Теорема 1. Пусть выполнено следующее условие Линдеберга:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E}\{\xi_{1,n}^2; |\xi_{1,n}| > \varepsilon\sqrt{n}\} \rightarrow 0. \quad (11)$$

В этом случае найдутся такие числа $\pi_n \rightarrow 0$, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{Y_n(b)}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \leq \mathbf{P}\{\bar{W}(\sqrt{n}b) < x + \pi_n\} + \pi_n, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{Y_n(b)}{\sqrt{n}} < x\right\} \geq \mathbf{P}\{\bar{W}(\sqrt{n}b) < x - \pi_n\} - \pi_n \quad (13)$$

при всех $x \geq 0$ и всех $b \in (-\infty, \infty)$. Кроме того,

$$\Delta_n(b) \leq 2(1 + \sqrt{n}b^-)\pi_n \quad \forall b \in (-\infty, \infty). \quad (14)$$

Подчеркнем, что в (14) и далее мы используем стандартные обозначения $x^+ = \max\{0, x\}$ и $x^- = \max\{0, -x\}$. Заметим, что из оценки (14) при $\pi_n \rightarrow 0$ очевидно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполнено условие Линдеберга (11), то сходимость

$$\Delta_n(b_n) = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \mathbf{P}\left\{\frac{Y_n(b_n)}{\sqrt{n}} < x\right\} - \mathbf{P}\{\bar{W}(\sqrt{n}b_n) < x\} \right| \rightarrow 0 \quad (15)$$

имеет место равномерно по $d'_n \equiv \sqrt{n}b_n \in (-C, \infty)$ при любом $C < \infty$.

Отметим, что это следствие усиливает теорему 1 в [3], где аналогичная сходимость оказалась равномерной по $d'_n = \sqrt{n}b_n \in (-C, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, C)$ при любых $0 < \varepsilon < C < \infty$.

Нетрудно заметить, что из следствия 1 легко извлечь утверждения более сильные, чем дает теорема 0 в случаях А)–Д). Мы получим такое утверждение ниже, в теореме 3. Но для получения аналога утверждения Е) нам потребуется более тонкая оценка, чем (14).

Теорема 2. Пусть числовая последовательность $\{A_n\}$ такова, что выполнено следующее условие Линдеберга:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E}\{\xi_{1,n}^2; |\xi_{1,n}| > \varepsilon A_n\} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{n} \geq A_n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тогда найдутся такие числа $\tilde{\pi}_n \rightarrow 0$, что

$$\Delta_n(b) \leq (1 + A_n b^-)\tilde{\pi}_n \quad \forall b \in (-\infty, \infty). \quad (17)$$

В частности, из этого утверждения и (10) при $K = 1/|b|$ вытекает

Следствие 2. Если выполнено условие Линдеберга (16), то сходимость

$$\Delta_n(b_n) = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \mathbf{P}\{|b_n| Y_n(b_n) \geq x\} - \mathbf{P}\{\bar{W}(-1, nb_n^2) \geq x\} \right| \rightarrow 0 \quad (18)$$

имеет место равномерно по $d''_n \equiv A_n b_n \in (-\infty, -\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Таким образом, следствия 1 и 2 позволяют нам задачу поиска предельных распределений для нормированных величин $Y_n(b_n)$ свести к аналогичной задаче для величин $\bar{W}(b_n, n)$, построенных по стандартному винеровскому процессу. А последние мы затем преобразуем либо к более простому виду $\sqrt{n}\bar{W}(\sqrt{n}b_n)$, либо к виду $\bar{W}(-1, nb_n^2)/|b_n|$, удобному при некоторых $b_n < 0$. Эти идеи восходят к работе Ю. В. Прохорова [1], и мы также следуем им.

Из сказанного выше вытекает, что мы можем интерпретировать распределение случайной величины $\bar{W}(b_n, n)$ как распределение, *сопровождающее* изучаемое распределение случайной величины $Y_n(b_n)$.

2.2. О формулах для распределений величин $\bar{W}(b, T)$. Без таких формул нам не обойтись, если мы из приведенных выше утверждений хотим получить утверждение типа теоремы 0. Введем следующие функции:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Psi(x) = \int_x^\infty \varphi(y) dy, \quad -\infty < x < \infty, \quad (19)$$

$$G(x, b, T) = \Psi\left(\frac{x - bT}{\sqrt{T}}\right) + e^{2bx} \Psi\left(\frac{x + bT}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geq 0, \quad (20)$$

$$V_0(x, b, T) = \int_0^T \frac{x}{t^{3/2}} \varphi\left(\frac{x - bt}{\sqrt{t}}\right) dt, \quad x > 0, \quad (21)$$

$$V_\infty(x, b, T) = e^{-2b^-x} - \int_T^\infty \frac{x}{t^{3/2}} \varphi\left(\frac{x - bt}{\sqrt{t}}\right) dt, \quad x > 0. \quad (22)$$

На самом деле справедливы следующие равенства:

$$\forall x \geq 0 \quad \forall b \quad \forall T > 0 \quad \mathbf{P}\{\bar{W}(b, T) \geq x\} = G(x, b, T), \quad (23)$$

$$\forall x > 0 \quad \forall b \quad \forall T > 0 \quad \mathbf{P}\{\bar{W}(b, T) \geq x\} = V_0(x, b, T) = V_\infty(x, b, T). \quad (24)$$

Равенство (23) было получено в [4]. Его также можно вывести, слегка модифицировав соответствующее доказательство А. В. Скорохода из [5, гл. 7, § 3]. А тождество (24) является очевидным обобщением равенства из формулы (70) в [2, § 24].

