Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Беломестный, Восстановление генерального распределения по распределению некоторых статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:49:05

© 2004 г.

БЕЛОМЕСТНЫЙ Д. В.*

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГЕНЕРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО
РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИК¹⁾

Исследуется проблема характеристики распределения независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_m$ (генеральное распределение) по распределению линейной статистики и статистики максимума с положительными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия, при которых такая характеристика имеет место.

Ключевые слова и фразы: характеристика распределений по распределению статистик, линейная статистика, статистика максимума.

Введение. При решении статистических задач проверки гипотез о виде распределения часто возникает ситуация, когда мы имеем доступ не к исходной выборке $X_1, \dots, X_m$ (генеральное распределение), а к некоторым образом преобразованной. Наиболее часто такими преобразованиями являются линейное преобразование, суперпозиция элементов выборки и выделение максимального элемента. Другими словами, мы приходим к необходимости делать статистические выводы о распределении исходной выборки (генеральном распределении) на основе некоторых статистик от нее. Основными такими статистиками, соответствующими вышеуказанным преобразованиям, являются линейная статистика

$$L = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_m X_m$$

и статистика максимума

$$M = \max \left(\frac{X_1}{\beta_1}, \dots, \frac{X_m}{\beta_m} \right),$$

где β_k — положительные действительные числа.

Независимо от характера решаемой статистической задачи (оценивание, проверка гипотез), основополагающим является вопрос о единственности восстановления исходного распределения по распределению

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: denbelom@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 00-01-00661).

статистик L и M . Работа посвящена получению условий, при которых распределение статистик L и M характеризует генеральное распределение. Что касается вопроса восстановления генерального распределения по распределению линейной статистики, то для частного случая, когда все коэффициенты β_k равны 1, эта задача рассматривалась в работах [1] и [8], где получены некоторые достаточные условия однозначности такого восстановления. Эти условия связаны либо с единственностью продолжения соответствующей характеристической функции с любого интервала, содержащего начало координат, либо с ее необращением в нуль (что эквивалентно непрерывности аргумента). Единственным результатом в общем случае является указание Линника (см. [5]) на то, что в классе распределений, имеющих все моменты и удовлетворяющих условиям единственности решения проблемы моментов, распределение статистики L однозначно определяет генеральное распределение. Проблема характеристики генерального распределения распределением статистики M , по сути, нигде ранее не рассматривалась, если не считать случая равенства всех β_k единице (см. [3]), в котором она становится тривиальной.

1. Формулировка основных результатов. Перепишем нашу линейную статистику в виде

$$L = b_1(X_{11} + \dots + X_{1k_1}) + \dots + b_n(X_{n1} + \dots + X_{nk_n}),$$

где k_i — натуральные числа и b_i удовлетворяют условию

$$b_1 < \dots < b_n, \quad (1.1)$$

и введем при $n > 1$ следующие обозначения:

$$q_i = \frac{k_i}{k_n}, \quad h_i = \frac{b_i}{b_n}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.2)$$

$$\tau(z) = 1 + q_1 h_1^z + \dots + q_{n-1} h_{n-1}^z. \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. Пусть две функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ таковы, что $L_F \cong L_G$. Положим $\alpha = \max\{\operatorname{Re} z: \tau(z) = 0\}$. Если выполнено одно из следующих условий:

1) $n = 1$,

2) $n > 1$, $q_1 + \dots + q_{n-1} \leq 1$,

3) $n > 1$, $q_1 + \dots + q_{n-1} > 1$ и F обладает моментом порядка α , то $f(t) = g(t)$ при $|t| < \delta$, где $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции, соответствующие $F(x)$ и $G(x)$, и $\delta = \min\{t > 0: |f(t)| = 0\}$. Если же условия 1), 2) и 3) нарушены, то существуют такие две функции распределения $F_0(x)$ и $G_0(x)$, обладающие моментами порядка $\alpha - \varepsilon$

для любого $\delta > \varepsilon > 0$ и порождающие одинаковое распределение статистики L , что соответствующие характеристические функции не равны тождественно ни на одном интервале, содержащем точку 0.

Следствие 1.1. Пусть в условиях теоремы 1.1 $f(t)$ такова, что для нее проблема продолжения с любого интервала, содержащего 0, имеет единственное решение (см. [2]). Тогда $F \equiv G$.

Следствие 1.2. Пусть в условиях теоремы 1.1 $f(t)$ не обращается в нуль на $(-\infty, \infty)$. Тогда $F \equiv G$.

Назовем полным типом распределения множество всех функций распределения вида $G((x-a)/b)$, где $G(x)$ — функция распределения, $a \in \mathbf{R}$ и $b > 0$.

Следствие 1.3. Пусть F_1 и F_2 — две функции распределения, принадлежащие некоторому общему полному типу, и $F = F_1 * F_2$. Если характеристическая функция $F(x)$ не обращается в нуль на всей прямой, то тип F_1 и F_2 однозначно определяется по F .

Обратимся теперь к статистике M . Перепишем ее в виде

$$M = \max \left(\frac{X_{11}}{b_1}, \dots, \frac{X_{1k_1}}{b_1}, \dots, \frac{X_{n1}}{b_n}, \dots, \frac{X_{nk_n}}{b_n} \right),$$

где k_i — натуральные числа и b_i удовлетворяют условию $b_1 < \dots < b_n$, и введем при $n > 1$ следующие обозначения:

$$q_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad h_i = \frac{b_i}{b_1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

$$\tau_1(z) = 1 + q_2 h_2^{-z} + \dots + q_n h_n^{-z}. \quad (1.5)$$

Теорема 1.2. Пусть две функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ таковы, что $M_F \cong M_G$. Положим $\alpha_1 = \max\{\operatorname{Re} z: \tau_1(z) = 0\}$. Если выполнено одно из следующих условий:

1) $n = 1$,

2) $n > 1$, $q_2 + \dots + q_n \leq 1$,

3) $n > 1$, $q_2 + \dots + q_n > 1$ и F обладает моментом порядка α_1 ,

то $F(x) = G(x)$ при $x > 0$. Если же условия 1), 2) и 3) нарушены, то существуют две различные функции распределения $F_0(x)$ и $G_0(x)$, сосредоточенные на $(0, \infty)$, обладающие моментами порядка $\alpha_1 - \delta$ для любого $\alpha_1 > \delta > 0$ и порождающие одинаковое распределение статистики M .

