Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ю. Софронов, Асимптотически d -оптимальный критерий в задаче апостериорного обнаружения разладки, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 2, 396–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:14:45

© 2004 г.

СОФРОНОВ Г. Ю.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ d -ОПТИМАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ В ЗАДАЧЕ АПОСТЕРИОРНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ¹⁾

Рассматривается задача апостериорного обнаружения разладки для последовательности независимых случайных величин. Вместо ошибок первого и второго рода предлагается использовать d -риски. Строится асимптотически оптимальный критерий, минимизирующий один d -риск и гарантирующий другой.

Ключевые слова и фразы: обнаружение разладки, различение гипотез, сближающиеся гипотезы, d -апостериорный подход, d -оптимальность, слабая сходимость, функционалы от винеровского процесса.

1. Постановка задачи. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$, θ принимает значения в открытом подмножестве Θ евклидова пространства $\mathbf{R}^1$, $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами.

Рассматривается задача (см., например, обзорную статью [1]) проверки гипотезы H_0 (отсутствие разладки): независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены с функцией распределения $F_{\theta_0}(x)$, при альтернативе H_1 (есть разладка): $X_1, \dots, X_\tau$ распределены с функцией распределения $F_{\theta_0}(x)$, а $X_{\tau+1}, \dots, X_n$ — с функцией распределения $F_{\theta_1}(x)$, где $\theta_0 \neq \theta_1$. В дальнейшем будем считать, что значение параметра до разладки $\theta = \theta_0$ известно. В [2] рассматривался случай, когда θ — параметр сдвига. Предполагается, что момент разладки τ есть случайная величина с некоторым априори известным распределением вероятностей $P\{\tau = k\} = p_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, которое удовлетворяет следующему условию:

(А) $\lim_{n \rightarrow \infty} np_k = p(t)$ при $k/n \rightarrow t$, $0 \leq t < 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \equiv \text{const}$.

Например, это требование выполняется для часто используемого в задачах о разладке геометрического распределения $p_k = q(1-q)^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $p_n = (1-q)^n$, где q — вероятность разладки на каждом шаге. В этом случае при $nq = \lambda$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_k = p(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p = e^{-\lambda}.$$

Событие $\{\tau = n\}$ означает, что разладка не произошла (справедлива гипотеза H_0), p_n — вероятность отсутствия разладки.

Будем считать, что функция распределения $F_\theta(x)$ имеет плотность $f_\theta(x)$ (по некоторой σ -конечной мере μ). Выполнены следующие стандартные условия регулярности.

(В₁) Функция плотности $f_\theta(x)$ μ -п.в. непрерывна при любом $\theta \in \Theta$.

(В₂) Функция $\sqrt{f_\theta(x)}$ непрерывно дифференцируема в каждой точке $\theta \in \Theta$ в смысле L_2 (имеет конечную информацию Фишера $I(\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$).

(В₃) Функция $f_\theta(x)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметру под знаком интеграла.

(В₄) Интеграл $I(\theta) = \int (f'_\theta(x)/f_\theta(x))^2 f_\theta(x) d\mu(x)$ равномерно сходится.

При различении гипотез H_0 и H_1 вместо традиционных ошибок первого и второго рода предлагается использовать d -риски (см. подробнее обзор [3]):

$$R_0 = P\{\tau = n \mid \text{принята } H_1\}, \quad R_1 = P\{\tau < n \mid \text{принята } H_0\}.$$

* Марийский государственный университет, пл. Ленина, 1, 424001 Йошкар-Ола, Марий Эл, РФ; e-mail: sofronov@marsu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1758.2003.1 Программы поддержки ведущих научных школ России.