Естественно попытаться найти прямое аналитическое доказательство тождеств

$$G(x, b, T) = V_0(x, b, T) = V_\infty(x, b, T) \quad \forall x > 0 \quad \forall b \quad \forall T > 0. \quad (25)$$

Эта задача была решена в [3] с использованием характеристических функций, и там же была поставлена задача получить (25), применяя лишь дифференцирование и интегрирование. В разделе 4 мы дадим решение этой задачи, которое использует лишь классические свойства интегралов. Пользуясь случаем, мы там же приведем более простое доказательство формулы (23).

2.3. Усиления теоремы 0 в случаях А)–Д). Вернемся теперь к решению задачи, которая была поставлена во введении, считая справедливыми условие 0 и равенства (8). Положим $\Psi_\infty(x) \equiv \Psi(x)$ при всех x , и пусть

$$\Psi_d(x) \equiv \mathbf{P}\{\bar{W}(d) - d \geq x\} = \Psi(x) + e^{2d(x+d)} \Psi(x + 2d) \quad (26)$$

при $x \geq -d$ и $d \in (-\infty, \infty)$. Подчеркнем, что второе равенство в (26) следует из (20) и (23).

Теорема 3. Пусть выполнено условие (11) и

$$d_n \equiv \frac{\sqrt{n}a_n}{\sigma_n} \rightarrow d \in (-\infty, \infty]. \quad (27)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\bar{S}_n - na_n}{\sigma_n \sqrt{n}} \geq x\right\} = \Psi_d(x) \quad \forall x \geq -d. \quad (28)$$

Эта теорема достаточно просто получается из следствия 1. Действительно, если мы последовательно воспользуемся соотношениями (8), (15) и (26) при $d_n = \sqrt{n} b_n \rightarrow d$, то мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_n - na_n}{\sigma_n \sqrt{n}} \geq x \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_n(b_n)}{\sqrt{n}} - d_n \geq x \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \bar{W}(\sqrt{n} b_n) - d_n \geq x \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{d_n}(x) = \Psi_d(x), \end{aligned}$$

если $d \in (-\infty, \infty)$. А если $d = \infty$, то надо еще заметить, что

$$\Psi_{d_n}(x) = \Psi(x) + \int_x^\infty e^{-2d_n(y-x)} \varphi(y) dy \rightarrow \Psi(x) = \Psi_\infty(x) \quad \text{при } d_n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Утверждения А)–D) теоремы 0 являются частными случаями более простой по виду теоремы 3. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что условия (2) и (3) достаточны для справедливости условия Линдеберга (11) и предположений (27) при $d = a/\sigma$.

Отметим еще, что если $a = d = \infty$ или $a = d = 0$, то правая часть в (28) легко приводится к правым частям в утверждениях А) и С), так как в этом случае функции $\Psi_d(x)$ имеют особенно простой вид. Далее, в силу определения (22) правые части в формулах из утверждений В) и D) теоремы 0 можно представить в виде

$$V_\infty \left(1, \frac{x}{\sigma^2}, \frac{a^2 \sigma^2}{x^2} \right) \quad \text{и} \quad V_\infty \left(1, -\frac{x}{\sigma^2}, \frac{a^2 \sigma^2}{x^2} \right) \quad (29)$$

соответственно. И теперь эти выражения из (29) также можно привести к виду (28), если только воспользоваться, при $d = a/\sigma$ и $y = x/(|a|\sigma)$, тождеством

$$V_\infty \left(1, \pm |d| y, \frac{1}{y^2} \right) = \mathbf{P} \left\{ \bar{W} \left(dy, \frac{1}{y^2} \right) \geq 1 \right\} = \mathbf{P} \{ \bar{W}(d) \geq y \} = \Psi_d(y - d),$$

которое вытекает из равенств (24), (26) и (9) при $K = 1/y$ и $T = 1$.

В случае, когда условие (27) выполнено при $d = \infty$, утверждение теоремы 3 можно еще усилить.

Теорема 4. Пусть выполнено условие 0 и $d_n \rightarrow \infty$. В этом случае условие (11) не только достаточно, но и необходимо для сходимости (28).

Приведенное утверждение появилось под влиянием теоремы 4 из [6]. Я искренне благодарен В. М. Круглову, который обратил мое внимание на этот результат.

2.4. Уточнения теоремы 0 в случае Е). Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$d_n = \frac{\sqrt{n} a_n}{\sigma_n} \rightarrow -\infty \quad \text{и} \quad \frac{a_n}{\sigma_n} \rightarrow 0. \quad (30)$$

Теорема 5. Пусть выполнены предположения (30) и следующее условие Линдеберга:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E} \left\{ \xi_{1,n}^2; |\xi_{1,n}| > \frac{\varepsilon \sigma_n}{|a_n|} \right\} \rightarrow 0. \quad (31)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{|a_n|}{\sigma_n^2} \bar{S}_n \geq x \right\} = e^{-2x} \quad \forall x \geq 0. \quad (32)$$

Эта теорема немедленно вытекает из следствия 2 при $b_n = a_n/\sigma_n$ и $A_n = 1/|b_n|$, поскольку $b_n < 0$, начиная с некоторого n , ввиду предположения (30). Действительно, используя последовательно соотношения (8), (18) и (22), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{|a_n|}{\sigma_n^2} \bar{S}_n \geq x \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ |b_n| Y_n(b_n) \geq x \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \bar{W}(-1, nb_n^2) \geq x \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \bar{W}(-1, d_n^2) \geq x \} = \lim_{d_n^2 \rightarrow \infty} V_\infty(x, -1, d_n^2) \\ &= V_\infty(x, -1, \infty) = e^{-2x}. \end{aligned}$$

Сравнивая условия Линдеберга (11) и (31), нетрудно заметить, что условие (31) в теореме 5 является более жестким. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли ослабить это предположение. Ответ оказывается отрицательным, как показывает следующая теорема.