Следствие 1.4. Пусть в условиях теоремы 1.2 $F(0) = 0$. Тогда $F(x) = G(x)$ при $x \in \mathbf{R}$.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$L = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — конечные действительные числа. Тогда $\mathbf{E}|L|^r < \infty$ эквивалентно $\mathbf{E}|X_1|^r < \infty$ для любого $r > 0$.

Доказательство. Докажем вначале импликацию $\mathbf{E}|L|^r < \infty \Rightarrow \mathbf{E}|X_1|^r < \infty$. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $a_1 \neq 0$. Положим $b = -m(a_2 X_2 + \dots + a_n X_n)$, тогда

$$|a_1 X_1 - b| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - m(S_k - S_n)|,$$

где $S_k = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$, $k = 1, \dots, n$. Согласно неравенству Леви (см. [7, с. 78]),

$$\mathbf{P}\{|a_1 X_1 - b| \geq x\} \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - m(S_k - S_n)| \geq x\right\} \leq 2\mathbf{P}\{|S_n| \geq x\},$$

что влечет $\mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r \leq 2\mathbf{E}|S_n|^r = 2\mathbf{E}|L|^r$. Далее,

$$\text{при } r \leq 1 \quad \mathbf{E}|a_1 X_1|^r \leq \mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r + |b|^r < \infty,$$

$$\text{при } r > 1 \quad \mathbf{E}|a_1 X_1|^r \leq 2^{r-1} \mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r + 2^{r-1} |b|^r < \infty.$$

Для доказательства утверждения в обратную сторону достаточно заметить, что

$$\mathbf{E}|L|^r \leq |a_1|^r \mathbf{E}|X_1|^r + \dots + |a_n|^r \mathbf{E}|X_n|^r \quad \text{при } r \leq 1,$$

$$\mathbf{E}|L|^r \leq n^r (|a_1|^r \mathbf{E}|X_1|^r + \dots + |a_n|^r \mathbf{E}|X_n|^r) \quad \text{при } r > 1.$$

Лемма 2.2. Пусть X и Y — две случайные величины с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$. Если $\mathbf{E}|X|^m < \infty$, $\mathbf{E}|Y|^m < \infty$ при некотором натуральном m и существует стремящаяся к нулю последовательность t_n такая, что

$$f(t_n) = g(t_n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2.1)$$

то $f^{(l)}(0) = g^{(l)}(0)$, $l = 0, \dots, m$.

Доказательство. Сразу отметим, что $f(t)$ и $g(t)$ непрерывно дифференцируемы m раз на всей прямой. Так как выполнено (2.1), то, применяя последовательно теорему Ролля к функциям $f^{(l)}(t) - g^{(l)}(t)$, $l = 0, \dots, m$, получим, что существует система стремящихся к нулю последовательностей $\{t_{l,n}, l = 1, \dots, m, n \in \mathbf{N}\}$ таких, что $f^{(l)}(t_{l,n}) = g^{(l)}(t_{l,n})$, $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 2.3. Для любой характеристической функции $f(t)$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} f(t)| &\leq \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} f(t))}, \\ |\operatorname{Im} f(at) + \operatorname{Im} f(bt) + \operatorname{Im} f(-(a+b)t)| &\leq (1 - \operatorname{Re} f(at)) \\ &\quad + (1 - \operatorname{Re} f(bt)) + (1 - \operatorname{Re} f(-(a+b)t)), \quad a, b \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство первого неравенства имеется в [9], а второго — в [6].

Лемма 2.4. Для того чтобы распределение $F(x)$ с характеристической функцией $f(t)$ имело момент порядка $2k+\lambda$, где $k \in \mathbf{N}$, $0 < \lambda < 2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного $\delta > 0$

$$\int_0^\delta t^{-\lambda-1} \left(1 - \operatorname{Re} \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right) dt < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство имеется в работе [4].

Теорема 2.1. Пусть функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$q_1 w(x + \gamma_1) + \dots + q_m w(x + \gamma_m) + w(x) = 0, \quad x > 0, \quad (2.2)$$

где q_i и γ_i — положительные числа. Обозначим через $\tau(z)$ функцию $1 + q_1 e^{\gamma_1 z} + \dots + q_m e^{\gamma_m z}$ и введем число

$$\alpha = \min\{\operatorname{Re} z: \tau(z) = 0\}.$$

Тогда если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $q_1 + \dots + q_m < 1$,
- 2) $q_1 + \dots + q_m = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} |w(x)| = 0$,
- 3) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} |w(x)| dx < \infty$,

то $w(x) \equiv 0$ при $x > 0$. При нарушении этих трех условий частными решениями уравнения (2.2) будут функции вида

$$e^{\alpha x} (c_1 e^{i\mu_1 x} + \dots + c_l e^{i\mu_l x}), \quad x > 0,$$

где числа $\alpha + i\mu_k$ суть корни $\tau(z)$ на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha < 0$ (по нашему предположению множество таких корней не пусто).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $q_1 + \dots + q_m \leq 1$, то (2.2) после n итераций дает нам

$$w(x) = (-1)^n \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} q_1^{n_1} \dots q_m^{n_m} w(x + n_1 \gamma_1 + \dots + n_m \gamma_m),$$

откуда

$$|w(x)| \leq (q_1 + \dots + q_m)^n |w(x + n\gamma_*)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\gamma_* = \min\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} > 0$.