Как было показано в [4], оптимальный критерий $\varphi_n(X^{(n)})$, гарантирующий d -риск $R_1 \leq \beta$ и минимизирующий d -риск R_0 , основан на статистике $T_n = T_n(X^{(n)}) = \mathbf{P}\{\tau = n \mid X^{(n)}\}$ и имеет вид

$$\varphi_n = \varphi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } T_n < c_n, \\ \gamma_n, & \text{если } T_n = c_n, \\ 0, & \text{если } T_n > c_n. \end{cases}$$

Будем искать асимптотику критерия φ_n при сближающихся гипотезах H_0 и H_1 . В связи с этим рассмотрим два возможных варианта. Основной результат относится к случаю, когда $\theta_1 = \theta_0 + \delta/\sqrt{n}$, где δ — постоянная. В случае с дополнительной байесовостью будем считать, что значение параметра θ_1 является реализацией случайной величины с плотностью $g(\theta)$. Поэтому близость гипотез естественно связать со степенью сосредоточенности априорного распределения в точке θ_0 . Для этого предлагается использовать (см. [5]) распределение вида $g(\theta) = \sigma^{-1}g((\theta - \theta_0)/\sigma; \sigma)$, где $\sigma > 0$ — параметр, характеризующий степень концентрации априорного распределения в точке θ_0 .

2. Основной результат. Предположим, что $\theta_1 = \theta_0 + \delta/\sqrt{n}$, где δ — постоянная. Введем обозначения:

$$H_n(c_n \mid \tau = k_0) = \mathbf{P}\{T_n < c_n \mid \tau = k_0\}, \quad k_0 = 0, 1, \dots, n,$$

— функция распределения статистики T_n ,

$$L_n(c_n \mid \tau = k_0) = 1 - H_n(c_n \mid \tau = k_0) + (1 - \gamma_n)(H_n(c_n + 0 \mid \tau = k_0) - H_n(c_n \mid \tau = k_0))$$

— оперативная характеристика критерия φ_n . Тогда несложно получить, что

$$R_0(n, c_n, \gamma_n) = \mathbf{P}\{\tau = n \mid \varphi_n = 1\} = \frac{p_n(1 - L_n(c_n \mid \tau = n))}{\sum_{k_0=0}^n p_{k_0}(1 - L_n(c_n \mid \tau = k_0))},$$

$$R_1(n, c_n, \gamma_n) = \mathbf{P}\{\tau < n \mid \varphi_n = 0\} = \frac{\sum_{k_0=0}^{n-1} p_{k_0} L_n(c_n \mid \tau = k_0)}{\sum_{k_0=0}^n p_{k_0} L_n(c_n \mid \tau = k_0)}.$$

Константы c_n и γ_n находятся из равенства $R_1(n, c_n, \gamma_n) = \beta$. В [6] показывается, что $\{c_n\}$ — сходящаяся к некоторому c последовательность. Введем обозначения: $\tau' = \tau/n$ — случайная величина, соответствующая τ , $\tau \in \{0, 1, \dots, n\}$, $H(c \mid \tau' = t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(c_n \mid \tau = k_0)$, $L(c \mid \tau' = t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n \mid \tau = k_0)$ при $k_0/n \rightarrow t_0$. Основную роль при дальнейших рассуждениях будут играть случайные процессы

$$Z_1(u, t) = \exp\left(u\sqrt{I(\theta_0)}W(1-t) - \frac{u^2}{2}I(\theta_0)(1-t)\right),$$

$$Z_{t_0}(u, t) = \exp\left(u\sqrt{I(\theta_0)}W(1-t) + \frac{u^2}{2}I(\theta_0)h(t_0, t)\right),$$

$$h(t_0, t) = \begin{cases} 1+t-2t_0, & t < t_0, \\ 1-t, & t \geq t_0, \end{cases}$$

где $I(\theta_0)$ — информация Фишера в точке θ_0 , $W(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс.

Нетрудно доказать следующую лемму (см. также [7, теорема 11]).