Теорема 6. Если $\{a_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ — произвольные числа, удовлетворяющие предположениям (30), то найдутся случайные величины $\{X_{n,i}\}$ такие, что сходимость (32) не имеет места, но условие (16) выполнено для всех последовательностей $\{A_n\}$, удовлетворяющих предположению $\sigma_n/|a_n| = o(A_n)$.

Поскольку требование $a_n < 0$ автоматически выполняется, начиная с некоторого n , в силу (30), то для доказательства теоремы 6 достаточно рассмотреть следующий пример.

Пример 1. Пусть выполнено условие (30) теоремы 6 и $a_n < 0$ при всех n . Возьмем в качестве $\{X_{n,i}\}$ случайные величины, которые принимают два неположительных значения со следующими вероятностями:

$$1 - P\{X_{1,n} = 0\} = P\left\{X_{1,n} = a_n + \frac{\sigma_n^2}{a_n}\right\} = \frac{a_n^2}{a_n^2 + \sigma_n^2}. \quad (33)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$EX_{1,n} = a_n, \quad DX_{1,n} = \sigma_n^2, \quad |\xi_{1,n}| \leq \max\left\{\frac{\sigma_n}{|a_n|}, \frac{|a_n|}{\sigma_n}\right\} = o(A_n),$$

что гарантирует выполнение условия (16) при всех $\{A_n\}$, указанных в теореме 6. С другой стороны, так как $a_n < 0$, то в силу (33)

$$\forall n \quad X_{1,n} \leq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_n \leq 0, \quad (34)$$

что делает невозможной сходимость (32).

Рассмотрим теперь подробнее частный случай, когда выполнено условие (2). В этой простой ситуации из теоремы 3, очевидно, вытекает следующее предложение.

Следствие 3. Пусть выполнено предположение (2) и условие Линдеберга (6). В этом случае имеет место сходимость (4).

Прежде чем сравнивать это утверждение с предложением Е) из теоремы 0, рассмотрим следующий простой пример.

Пример 2. Пусть случайные величины $\{X_{n,i}\}$ принимают два значения со вероятностями

$$1 - P\{X_{1,n} = 0\} = P\{X_{1,n} = -n^{1/4}\} = n^{-1/2}. \quad (35)$$

В силу определений (1) в этом случае выполнены условия (2), причем

$$a_n = -n^{-1/4} \rightarrow 0, \quad \sigma_n^2 = 1 - a_n^2 \rightarrow 1, \quad \sqrt{n} a_n = -n^{1/4} \rightarrow -\infty.$$

Кроме того, выполнено и условие (3), поскольку $|X_{1,n}| \leq n^{1/4} = o(\sqrt{n})$ в силу (35). Однако сходимость (32) в рассматриваемом случае не может иметь места, так как справедливы неравенства (34).

Замечание 4. Таким образом, пример 2 показывает, что утверждение Е) теоремы 0, вообще говоря, неверно. А из теоремы 6 следует, что приведенное выше следствие 3 содержит минимальное, в некотором смысле, условие Линдеберга, при котором утверждение Е) становится справедливым.

2.5. Об одном эффекте в теории очередей. Разберем теперь особо два случая, когда предельное распределение существует у величины $\bar{S}_n$ без всякой нормировки. Из теорем 3 и 5, соответственно, немедленно вытекают следующие два утверждения.

Следствие 4. Пусть справедливо условие (11) и

$$\frac{a_n}{\sigma_n^2} \rightarrow \alpha \in (-\infty, \infty), \quad \sqrt{n} \sigma_n \rightarrow \beta.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\bar{S}_n \geq x\} = \Psi_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{\beta} - \alpha\beta\right) \quad \forall x \geq 0.$$

Следствие 5. Пусть выполнены следующие условия:

$$\frac{a_n}{\sigma_n^2} \rightarrow \alpha \in (-\infty, 0), \quad \sqrt{n} \sigma_n \rightarrow \infty, \quad \sigma_n \rightarrow 0, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E} \left\{ \xi_{1,n}^2; |\xi_{1,n}| > \frac{\varepsilon}{\sigma_n} \right\} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \bar{S}_n \geq x \} = e^{2x/\alpha} \quad \forall x \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 5. Задача изучения распределений величин $\bar{S}_n$ в случае схемы серий появилась в [1], [2] под влиянием теории очередей, где такие распределения естественным образом возникают как распределения времени ожидания в некоторой системе массового обслуживания, работающей в условиях большой нагрузки. Следствия 4 и 5 показывают, что даже в таких условиях у длины очереди может быть собственное предельное распределение. Такой эффект не следует из теоремы 0, так как в ней существенно используется предположение $\sigma_n \rightarrow \sigma > 0$, от которого мы смогли отказаться в данной работе.

2.6. Некоторые нюансы.

З а м е ч а н и е 6. Следующий пример показывает, что в теореме 1 предположение $x \geq 0$ является существенным.