Пусть выполнено условие 2, тогда, применяя к (2.2) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi(z) \tau(z) + M(z) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} w(x) dx, \quad M(z) = \sum_{k=1}^m q_k e^{\gamma_k z} \int_0^{\gamma_k} e^{-zx} w(x) dx.$$

Лемма 2.5. 1) $\Phi(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$ и представляется в этой области в виде $\Phi(z) = -M(z)/\tau(z)$.

2) $M(z)$ есть целая функция, ограниченная константой $B = B(c)$ в каждой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq c$.

3) Функция $\tau(z)$ обладает следующими свойствами:

(а) $\tau(z)$ является целой функцией, почти периодической на каждой прямой $\operatorname{Re} z = \text{const}$;

(б) $\tau(z)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} z < \alpha$;

(с) число нулей $\tau(z)$ в любом замкнутом прямоугольнике $\{a \leq \operatorname{Re} z \leq b, y \leq \operatorname{Im} z \leq y + 1\}$ ограничено числом $N(a, b)$, не зависящим от y ;

(д) если точка z_0 удалена от всех нулей $\tau(z)$ на расстояние, большее, чем $\varepsilon > 0$, то $|\tau(z_0)| > A(\varepsilon)$.

Доказательство. Пункт 1 следует из условия 2) теоремы 2.1 и (2.3), пп. 2 и 3(а) вытекают из определения, а пп. 3(б)–3(д) являются следствием свойств почти периодических функций и доказаны, например, в [6].

Следствие 2.1. Для любого $c > 0$ существует такая последовательность $T_k \rightarrow \infty$, что $|\tau(z)| > A$ при $|\operatorname{Im} z| = T_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z < c$.

Доказательство. Из п. 3(б) следует, что для любого натурального k существуют такое малое $\varepsilon > 0$, не зависящее от k , и такое число $T_k \in [k, k + 1]$, что все точки отрезка $\{\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq c, \operatorname{Im} z = T_k\}$ удалены от нулей $\tau(z)$ на расстояние, большее, чем ε . Так как $\tau(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z < \alpha$, то это же утверждение остается верным для полупрямой $\operatorname{Re} z \leq c$. Согласно п. 3(д), $|\tau(z)| > A = A(\varepsilon)$ для всех z из полупрямых $\{\operatorname{Re} z \leq c, \operatorname{Im} z = T_k\}$. В силу того, что все нули $\tau(z)$ разбиваются на пары комплексно сопряженных, это же верно и для полупрямых $\{\operatorname{Re} z \leq c, \operatorname{Im} z = -T_k\}$.

По формуле комплексного обращения для преобразования Лапласа имеем для $u > 0$

$$\int_0^u w(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{uz} \Phi(z)}{z} dz$$

при $c > 0$. Функция $-M(z)/\tau(z)$ есть целая функция, равная $\Phi(z)$ при $\operatorname{Re} z > \alpha$. Пусть $h < \alpha < 0$, тогда по теореме Коши о вычетах будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{uz} M(z)}{z\tau(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{h+iT}^{c+iT} - \int_{h-iT}^{c-iT} + \int_{h-iT}^{h+iT} \right) \frac{e^{uz} M(z)}{z\tau(z)} dz \right] + \Phi(0). \end{aligned}$$

Далее, при фиксированном k

$$\begin{aligned} & \left| \int_{h-iT_k}^{h+iT_k} \frac{e^{uz} M(z)}{z\tau(z)} dz \right| \leq \frac{2(k+1)B}{|h|A(|h|-|\alpha|)} e^{hu} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow -\infty, \\ & \left| \left(\int_{-\infty+iT_k}^{c+iT_k} - \int_{-\infty-iT_k}^{c-iT_k} \right) \frac{e^{uz} M(z)}{z\tau(z)} dz \right| \leq \frac{B}{A} e^{uc} \frac{1}{\sqrt{c^2 + T_k^2}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Phi(0) = \int_0^\infty w(x) dx$, окончательно получим $\int_u^\infty w(x) dx = 0$ для любого $u > 0$. Второе утверждение теоремы проверяется непосредственно.

Лемма 2.6. Пусть $0 < \mu \leq 2$, $\lambda \geq \mu$, β — действительные числа, тогда существуют такие положительное A , неотрицательное D и натуральное $m \leq 2$, что функция

$$f(t) = \exp \left[-|t|^\mu - A|t|^\lambda \left(1 + B e^{i(t/|t|)\beta \ln |t|} + D \ln^m |t| \right) \right]$$

является характеристической для всех B таких, что

$$|B| < B(\lambda, \beta) = \begin{cases} \left| \sin \left(\frac{\lambda\pi}{2} \right) \right| \exp \left(-\frac{\beta\pi}{2} \right), & \lambda \neq 2k, \quad k \in \mathbf{N}, \\ \exp \left(-\frac{\beta\pi}{2} \right), & \lambda = 2k, \quad k \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Доказательство. Пусть сначала A, B и D не превосходят по модулю 1. В силу интегрируемости и эрмитовости $f(t)$ нам достаточно доказать, что

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-itx} f(t) dt \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Рассмотрим в комплексной области $z = t + is$ прямоугольный контур, образованный пересечением координатных осей и двух прямых $s = -S$ и $t = T$. Так как функция $f(z)$ аналитична в области $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ и непрерывна на ее границе, то, применяя теорему Коши к этому контуру, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-itx} f(t) dt &= -i \int_0^S e^{-sx} f(-is) ds + \int_0^T e^{-i(t-iS)x} f(t-iS) dt \\ &\quad + i \int_0^S e^{-i(T-is)x} f(T-is) ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нетрудно показать, что $|f(T - is)| = O(e^{-T^\mu})$ при $T \rightarrow \infty$ равномерно по s . В силу этого третий интеграл в (2.5) сходится к нулю при $T \rightarrow \infty$, а второй по модулю не превосходит $e^{-Sx} \int_0^T |f(t - iS)| dt = O(e^{-Sx})$. Обратимся теперь к первому интегралу. Так как

$$\begin{aligned} -i \int_0^S e^{-sx} f(-is) ds &= -i \int_0^\infty e^{-sx} f(-is) ds + i \int_S^\infty e^{-sx} f(-is) ds, \\ \left| \int_S^\infty e^{-sx} f(-is) ds \right| &\leq e^{-Sx/2} \int_S^\infty e^{-sx/2} |f(-is)| ds \leq C e^{-Sx/2}, \end{aligned}$$

то с учетом (2.5) получим

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-itx} f(t) dt = \operatorname{Re} \left(-i \int_0^\infty e^{-sx} f(-is) ds \right) + R(x), \quad (2.6)$$

где $|R(x)| \leq C e^{-Sx/2}$.