Лемма 1. При выполнении условий (B_1) – (B_4) и $\theta_1 = \theta_0 + \delta/\sqrt{n}$, где δ — постоянная, имеет место:

1) слабая сходимость по распределению $\mathbf{P}_{\theta_0}$:

$$\exp\left(\sum_{i=[nt]+1}^n \ln \frac{f_{\theta_1}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)}\right) \xrightarrow{d} Z_1(\delta, t),$$

2) слабая сходимость по распределению $\mathbf{P}_{\theta_1}$:

$$\exp\left(\sum_{i=[nt]+1}^n \ln \frac{f_{\theta_1}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)}\right) \xrightarrow{d} Z_{t_0}(\delta, t).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условие (A) и условия леммы 1. Если $c_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} R_0(n, c_n, \gamma_n) &= R_0(c) = \frac{p(1 - L(c | \tau' = t_0))}{\int_0^1 p(t_0)(1 - L(c | \tau' = t_0)) dt_0}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_1(n, c_n, \gamma_n) &= R_1(c) = \frac{\lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a p(t_0) L(c | \tau' = t_0) dt_0}{\int_0^1 p(t_0) L(c | \tau' = t_0) dt_0}, \\ H(c | \tau' = t_0) &= \mathbf{P}\{T < c | \tau' = t_0\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 p(t) Z_{t_0}(\delta, t) dt > \frac{p}{c}\right\},\end{aligned}$$

где постоянная c выбирается как решение уравнения $R_1(c) = \beta$.

Доказательство. Применяя формулу Байеса, найдем апостериорную вероятность отсутствия разладки:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\tau = n | X^{(n)}\} &= \frac{p_n \prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)}{\sum_{k=0}^n p_k \prod_{i=1}^k f_{\theta_0}(X_i) \prod_{i=k+1}^n f_{\theta_1}(X_i)} \\ &= \frac{1}{p_n^{-1} \sum_{k=0}^n p_k \exp(\sum_{i=k+1}^n \ln(f_{\theta_1}(X_i)/f_{\theta_0}(X_i)))}.\end{aligned}$$

Далее, условие (A) и лемма 1 вместе с теоремой 1 работы [8] дают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{p_n^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} np_k \exp\left(\sum_{i=k+1}^n \ln \frac{f_{\theta_1}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)}\right) < x\right\} = \mathbf{P}\left\{p^{-1} \int_0^1 p(t) Z_{t_0}(\delta, t) dt < x\right\}.$$

Тогда $T_n(X^{(n)})$ слабо сходится к случайной величине T с распределением

$$H(c | \tau' = t_0) = \mathbf{P}\{T < c | \tau' = t_0\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 p(t) Z_{t_0}(\delta, t) dt > \frac{p}{c}\right\}.$$

Таким образом, постоянная рандомизации γ не влияет на приведенную асимптотику.

Полученные результаты позволяют представить асимптотики d -рисков в виде

$$\begin{aligned}R_0(c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_0(n, c_n, \gamma_n) = \frac{p(1 - L(c | \tau' = t_0))}{\int_0^1 p(t_0)(1 - L(c | \tau' = t_0)) dt_0}, \\ R_1(c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_1(n, c_n, \gamma_n) = \frac{\lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a p(t_0) L(c | \tau' = t_0) dt_0}{\int_0^1 p(t_0) L(c | \tau' = t_0) dt_0},\end{aligned}$$

где постоянную c следует выбирать как решение уравнения $R_1(c) = \beta$. В [6] доказано, что существует единственное решение этого уравнения. Теорема доказана.

3. Случай с дополнительной байесовостью. Будем считать, что значение параметра θ_1 является реализацией случайной величины с плотностью $g(\theta) = \sigma^{-1}g((\theta - \theta_0)/\sigma; \sigma)$, где $\sigma > 0$ — параметр, характеризующий степень концентрации априорного распределения в точке θ_0 . Кроме того, выполнено следующее условие регулярности.

(C) Семейство плотностей $\{g(\cdot, \sigma), \sigma > 0\}$ имеет предельную плотность $g(u, 0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} g(u, \sigma)$.