П р и м е р 3. Пусть $\xi_{i,n} = \xi_i$ при всех i и n , где независимые случайные величины ξ_i с равной вероятностью принимают два значения: $+1$ и -1 . В этом случае очевидным образом выполнены все условия теоремы 1 и, значит, найдутся такие числа $\pi_n \rightarrow 0$, что неравенства (12) и (13) справедливы при всех $x \geq 0$ и всех $b \in (-\infty, \infty)$.

Покажем, что в этом случае неравенство (12) не может быть верным при всех n , когда $x = -1$ и $b = -2\sqrt{n}$. Действительно, при сделанных предположениях $-2\sqrt{n} + \xi_i < 0$ при всех i и из определения (7) величины $Y_n(b)$ нетрудно извлечь, что

$$Y_n(-2\sqrt{n}) = -2\sqrt{n} + \xi_1 \leq -2\sqrt{n} + 1 \leq -\sqrt{n}.$$

Следовательно, если бы неравенство (12) было верным при $x = -1$ и $b = -2\sqrt{n}$, то мы бы получили

$$1 = \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_n(-2\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq -1 \right\} \leq \mathbf{P} \{ \bar{W}(-2n) < -1 + \pi_n \} + \pi_n = \pi_n, \quad (36)$$

ибо всегда $\pi_n \leq 1$ и $\mathbf{P} \{ \bar{W}(-2n) \leq 0 \} = 0$.

То есть неравенство (36) верно лишь при $\pi_n = 1$ и не может быть справедливым ни для одной последовательности $\pi_n \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 7. Подчеркнем, что равенства (10), (15) и (18) для величины $\Delta_n(b)$ не изменяются, если мы в них супремум по $-\infty < x < \infty$ заменим на супремум по $0 \leq x < \infty$. Действительно,

$$\forall x < 0 \quad \left| \mathbf{P} \{ Y_n(b) < x \} - \mathbf{P} \{ \bar{W}(b, n) < x \} \right| = \mathbf{P} \{ Y_n(b) < x \} \leq \mathbf{P} \{ Y_n(b) < 0 \} \\ = \left| \mathbf{P} \{ Y_n(b) < 0 \} - \mathbf{P} \{ \bar{W}(b, n) < 0 \} \right| \\ \leq \sup_{x \geq 0} \left| \mathbf{P} \{ Y_n(b) < x \} - \mathbf{P} \{ \bar{W}(b, n) < x \} \right|,$$

поскольку $\mathbf{P} \{ \bar{W}(b, T) < 0 \} = 0$ при всех возможных значениях чисел b и T . Тем самым мы доказали сформулированное утверждение в случае первого равенства в (10) и сделали понятным, как доказать другие аналогичные равенства.

3. Доказательство теорем 1, 2 и 4

3.1. Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$S_{0,n} = 0, \quad S_{k,n} = \xi_{1,n} + \dots + \xi_{k,n}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и введем в рассмотрение случайные ломаные S_n :

$$S_n(t) = S_{[t],n} + (t - [t])\xi_{[t]+1,n} \quad \text{при } 0 \leq t \leq n,$$

где символ $[t]$ означает целую часть числа t . При всех натуральных n и m определим также нормированные ломаные $Z_{n,m}$, полагая

$$Z_{n,m}(t) = \frac{S_n(mt)}{\sqrt{m}} \quad \text{при } t \in [0, 1].$$

Далее будем широко использовать обозначение

$$\bar{Z}_{n,m}(d) = \max_{0 \leq t \leq 1} (Z_{n,m}(t) + td) = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} (S_{k,n} + kd/\sqrt{m})^+}{\sqrt{m}}. \quad (37)$$

Обозначим символом $C[0, 1]$ пространство всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$. Мы будем рассматривать $C[0, 1]$ как полное сепарабельное метрическое пространство с равномерной метрикой. И обозначим теперь через $\pi_{n,m}$ расстояние Прохорова между распределениями в $C[0, 1]$ случайных процессов $Z_{n,m}$ и W .

Лемма 1. Пусть натуральные числа m_n таковы, что

$$m_n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{E}\{\xi_{1,n}^2; |\xi_{1,n}| > \varepsilon\sqrt{m_n}\} \rightarrow 0. \quad (38)$$

В этом случае $\pi_{n,m_n} \rightarrow 0$.

Это утверждение вытекает из известной теоремы Ю. В. Прохорова (см., например, [7, гл. 5, теорема 3]), распространяющей принцип инвариантности Донскера на случай схемы серий.

Лемма 2. При всех натуральных m и всех $x, d \in (-\infty, \infty)$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{Z}_{n,m}(d) \leq x\} &\leq \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x + \pi_{n,m}\} + \pi_{n,m}, \\ \mathbf{P}\{\bar{Z}_{n,m}(d) < x\} &\geq \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x - \pi_{n,m}\} - \pi_{n,m}. \end{aligned} \quad (39)$$

Доказательство. Из определения расстояния Прохорова (см. [7, гл. 7, § 2]) вытекает, что для любого измеримого множества $B \in C[0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_{n,m} \in B\} &\leq \mathbf{P}\{W \in B^\varepsilon\} + \varepsilon \quad \text{и} \\ \mathbf{P}\{W \in B\} &\leq \mathbf{P}\{Z_{n,m} \in B^\varepsilon\} + \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon = \pi_{n,m}, \end{aligned} \quad (40)$$

где B^ε обозначает замкнутую ε -окрестность множества B .