Далее, нетрудно доказать существование такого X , не зависящего от λ, μ, A, B , что при достаточно большом S , $x > X$ и B , удовлетворяющем (2.4), правая часть (2.6) будет неотрицательна.

Пусть теперь $x \leq X$. Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-itx} \exp[-t^\mu - At^\lambda (1 + Be^{i\beta \ln t} + D \ln^m t)] \\ &= \int_0^\infty \exp(-itx - t^\mu) dt \\ &\quad + \int_0^T \exp(-itx - t^\mu) (\exp[-At^\lambda (1 + Be^{i\beta \ln t} + D \ln^m t)] - 1) dt \\ &\quad + \int_T^\infty \exp(-itx - t^\mu) (\exp[-At^\lambda (1 + Be^{i\beta \ln t} + D \ln^m t)] - 1) dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя неравенство $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$, верное для любого комплексного z , получим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^T \exp(-t^\mu) \exp(At^\lambda(2 + \ln^2 t)) At^\lambda(2 + \ln^2 t) dt \\ &\leq AC_4 \exp(AT^\lambda(2 + \ln^2 T)) \end{aligned}$$

и $|I_3| \leq C_5 e^{-T^{\mu/2}}$. Воспользуемся теперь тем известным фактом, что $\operatorname{Re} I_1(x)$ есть функция, положительная на всей оси (см. [6]), и поэтому $\operatorname{Re} I_1(x) > \delta > 0$ при $x \leq X$. Выбирая T_0 и A подходящим образом, приходим к выводу, что левая часть (2.7) положительна.

Лемма 2.7. Пусть $\alpha > 0$ и β — действительные числа, тогда функция

$$K(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}(1 + C \cos(\beta \ln x))\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

является функцией распределения при всех C таких, что $|C| < (1 + |\beta|/\alpha)^{-1}$.

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Лемма 2.8. Функция распределения $F(x)$ имеет конечный абсолютный момент порядка $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-1} (1 - F(x) + F(-x)) dx < \infty.$$

Доказательство имеется в [7].

Следствие 2.2. Если $F(0) = 0$, то условие

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (1 - F(x)) dx < \infty$$

является необходимым и достаточным для существования у $F(x)$ момента порядка α .

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1.1. Условие $L_F \cong L_G$ в терминах $f(t)$ и $g(t)$ будет эквивалентно равенству

$$f^{k_1}(b_1 t) \cdots f^{k_n}(b_n t) = g^{k_1}(b_1 t) \cdots g^{k_n}(b_n t), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.1)$$

Из этого равенства видно, что $g(t) \neq 0$ при $|t| < \delta$, и поэтому можно определить следующие функции:

$$\zeta(t) = \ln f(t), \quad \xi(t) = \ln g(t), \quad |t| < \delta,$$

где мы выбираем непрерывную ветвь логарифмической функции, принимающую вещественные значения при положительных значениях аргумента.

Из (3.1) вытекает, что

$$k_1 \zeta(b_1 t) + \cdots + k_n \zeta(b_n t) = k_1 \xi(b_1 t) + \cdots + k_n \xi(b_n t), \quad |t| < b_n \delta^{-1}.$$

Далее, обозначая $\Delta(t) = \zeta(t) - \xi(t)$, мы имеем

$$k_1 \Delta(b_1 t) + \cdots + k_n \Delta(b_n t) = 0, \quad |t| < b_n^{-1} \delta. \quad (3.2)$$

Если $n = 1$, то $k_1 \Delta(t) = 0$, $|t| < \delta$, и утверждение теоремы доказано. Пусть $n > 1$, тогда в обозначениях (1.2) уравнение (3.2) переписывается следующим образом:

$$q_1 \Delta(h_1 t) + \cdots + q_{n-1} \Delta(h_{n-1} t) + \Delta(t) = 0, \quad |t| < \delta. \quad (3.3)$$

Определяя $S(u) = \Delta(e^{-u})$, получим из (3.3)

$$q_1 S(u + \gamma_1) + \cdots + q_{n-1} S(u + \gamma_{n-1}) + S(u) = 0, \quad u \in (-\ln \delta, \infty).$$

Из теоремы 2.1 следует, что если $q_1 + \dots + q_{n-1} \leq 1$, то $S(u) = 0$ при $u > -\ln \delta$ и поэтому $f(t) \equiv g(t)$ на $(-\delta, \delta)$.