В [5] показано, что этому требованию удовлетворяет, например, бета-распределение

$$g(\theta) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sigma}; \sigma\right) = \frac{1}{B(\lambda_1, \lambda_2)} \theta^{\lambda_1-1} (1 - \theta)^{\lambda_2-1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

причем λ_1 и λ_2 таковы, что $\mathbf{E}\theta_1 = \theta_0 = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Если определить σ^2 равным $\mathbf{D}\theta_1 = \theta_0(1 - \theta_0)/(1 + \lambda_1 + \lambda_2)$, то при $\sigma \rightarrow 0$ значения λ_1 и λ_2 стремятся к бесконечности так, что $g(u, 0) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2)$.

Следующая лемма доказывается по аналогии с леммой 1 из [5].

Лемма 2. Пусть r_n — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к некоторому $r > 0$, и $\theta_1 = \theta_0 + u\sigma_n$, $\sigma_n = r_n/\sqrt{n}$. При выполнении условий (B₁)–(B₄), (C) имеет место:

1) слабая сходимость по распределению P_{θ_0} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{i=[nt]+1}^n \ln \frac{f_{\theta_0+u\sigma_n}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)}\right) g(u; \sigma_n) du \xrightarrow{d} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(ur, t) g(u; 0) du,$$

2) слабая сходимость по распределению P_{θ_1} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{i=[nt]+1}^n \ln \frac{f_{\theta_0+u\sigma_n}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)}\right) g(u; \sigma_n) du \xrightarrow{d} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{t_0}(ur, t) g(u; 0) du.$$

В заключение сформулируем утверждение, которое является аналогом теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условие (A) и условия леммы 2. Если $c_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} H(c | \tau' = t_0) &= P\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(u; 0) du}{p^{-1} \int_0^1 p(t) \int_{-\infty}^{\infty} Z_{t_0}(ur, t) g(u; 0) du dt} < c\right\} \\ &= P\left\{\int_0^1 p(t) \int_{-\infty}^{\infty} Z_{t_0}(ur, t) g(u; 0) du dt > \frac{p}{c}\right\}, \end{aligned}$$

постоянная c выбирается как решение уравнения $R_1(c) = \beta$.

Следствие. Если

$$g(u, 0) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right),$$

то

$$\begin{aligned} H(c | \tau' = t_0) &= P\{T < c | \tau' = t_0\} \\ &= P\left\{\int_0^1 \frac{p(t)}{\sqrt{1 - r^2 I(\theta_0) h(t_0, t)}} \exp\left(\frac{r^2 I(\theta_0) W^2(1-t)}{2(1 - r^2 I(\theta_0) h(t_0, t))}\right) dt > \frac{p}{c}\right\}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов. — Труды МИАН, 1988, т. 182, с. 4–23.
2. Софронов Г. Ю. Асимптотически d -оптимальный критерий обнаружения разладки. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 571–572.
3. Володин И. Н., Новиков А. А., Симушкин С. В. Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход. — Обзорение прикл. и промысл. матем., сер. вероятн. и статист., 1994, т. 1, в. 2, с. 148–178.
4. Симушкин С. В. Эмпирический d -апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода. — Изв. вузов, сер. матем., 1983, № 11, с. 42–58.
5. Володин И. Н., Новиков А. А. Асимптотика необходимого объема выборки при d -гарантийном различении двух гипотез. — Изв. вузов, сер. матем., 1983, № 11, с. 59–66.
6. Володин И. Н., Новиков А. А. Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез. — Исследования по прикладной математике. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1999, в. 21, с. 3–41.
7. Greenwood P. E., Shirayev A. N. Contiguity and the Statistical Invariance Principle. New York: Gordon & Breach, 1985, 236 p.
8. MacNeill I. B. Tests for change of parameter at unknown times and distributions of some related functionals on Brownian motion. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 5, p. 950–962.

Поступила в редакцию
22.III.2004