Фиксируем число d и введем в рассмотрение множества

$$B(x) = \left\{ f \in C[0, 1]: \max_{0 \leq t \leq 1} (f(t) + td) < x \right\}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Нетрудно понять, что в этом случае из (40) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{Z}_{n,m}(d) \leq x\} &= \mathbf{P}\{Z_{n,m} \in B(x+0)\} \leq \mathbf{P}\{W \in B^\varepsilon(x+0)\} + \varepsilon, \\ \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x - \varepsilon\} &= \mathbf{P}\{W \in B(x - \varepsilon)\} \leq \mathbf{P}\{Z_{n,m} \in B^\varepsilon(x - \varepsilon)\} + \varepsilon \end{aligned} \quad (41)$$

при $\varepsilon = \pi_{n,m}$. Чтобы теперь из (41) извлечь (39), надо лишь заметить, что $B^\varepsilon(x+0) = B(x + \varepsilon + 0)$ и $B^\varepsilon(x - \varepsilon) = B(x)$ при всех x и при любых $\varepsilon > 0$, а потому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{W \in B^\varepsilon(x+0)\} &= \mathbf{P}\{\bar{W}(d) \leq x + \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x + \varepsilon\}, \\ \mathbf{P}\{Z_{n,m} \in B^\varepsilon(x - \varepsilon)\} &= \mathbf{P}\{\bar{Z}_{n,m}(d) < x\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для всех натуральных n и m положим

$$\Delta_{n,m}(d) = \sup_{x \geq 0} \left| \mathbf{P}\{\bar{Z}_{n,m}(d) < x\} - \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x\} \right|. \quad (42)$$

Лемма 3. При всех натуральных m и n и всех $d \in (-\infty, \infty)$

$$\Delta_{n,m}(d) \leq (1 + 2\varphi(0) + 2d^-) \pi_{n,m}.$$

Доказательство. Обозначим через $\psi_d(x)$ плотность случайной величины $\bar{W}(d)$. Из определения (42) и оценок (39) мы немедленно находим, что

$$\Delta_{n,m}(d) \leq \pi_{n,m} + \pi_{n,m} \sup_x \psi_d(x). \quad (43)$$

Оценим теперь $\psi_d(x)$. В силу (20) и (23)

$$\begin{aligned} \psi_d(x) &\equiv \frac{d}{dx} \mathbf{P}\{\bar{W}(d) < x\} = \varphi(x-d) + e^{2dx} \varphi(x+d) - 2de^{2dx} \Psi(x+d) \\ &= 2\varphi(x-d) - 2de^{2dx} \Psi(x+d) \quad \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi_d(x) \leq 2\varphi(0)$ при $d \geq 0$ и $\psi_d(x) \leq 2\varphi(0) + 2(-d)e^0 \Psi(-\infty)$ при $d < 0$. Значит, при всех d

$$\max_x \psi_d(x) \leq 2\varphi(0) + 2d^- \Psi(-\infty) = 2\varphi(0) + 2d^-. \quad (44)$$

Требуемое утверждение леммы вытекает из оценок (43) и (44).

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, возьмем $m = m_n = n$ и $d = b\sqrt{n}$. В этом случае $\pi_n \equiv \pi_{n,n} \rightarrow 0$ ввиду леммы 1, а неравенства (12) и (13) при $x > 0$ совпадают с утверждением (39) леммы 2. Оценка (14) вытекает из леммы 3, поскольку $\Delta_n(b) = \Delta_{n,n}(b\sqrt{n})$ в силу замечания 7.

3.2. Доказательство теоремы 4. Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 4. Пусть выполнено условие 0. Тогда при всех $c > 0$, $x \geq 0$ и всех натуральных m и n справедливы следующие неравенства:

$$\tilde{P}_n(x, c, m) \equiv \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq m} (S_{k,n} - kc) \geq x\right\} \leq \frac{2}{mc^2 + cx}, \quad (45)$$

$$\tilde{P}(x, c, m) \equiv \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq m} (W(t) - ct) \geq x\right\} \leq \frac{2}{mc^2 + cx}. \quad (46)$$

Доказательство. Фиксируем числа $n, m, x \geq 0, c > 0$ и заметим, что в этом случае

$$\tilde{P}_n(x, c, m) \leq \tilde{P} \equiv \mathbf{P}\left\{\max_{k \geq m} \frac{|S_{k,n}|}{x_k} \geq 1\right\} \quad \text{при } x_k = kc + x. \quad (47)$$

Для оценки вероятности $\tilde{P}$ воспользуемся неравенством Гаека-Реньи (см. [8, гл. 3, теорема 13]). Так как $D\xi_{i,n} = 1$ при всех i и n , то для любого натурального $M > m$ получаем

$$\tilde{P}_M \equiv \mathbf{P}\left\{\max_{m \leq k \leq M} \frac{|S_{k,n}|}{x_k} \geq 1\right\} \leq \frac{m}{x_m^2} + \sum_{k=m+1}^M \frac{1}{x_k^2}. \quad (48)$$

Но поскольку $mc/x_m \leq 1$ и $c/x_k^2 \leq 1/x_{k-1} - 1/x_k$ в силу определения (47) величин x_k , то

$$c\tilde{P}_M \leq \frac{1}{x_m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{2}{x_m}. \quad (49)$$

Из (47)–(49) вытекает (45), ибо

$$\tilde{P} = \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{P}_M \leq \frac{2}{cx_m} = \frac{2}{mc^2 + cx}.$$

Чтобы доказать (46), введем в рассмотрение случайные величины

$$\xi_{i,n} = \sqrt{n} \left(W\left(\frac{i}{n}\right) - W\left(\frac{i-1}{n}\right) \right), \quad i, n = 1, 2, \dots$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, c, m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\max_{k \geq mn} \left(W\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{ck}{n} \right) \geq x \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}_n\left(x\sqrt{n}, \frac{c}{\sqrt{n}}, mn\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Но в силу (45)

$$\tilde{P}_n\left(x\sqrt{n}, \frac{c}{\sqrt{n}}, mn\right) \leq \frac{2}{(c/\sqrt{n})(mnc/\sqrt{n} + x\sqrt{n})} = \frac{2}{c(mc+x)}. \quad (51)$$

Требуемое неравенство (46) следует из (50) и (51).