Теперь обратимся к случаю $q_1 + \dots + q_{n-1} > 1$. Введем снова обозначения

$$\Delta_M(t) = \operatorname{Re} \Delta(t) = \ln |f(t)| - \ln |g(t)|,$$

$$\Delta_A(t) = \operatorname{Im} \Delta(t) = \arg f(t) - \arg g(t).$$

Уравнение (3.3) теперь распадается на два

$$q_1 \Delta_M(h_1 t) + \dots + q_{n-1} \Delta_M(h_{n-1} t) + \Delta_M(t) = 0, \quad |t| < \delta, \quad (3.4)$$

$$q_1 \Delta_A(h_1 t) + \dots + q_{n-1} \Delta_A(h_{n-1} t) + \Delta_A(t) = 0, \quad |t| < \delta.$$

Лемма 3.1. *Либо функция $\Delta_M(t)$ ($\Delta_A(t)$) тождественно равна нулю при $|t| < \delta$, либо существует сходящаяся к нулю последовательность $t_n(s_n)$ такая, что*

$$\Delta_M(t_n) = 0 \quad (\Delta_A(s_n) = 0), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Введем число λ как действительный корень уравнения $q_1 h_1^\lambda + \dots + q_{n-1} h_{n-1}^\lambda = 1$, тогда, определяя при $t > 0$ функции

$$\Delta_M^\lambda = \frac{\Delta_M(t)}{t^\lambda}, \quad \Delta_A^\lambda = \frac{\Delta_A(t)}{t^\lambda}, \quad (3.5)$$

получим

$$p_1 \Delta_M^\lambda(h_1 t) + \dots + p_{n-1} \Delta_M^\lambda(h_{n-1} t) + \Delta_M^\lambda(t) = 0, \quad 0 < t < \delta, \quad (3.6)$$

$$p_1 \Delta_A^\lambda(h_1 t) + \dots + p_{n-1} \Delta_A^\lambda(h_{n-1} t) + \Delta_A^\lambda(t) = 0, \quad 0 < t < \delta, \quad (3.7)$$

где $\sum_{k=1}^{n-1} p_k = 1$. Применим к левым частям (3.6) и (3.7) теорему о среднем, тогда

$$\Delta_M^\lambda(h_M(t)t) + \Delta_M^\lambda(t) = 0, \quad \Delta_A^\lambda(h_A(t)t) + \Delta_A^\lambda(t) = 0, \quad t \in (0, \delta),$$

где $h_1 \leq h_A(t) \leq h_{n-1}$ и $h_1 \leq h_M(t) \leq h_{n-1}$. Таким образом, для любого $t > 0$ существуют две последовательности $a_k = a_k(t)$ и $b_k = b_k(t)$ такие, что

$$h_1^k \leq a_k(t) \leq h_{n-1}^k, \quad h_1^k \leq b_k(t) \leq h_{n-1}^k$$

и

$$\Delta_M^\lambda(a_k(t)t) = (-1)^k \Delta_M^\lambda(t), \quad \Delta_A^\lambda(b_k(t)t) = (-1)^k \Delta_A^\lambda(t), \quad t \in (0, \delta),$$

при $k \in \mathbf{N}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что если $\Delta_A(t)$ и $\Delta_M(t)$ не равны тождественно нулю, то существуют последовательности $t_k \rightarrow 0$ и $s_k \rightarrow 0$ такие, что $\Delta_M^\lambda(t_k) = 0$, $\Delta_A^\lambda(s_k) = 0$, $k \in \mathbf{N}$. Вспоминая теперь

определение $\Delta_M^\lambda(t)$ и $\Delta_A^\lambda(t)$ и замечая, что $\Delta_M(0) = \Delta_A(0) = 0$, получим утверждение леммы.

Из леммы 3.1 следует, что либо $|f(t)| = |g(t)|$ при $|t| < \delta$, либо существует последовательность t_n , стремящаяся к нулю, такая, что $|f(t_n)| = |g(t_n)|$ при всех n . Во втором случае рассмотрим симметричные характеристические функции $\varphi(t) = |f(t)|^2$ и $\psi(t) = |g(t)|^2$, соответствующие функциям распределения $F(x) * (1 - F(-x - 0))$ и $G(x) * (1 - G(-x - 0))$. Согласно лемме 2.1, эти распределения обладают моментами порядка α . Представим число α в виде $2k + \lambda$, где $0 < \lambda < 2$, тогда лемма 2.2 дает нам

$$\varphi^{(l)}(0) = \psi^{(l)}(0), \quad l = 0, \dots, 2k. \quad (3.8)$$

Далее,

$$\frac{\Delta_M(t)}{2} = \ln \varphi(t) - \ln \psi(t) = \ln \left(1 + \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{\psi(t)} \right).$$

В силу непрерывности $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, мы можем выбрать такое число $\delta > \delta_0 > 0$, что

$$\left| \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{\psi(t)} \right| < \frac{1}{4}, \quad \psi(t) > \frac{2}{3}$$

при $|t| < \delta_0$. Используя неравенство $\frac{2}{3}|x| \leq |\ln(1 - x)|$, $|x| < \frac{1}{4}$, получим при $|t| < \delta_0$

$$|\Delta_M(t)| \leq \frac{4}{3} \left| \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{\psi(t)} \right| \leq 2|\varphi(t) - \psi(t)|. \quad (3.9)$$

Разлагая функцию $\varphi(t) - \psi(t)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и учитывая (3.8), имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \psi(t) &= \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \varphi^{(2k)}(t)(t-u)^{2k-1} du \\ &\quad - \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \psi^{(2k)}(t)(t-u)^{2k-1} du. \end{aligned}$$

Так как $\varphi^{(2k)}(0) = \psi^{(2k)}(0)$, $\varphi^{(2k)}(0) > \varphi^{(2k)}(t)$ и $\psi^{(2k)}(0) > \psi^{(2k)}(t)$, то

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t (\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(t)) (t-u)^{2k-1} du \\ &\quad + \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t (\psi^{(2k)}(0) - \psi^{(2k)}(t)) (t-u)^{2k-1} du. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Наша ближайшая цель — доказать, что интеграл

$$\int_0^{\delta_0} t^{-\alpha-1} |\Delta_M(t)| dt \quad (3.11)$$

сходится. Прежде всего, в силу (3.9) и (3.10) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_0} t^{-\alpha-1} |\Delta_M(t)| dt \\ & \leq \frac{2}{(2k-1)!} \int_0^{\delta_0} t^{\alpha-1} \int_0^t \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du dt \\ & \quad + \frac{2}{(2k-1)!} \int_0^{\delta_0} t^{-\alpha-1} \int_0^t \left(\psi^{(2k)}(0) - \psi^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, нам достаточно доказать сходимость двух интегралов в правой части (3.12). Докажем это, например, для первого из них. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_0} t^{-\alpha-1} \int_0^t \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du dt \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{2k-1} C_{2k-1}^l \int_0^{\delta_0} t^{l-\alpha-1} \int_0^t u^{2k-1-l} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(u) \right) du dt \\ & = \sum_{l=0}^{2k-1} C_{2k-1}^l \left(\frac{t^{l-\alpha}}{l-\alpha} \int_0^t u^{2k-1-l} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(u) \right) du \right) \Big|_0^{\delta_0} \\ & \quad - \frac{1}{l-\alpha} \int_0^{\delta_0} t^{-1-\lambda} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Так как распределение, соответствующее $\varphi(t)$, обладает моментом порядка α и $\varphi(t)$ действительна, то по лемме 2.4

$$\int_0^t u^{-1-\lambda} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(u) \right) du < \infty.$$

По этой же причине

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} t^{l-\alpha} \int_0^t u^{2k-1-l} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(u) \right) du \\ & \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t u^{-1-\lambda} \left(\varphi^{(2k)}(0) - \varphi^{(2k)}(u) \right) du = 0. \end{aligned}$$

Доказательство конечности интеграла в правой части (3.12), содержащего $\psi(t)$, проводится аналогично. Таким образом, интеграл (3.11) сходится, а значит,

$$\int_0^{\delta} t^{-\alpha-1} |\Delta_M(t)| dt < \infty. \quad (3.13)$$

Определим функцию $S_M(u) = \Delta_M(e^{-u})$ и перепишем (3.4) в виде

$$q_1 S_M(u + \gamma_1) + \dots + q_{n-1} S_M(u + \gamma_{n-1}) + S_M(u) = 0, \quad u \in (-\ln \delta, \infty),$$

где $\gamma_i = -\ln h_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать далее $\delta = 1$.

Из (3.13) следует, что $\int_0^\infty |S_M(u)| e^{au} du < \infty$, и, используя теорему 2.1, приходим к выводу, что $S_M(u) \equiv 0$, $u > -\ln \delta$, откуда, в свою очередь, $\Delta_M(t) \equiv 0$, т.е. $|f(t)|^2 = |g(t)|^2$ при $t \in [0, \delta)$.

Из леммы 3.1 снова выводим, что либо $\arg f(t) \equiv \arg g(t)$ на $(-\delta, \delta)$, либо существует последовательность s_n , стремящаяся к нулю и такая, что $\arg f(s_n) = \arg g(s_n)$ при всех n . Так как по предположению $|f(t)|$ и $|g(t)|$ не обращаются в нуль при $|t| < \delta$ и по доказанному равны там тождественно, то во втором случае

$$f(s_n) = |f(s_n)| e^{i \arg f(s_n)} = |g(s_n)| e^{i \arg g(s_n)} = g(s_n) \quad (3.14)$$

для достаточно больших натуральных n . Из леммы 2.2 следует, что $f^{(l)}(0) = g^{(l)}(0)$, $l = 0, \dots, 2k$.

Выберем такое $\delta > \delta_1 > 0$, что

$$|f(t) - g(t)| < \frac{1}{4}, \quad |g(t)| > \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

при $|t| < \delta_1$. Разлагая функцию $\ln x$ в ряд Тейлора, можем написать

$$\Delta(t) = f(t) - g(t) + \frac{1 - g(t)}{g(t)} (f(t) - g(t)) - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(g(t) - f(t))^j}{j g^j(t)}. \quad (3.16)$$

Неравенство Коши–Буняковского дает нам

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} \left| \frac{1 - g(t)}{g(t)} \frac{(f(t) - g(t))}{t^{2k}} \right| dt \\ & < 2 \left(\int_0^{\delta} t^{-\lambda-1} |1 - g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\delta} t^{-\lambda-1} \left(\frac{f(t) - g(t)}{t^{2k}} \right)^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В силу леммы 2.3

$$\begin{aligned} |1 - g(t)|^2 &= (1 - \operatorname{Re} g(t))^2 + (\operatorname{Im} g(t))^2 \leq (1 - \operatorname{Re} g(t))^2 + 2(1 - \operatorname{Re} g(t)) \\ &\leq 3(1 - \operatorname{Re} g(t)), \end{aligned}$$

и поэтому по лемме 2.4 (следует учесть, что распределение $G(x)$ обладает моментом порядка $2k + \lambda$)

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} |1 - g(t)|^2 dt \leq 3 \int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} (1 - \operatorname{Re} g(t)) dt < \infty. \quad (3.18)$$

Далее,

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= -\frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left(f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du \\ &\quad + \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left(g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du, \end{aligned}$$

и отсюда вытекает оценка

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)|^2 &\leq \frac{2t}{(2k-1)!} \int_0^t |f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(t)|^2 (t-u)^{4k-2} du \\ &\quad + \frac{2t}{(2k-)!} \int_0^t |g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(t)|^2 (t-u)^{4k-2} du. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Опять воспользуемся первым неравенством леммы 2.3, с учетом того, что $f^{(2k)}(t)/f^{(2k)}(0)$ является характеристической функцией:

$$\begin{aligned} |f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(t)|^2 &= (f^{(2k)}(0))^2 \left| 1 - \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right|^2 \\ &= (f^{(2k)}(0))^2 \left(1 - \operatorname{Re} \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right)^2 + (f^{(2k)}(0))^2 \left(\operatorname{Im} \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right)^2 \\ &\leq 3(f^{(2k)}(0))^2 \left(1 - \operatorname{Re} \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогично

$$|g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(t)|^2 \leq 3(g^{(2k)}(0))^2 \left(1 - \operatorname{Re} \frac{g^{(2k)}(t)}{g^{(2k)}(0)} \right). \quad (3.21)$$