Лемма 5. Если выполнено условие 0 и $d_n \rightarrow \infty$, то

$$\delta_n \equiv \frac{\bar{S}_n - a_n n}{\sigma_n \sqrt{n}} - \frac{S_{n,n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. При $b_n = a_n/\sigma_n$ с учетом обозначений (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \delta_n &= Y_n\left(\frac{a_n}{\sigma_n}\right) - \frac{na_n}{\sigma_n} - S_{n,n} = \max_{k \leq n} (S_{k,n} + kb_n) - nb_n - S_{n,n} \\ &= \max_{k \leq n} (S_{k,n} - S_{n,n} + kb_n - nb_n) = \max_{0 \leq m \leq n-1} (S_{n-m,n} - S_{n,n} - mb_n). \end{aligned} \quad (52)$$

Введем теперь в рассмотрение случайные величины $\xi_{i,n}^* = -\xi_{n-i+1,n}$ при $i, n = 1, 2, \dots$. В этом случае (52) можно переписать в следующем виде:

$$0 \leq \sqrt{n} \delta_n = \max_{0 \leq m \leq n-1} \sum_{i=1}^m (-b_n + \xi_{i,n}^*), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^0 = 0. \quad (53)$$

Поскольку $E\xi_{i,n}^* = 0$ и $D\xi_{i,n}^* = 1$, то мы можем воспользоваться утверждением леммы 4 при $m = 1$ и $c = b_n > 0$, заменив предварительно в этой лемме величины $\{\xi_{i,n}\}$ на $\{\xi_{i,n}^*\}$. В итоге из (53) мы получаем

$$\begin{aligned} P\{\delta_n > \varepsilon\} &= P\left\{\max_{1 \leq m \leq n-1} \sum_{i=1}^m (\xi_{i,n}^* - b_n) > \sqrt{n}\varepsilon\right\} \leq \tilde{P}_n(\sqrt{n}\varepsilon, b_n, 1) \\ &\leq 2(b_n^2 + b_n\sqrt{n}\varepsilon)^{-1} \leq 2(\sqrt{n}b_n\varepsilon)^{-1} = (2d_n\varepsilon)^{-1} \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Тем самым лемма 5 доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 4. Ввиду теоремы 3 нам нужно доказать лишь необходимость условия (11) для справедливости (28). Но из (28) и леммы 5 вытекает, что в этом случае $S_{n,n}/\sqrt{n}$ сходится к стандартному нормальному распределению. И нам остается лишь заметить, что, в силу теоремы Линдеберга–Феллера, в этом случае условие Линдеберга (11) является не только достаточным, но и необходимым для указанной сходимости нормированной суммы $S_{n,n}/\sqrt{n}$.

3.3. Доказательство теоремы 2. Прежде всего докажем три вспомогательных утверждения.

Лемма 6. Если выполнено условие (16), то

$$\bar{\pi}_n \equiv \max\{\pi_{n,m}: m \geq A_n^2\} \rightarrow 0. \quad (54)$$

Доказательство. В силу определения (54) всегда можно выбрать такие числа m_n , что

$$m_n \geq A_n^2 \quad \text{и} \quad \pi_{n,m_n} \geq \frac{\bar{\pi}_n}{2}. \quad (55)$$

Но для таких чисел m_n будет выполнено условие (38) леммы 1, поскольку при $m_n \geq A_n^2$ это условие всегда вытекает из (16). Значит, в этом случае $\pi_{n,m_n} \rightarrow 0$ в силу леммы 1. Из этого факта и (55) вытекает требуемая сходимость в (54).

При $b < 0$ введем обозначение

$$\tilde{\Delta}_n(x, b, m) = \max\{\tilde{P}_n(x, -b, m), \tilde{P}(x, -b, m)\}. \quad (56)$$

Лемма 7. Если $b < 0$, то при всех натуральных n и $m \leq n$ справедливо следующее неравенство:

$$\Delta_n(b) \leq \Delta_{n,m}(\sqrt{m}b) + \tilde{\Delta}_n(0, b, m).$$

Доказательство. Положим

$$P_n(x, b, m) = \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq m} (S_{k,n} + kb) < x\right\}, \quad P(x, b, m) = \mathbf{P}\{\overline{W}(b, m) < x\},$$

$$\Delta_n(x, b, m) = |P_n(x, b, m) - P(x, b, m)|. \quad (57)$$

И заметим, что в силу (9) и (37)

$$\Delta_n(x, b, m) = \left| \mathbf{P}\{\sqrt{m} \bar{Z}_{n,m}(b\sqrt{m}) < x\} - \mathbf{P}\{\sqrt{m} \bar{W}(b\sqrt{m}) < x\} \right|$$

при $x \geq 0$. А ввиду (42)

$$\Delta_n(x, b, m) \leq \Delta_{n,m}(b\sqrt{m}) \quad \forall x \geq 0. \quad (58)$$