Согласно лемме 2.4,

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_1} t^{-1-\lambda} \left(1 - \operatorname{Re} \frac{f^{(2k)}(t)}{f^{(2k)}(0)} \right) dt &< \infty, \\ \int_0^{\delta_1} t^{-1-\lambda} \left(1 - \operatorname{Re} \frac{g^{(2k)}(t)}{g^{(2k)}(0)} \right) dt &< \infty. \end{aligned}$$

Объединяя последние неравенства с (3.19), (3.20) и (3.21), нетрудно вывести (аналогично тому, как это делалось при выводе (3.13)), что

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t^{2k}} \right|^2 dt < \infty. \quad (3.22)$$

Далее, в силу (3.15)

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} \left| \frac{f(t) - g(t)}{g(t)} \right|^j dt \leq \frac{4}{2^{j-2}} \int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} |f(t) - g(t)|^2 dt,$$

и поэтому, используя (3.22), получим

$$\left| \int_0^{\delta_1} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(g(t) - f(t))^j}{j g^j(t)} dt \right| \leq C \int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} |f(t) - g(t)|^2 dt < \infty.$$

Обозначая теперь

$$\tilde{\Delta}(t) = \frac{\Delta(t)}{t^{2k}}, \quad 0 < |t| < \delta,$$

имеем из последнего неравенства и неравенств (3.16)–(3.18), (3.22)

$$\tilde{\Delta}(t) = \frac{f(t) - g(t)}{t^{2k}} + R(t), \quad 0 < |t| < \delta_1,$$

где

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} |R(t)| dt < \infty.$$

В силу этого конечность интеграла

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} \left| \tilde{\Delta}(at) + \tilde{\Delta}(bt) + \tilde{\Delta}(-(a+b)t) \right| dt$$

для любых $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ эквивалентна конечности интеграла

$$\int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \left| \frac{f(at) - g(at)}{a^{2k}} + \frac{f(bt) - g(bt)}{b^{2k}} + \frac{\overline{f((a+b)t)} - \overline{g((a+b)t)}}{(a+b)^{2k}} \right| dt,$$

который, в свою очередь, не превосходит суммы двух

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left| f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(at) + f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(bt) \right. \\ & \quad \left. + f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(-(a+b)t) \right| (t-u)^{2k-1} du dt \\ & + \int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left| g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(at) + g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(bt) \right. \\ & \quad \left. + g^{(2k)}(0) - g^{(2k)}(-(a+b)t) \right| (t-u)^{2k-1} du dt. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Докажем, что оба они конечны. Имеем, например, для первого

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left(f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(at) + f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(bt) \right. \\ & \quad \left. + f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(-(a+b)t) \right) (t-u)^{2k-1} du dt \\ & + \int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^t \left| \operatorname{Im} f^{(2k)}(at) + \operatorname{Im} f^{(2k)}(bt) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{Im} f^{(2k)}(-(a+b)t) \right| (t-u)^{2k-1} du dt. \end{aligned}$$

Лемма 2.3, будучи примененной к характеристической функции $f^{(2k)}(t)/f^{(2k)}(0)$, дает нам

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{Im} f^{(2k)}(at) + \operatorname{Im} f^{(2k)}(bt) + \operatorname{Im} f^{(2k)}(-(a+b)t) \right| \\ & \leq f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(at) + f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(bt) \\ & \quad + f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(-(a+b)t). \end{aligned}$$

Теперь конечность первого интеграла в (3.23) следует из конечности интеграла

$$\int_0^{\delta_1} t^{-2k-\lambda-1} \int_0^t \left(f^{(2k)}(0) - \operatorname{Re} f^{(2k)}(t) \right) (t-u)^{2k-1} du dt.$$

Конечность второго интеграла в (3.23) доказывается аналогично. Таким образом, доказано, что

$$\int_0^{\delta_1} t^{-\lambda-1} \left| \tilde{\Delta}(at) + \tilde{\Delta}(bt) + \tilde{\Delta}(-(a+b)t) \right| dt < \infty. \quad (3.24)$$

Далее, действительнoзначная функция (следует заметить, что по доказанному $\operatorname{Re} \tilde{\Delta}(t) = 0$)

$$N(t) = -i \left[\tilde{\Delta}(at) + \tilde{\Delta}(bt) + \tilde{\Delta}(-(a+b)t) \right]$$

удовлетворяет уравнению

$$q_1 h_1^{2k} N(h_1 t) + \dots + q_{n-1} h_{n-1}^{2k} N(h_{n-1} t) + N(t) = 0, \quad |t| < \delta,$$

для любых $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$. Заметим также, что $\lambda = \max\{\operatorname{Re} z: \tilde{\tau}(z) = 0\}$, где $\tilde{\tau}(z) = 1 + q_1 h_1^{2k+z} + \dots + q_{n-1} h_{n-1}^{2k+z}$. Вводя функцию $\tilde{S}(u) = N(e^{-u})$, мы видим, что, во-первых, $\tilde{S}(u)$ удовлетворяет уравнению

$$q_1 \tilde{S}(u + 2k\gamma_1) + \dots + q_{n-1} \tilde{S}(u + 2k\gamma_{n-1}) + \tilde{S}(u) = 0, \quad u \in (-\ln \delta, \infty),$$

а во-вторых (следует из (3.24)), $\int_0^\infty e^{\lambda u} |\tilde{S}(u)| du < \infty$. Применяя теперь теорему 2.1, получаем, что $\tilde{S}(u) \equiv 0$ и поэтому $N(t) = 0$ при $|t| < \delta$. Таким образом,

$$\tilde{\Delta}(at) + \tilde{\Delta}(bt) + \tilde{\Delta}(-(a+b)t) = 0, \quad 0 < |t| < \delta, \quad 0 < a, b < 1,$$

и поэтому $\tilde{\Delta}(t) \equiv ct$, $c \in \mathbf{C}$, т.е. $\Delta(t) \equiv ct^{2k+1}$ на $(-\delta, \delta)$, но из (3.14) следует, что $c = 0$.