Далее, из определений (45), (46), (57) и формулы полной вероятности имеем

$$P_n(x, b, n) \leq P_n(x, b, m) \leq P_n(x, b, n) + \tilde{P}_n(x, -b, m),$$

$$P(x, b, n) \leq P(x, b, m) \leq P(x, b, n) + \tilde{P}(x, -b, m).$$

Следовательно,

$$\Delta_n(x, b, n) \leq \Delta_n(x, b, m) + \tilde{\Delta}_n(x, b, m), \quad (59)$$

если только воспользоваться определениями (56) и (57). А поскольку, кроме того, $\tilde{\Delta}_n(x, b, m) \leq \tilde{\Delta}_n(0, b, m)$ при $x \geq 0$ ввиду (45), (46) и (56), то, подставляя (58) в (59), мы приходим к неравенству

$$\Delta_n(x, b, n) \leq \Delta_{n,m}(b\sqrt{m}) + \tilde{\Delta}_n(0, b, m) \quad \forall x \geq 0. \quad (60)$$

Из определений (10) и (57) и замечания 7 имеем

$$\Delta_n(b) = \sup_{-\infty < x < \infty} \Delta_n(x, b, n) = \sup_{x \geq 0} \Delta_n(x, b, n). \quad (61)$$

Требуемое в лемме 7 неравенство немедленно следует из (60) и (61).

Лемма 8. Неравенство (17) верно при

$$\tilde{\pi}_n \equiv 4\pi_n^{2/3} + 2\pi_n + 2\pi_n A_n^{-1}. \quad (62)$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим самый трудный случай, когда

$$A_n^2 < n, \quad b < 0 \quad \text{и} \quad n > k \equiv b^{-2}\pi_n^{-2/3}. \quad (63)$$

Введем в рассмотрение натуральные числа $m = [\max\{k, A_n^2\}] + 1 \leq n$ и заметим, что в этом случае

$$b^{-2}\pi_n^{-2/3} = k \leq m \leq (\sqrt{k} + A_n + 1)^2. \quad (64)$$

Из лемм 3 и 6 и из правого неравенства в (64) мы находим, что

$$\Delta_{n,m}(b\sqrt{m}) \leq 2(1 + |b|\sqrt{m})\pi_n \leq 2(1 + |b|\sqrt{k} + A_n|b| + |b|)\pi_n. \quad (65)$$

А из леммы 4 и левого неравенства в (64) имеем

$$\tilde{\Delta}_n(0, b, m) \leq 2b^{-2}m^{-1} \leq 2b^{-2}k^{-1} = 2\pi_n^{2/3} = 2|b|\sqrt{k}\pi_n. \quad (66)$$

Воспользуемся теперь утверждением леммы 7. Складывая неравенства (65) и (66), получаем

$$\Delta_n(b) \leq 2\pi_n + 4\pi_n^{2/3} + 2A_n|b|\pi_n + 2|b|\pi_n \leq \tilde{\pi}_n(1 + A_n|b|)$$

при $\tilde{\pi}_n$, выбранном в (62). Тем самым мы доказали оценку (17) при выполнении условий (63).

Если же $b \geq 0$ или $A_n^2 = n$, то (17) следует из (14), ибо мы выбрали $\tilde{\pi}_n \geq \pi_n \geq \pi_n$. А если $b < 0$, но $n \leq k = b^{-2}\pi_n^{-2/3}$, то (17) также следует из (14), поскольку в этом случае

$$\Delta_n(b) \leq 2(1 + \sqrt{n}|b|)\pi_n \leq 2(1 + \pi_n^{-1/3})\pi_n \leq \tilde{\pi}_n$$

в силу (62). Таким образом, неравенство (41) справедливо и в случае, когда не выполнено хотя бы одно из условий в (63).

Теорема 2 немедленно вытекает из леммы 8, поскольку $\tilde{\pi}_n \rightarrow 0$ в силу (16) и (54).

4. Доказательства формул для распределения максимума броуновского процесса со сносом

4.1. Доказательство тождеств (25). Фиксируем числа $x > 0$, $T > 0$ и b . Введем функции

$$u_{\pm}(t) = \frac{x \pm bt}{\sqrt{t}}, \quad \text{так что} \quad \varphi(u_+(t))e^{2bx} = \varphi(u_-(t)). \quad (67)$$

Но $u_{\pm}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, когда $x > 0$. Поэтому из определения (19) функции Ψ мы имеем

$$-\Psi(u_{\pm}(T)) = \Psi(\infty) - \Psi(u_{\pm}(T)) = \int_0^T u'_{\pm}(t) \varphi(u_{\pm}(t)) dt.$$

Из этого факта и из определений (20) и (67) получаем

$$\begin{aligned} G(x, b, T) &= \Psi(u_-(T)) + e^{2bx} \Psi(u_+(T)) = - \int_0^T u'_-(t) \varphi(u_-(t)) dt \\ &\quad - \int_0^T u'_+(t) \varphi(u'_+(t)) e^{2bx} dt = - \int_0^T (u'_-(t) + u'_+(t)) \varphi(u_-(t)) dt. \end{aligned} \quad (68)$$

Но $u_-(t) + u_+(t) = 2x/\sqrt{t}$ и $u'_-(t) + u'_+(t) = -x/t^{3/2}$ ввиду (67). Это значит, что (68) можно переписать в следующем виде:

$$G(x, b, T) = \int_0^T \frac{x}{t^{3/2}} \varphi(u_-(t)) dt = V_0(x, b, T). \quad (69)$$

Последнее равенство в (69) следует из определений (21) и (67).

Из (69) при $x > 0$ и $T = \infty$ получаем

$$V_0(x, b, \infty) = G(x, b, \infty) = \Psi(-\operatorname{sign} b \cdot \infty) + e^{2bx} \Psi(\operatorname{sign} b \cdot \infty).$$

Рассматривая в этом соотношении отдельно случаи $b < 0$, $b = 0$ и $b > 0$, нетрудно заметить, что $V_0(x, b, \infty) = e^{-2b^-x}$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} v(t) dt = V_0(x, b, \infty) = e^{-2b^-x} \quad \text{при} \quad v(t) = \frac{x}{t^{3/2}} \varphi\left(\frac{x-bt}{\sqrt{t}}\right).$$

Из этого равенства и определений (21) и (22) немедленно находим, что

$$V_0(x, b, T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^{\infty} v(t) dt - \int_T^{\infty} v(t) dt = V_{\infty}(x, b, T).$$

Последнее соотношение и (69) доказывают оба тождества в (25).

4.2. Доказательство равенства (23). Рассмотрим сначала случай $T = 1$. Положим

$$w = W(1), \quad W_0(t) = W(t) - tw, \quad Q(x, y) = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} (W_0(t) + yt) \geq x\right\}.$$

Мы будем далее следовать схеме доказательства из [5, гл. 7, § 3], однако мы не будем тратить силы на нахождение явного вида функции $Q(x, y)$. Как и в [5], воспользуемся независимостью случайного процесса $W_0(\cdot)$ и случайной величины $w + b$, которая имеет плотность $\varphi(x - b)$. Получаем

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &\equiv \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} (W(t) + bt) \geq x, W(1) + b < x\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} (W_0(t) + tw + bt) \geq x, w + b < x\right\} \equiv \bar{P}_1. \end{aligned} \quad (70)$$

Введем обозначения

$$\varphi_b(y) \equiv \frac{\varphi(y - b)}{\varphi(y)} = e^{yb - b^2/2}, \quad \bar{w} = \max_{0 \leq t \leq 1} W(t).$$

Поскольку

$$Q(x, y) = \mathbf{P}(\bar{w} < x \mid w = y),$$

то

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= \int_{-\infty}^x Q(x, y) \varphi(y - b) dy = \int_{-\infty}^x \varphi_b(y) Q(x, y) \varphi(y) dy \\ &= \mathbf{E}\{\varphi_b(w): \bar{w} \geq x, w < x\} \equiv \bar{P}_2.\end{aligned}$$

Положим

$$\tau = \min\{t: W(t) = x > 0\},$$

так что $W(\tau) = x$, и воспользуемся тем фактом, что пары случайных величин

$$(\tau, w - x) = (\tau, W(1) - W(\tau)) \quad \text{и} \quad (\tau, W(\tau) - W(1)) = (\tau, x - w)$$

одинаково распределены. Следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{P}_2 &= \mathbf{E}\{\varphi_b(x + w - x): \tau \leq 1, w - x < 0\} \\ &= \mathbf{E}\{\varphi_b(x + x - w): \tau \leq 1, x - w < 0\} \\ &= \mathbf{E}\{\varphi_b(2x - w): \bar{w} \geq x, w > x\} \equiv \bar{P}_3.\end{aligned}$$

Но событие $\{w > x\}$ влечет событие $\{\bar{w} \geq x\}$. Значит,

$$\begin{aligned}\bar{P}_0 &= \bar{P}_3 = \mathbf{E}\{\varphi_b(2x - w): w > x\} = \int_x^\infty \varphi_b(2x - y) \varphi(y) dy \\ &= \int_x^\infty e^{(2x-y)b - b^2/2} \varphi(y) dy = e^{2bx} \int_x^\infty \varphi(y + b) dy = e^{2bx} \Psi(x + b).\end{aligned}\quad (71)$$

Теперь, используя (70), (71) и формулу полной вероятности, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\bar{W}(b) \geq x\} &= \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} (W(t) + bt) \geq x\right\} \\ &= \mathbf{P}\{W(1) + b \geq x\} + \bar{P}_0 = \Psi(x - b) + e^{2bx} \Psi(x + b).\end{aligned}\quad (72)$$

Нетрудно видеть, что (72) совпадает с (23) при $T = 1$. А учитывая равенства (9), (20) и (72), нетрудно получить, что и при любом $T > 0$

$$\mathbf{P}\{\bar{W}(b, T) \geq x\} = \mathbf{P}\left\{\bar{W}(\sqrt{T}b) \geq \frac{x}{\sqrt{T}}\right\} = G\left(\frac{x}{\sqrt{T}}, \sqrt{T}b, 1\right) = G(x, b, T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания. — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, в. 1, с. 199–205.
2. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
3. Алешкявичене А. К., Нагаев С. В. Переходные явления в случайном блуждании. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 1, с. 3–21.
4. Malmquist S. On certain confidence contours for distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, p. 523–533.
5. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961, 216 с.
6. Круглов В. М., Чжан Бо. Предельные теоремы для максимальных случайных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 520–532.
7. Боровков А. А., Могульский А. А., Сазаненко А. И. Предельные теоремы для случайных процессов. — Итоги науки и техники, совр. проблемы матем., фундам. напр., 1995, т. 82, с. 1–200.
8. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.

Поступила в редакцию
28.XI.2003