Рассмотрим теперь следующие две функции:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \exp \left[-|t|^\mu - A|t|^\alpha \left(1 + B_1 e^{i(t/|t|)\beta \ln |t|} + D \ln^m |t| \right) \right], \\ g_0(t) &= \exp \left[-|t|^\mu - A|t|^\alpha \left(1 - B_2 e^{i(t/|t|)\beta \ln |t|} + D \ln^m |t| \right) \right], \end{aligned}$$

где $z = \alpha + i\beta$ — один из корней функции $\tau(z)$ и μ выбирается следующим образом: если $\alpha \leq 1$, то полагаем $\mu = \alpha$; если же $\alpha \geq 2$, то $\mu = 2$. Согласно лемме 2.6, при подходящем выборе A, D и натурального $m \leq 2$ эти две функции будут характеристическими для любых достаточно малых B_1, B_2 , причем если $B_1 \neq B_2$, то эти функции не равны тождественно ни на одном интервале, содержащем точку 0. Нетрудно показать также, что при любом $\varepsilon > 0$ и конечном $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\delta t^{-\lambda-1+\varepsilon} \left(1 - \operatorname{Re} \frac{f_0^{(2k)}(t)}{f_0^{(2k)}(0)} \right) dt &< \infty, \\ \int_0^\delta t^{-\lambda-1+\varepsilon} \left(1 - \operatorname{Re} \frac{g_0^{(2k)}(t)}{g_0^{(2k)}(0)} \right) dt &< \infty. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно лемме 1.4, соответствующие распределения имеют моменты порядка $\alpha - \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \alpha$.

Доказательство теоремы 1.2. Условие $M_F \cong M_G$ эквивалентно равенству

$$F^{k_1}(b_1x) \cdots F^{k_n}(b_nx) = G^{k_1}(b_1x) \cdots G^{k_n}(b_nx), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.25)$$

Обозначим

$$A = \sup \{x \in \mathbf{R}: F(x) = 0\}. \quad (3.26)$$

Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что A — точка непрерывности для $F(x)$, тогда из равенства (3.25) видно, что $G(x) \neq 0$ при $x > A$. Так как $A > 0$ и конечно, то, беря $x = A/b_1$, получим снова из (3.25), что $G(A-0) = G(A+0) = 0$. Таким образом, $G(x) = F(x) = 0$, $x \leq A$. При $x > A$ можем определить следующие функции: $\zeta(x) = -\ln F(x)$, $\xi(x) = -\ln G(x)$, из мы выбираем непрерывную ветвь логарифмической функции, принимающую вещественные значения при положительных значениях аргумента.

Из (3.25) вытекает, что

$$k_1\zeta(b_1x) + \cdots + k_n\zeta(b_nx) = k_1\xi(b_1x) + \cdots + k_n\xi(b_nx), \quad x > b_1^{-1}A.$$

Далее, обозначая $\Delta(x) = \zeta(x) - \xi(x)$, мы имеем

$$q_2\Delta(h_2x) + \cdots + q_n\Delta(h_nx) + \Delta(x) = 0, \quad x > A. \quad (3.27)$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать далее, что $A < 1$. Определим при $u > 0$ функцию $S(u) = \Delta(e^u)$ и перепишем (3.27) в виде

$$q_2S(u + \gamma_2) + \cdots + q_nS(u + \gamma_n) + S(u) = 0, \quad u \in (0, \infty),$$

где $\gamma_i = \ln h_i > 0$, $i = 2, \dots, n$. Если $q_1 + \cdots + q_{n-1} \leq 1$, то из теоремы 2.1 сразу получаем, что $S(u) = 0$ при $u > 0$ и поэтому $F(x) \equiv G(x)$ на $(1, \infty)$.

Теперь обратимся к случаю $q_1 + \cdots + q_{n-1} > 1$. Так как $F(x)$ обладает моментом порядка $\alpha_1 > 0$, то из леммы 2.8 следует

$$-\int_1^\infty u^{\alpha_1-1} \ln F(u) du < \int_1^\infty u^{\alpha_1-1} \frac{1-F(u)}{F(u)} du < \infty.$$

Отсюда и из (3.27) нетрудно вывести, что для любого $R > 0$

$$\begin{aligned} q_2 h_2^{\alpha_1} \int_{h_2}^{h_2 R} u^{\alpha_1-1} \xi(u) du + \cdots + q_n h_n^{\alpha_1} \int_{h_n}^{h_n R} u^{\alpha_1-1} \xi(u) du \\ + \int_1^R u^{\alpha_1-1} \xi(u) du < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $\int_1^\infty u^{\alpha_1-1} \xi(u) du < \infty$. Таким образом,

$$\int_1^\infty u^{\alpha_1-1} |\Delta(u)| du < \int_1^\infty u^{\alpha_1-1} \xi(u) du + \int_1^\infty u^{\alpha_1-1} \zeta(u) du < \infty$$

и поэтому $\int_0^\infty |S(u)|e^{\alpha_1 u} du < \infty$. Опять, используя теорему 2.1, получаем $S(u) = 0$, $u > 0$.

Докажем теперь, что $\Delta(x) = 0$ при $x \in (A, 1)$. Рассмотрим основное уравнение (3.27), которое имеет место при $x > A$. Беря x из $[h_2^{-1}, \infty) \cap (A, 1)$, получим, что $\Delta(x) = 0$. Повторяя этот процесс k раз, приходим к выводу, что $\Delta(x) = 0$, $x \in [h_2^{-k}, \infty) \cap (A, 1)$. Осталось вспомнить, что $h_2 > 1$. Рассмотрим теперь при $x > 0$ две функции

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \exp \{ -x^{-\alpha_1} (1 + C_1 \cos(\beta \ln x)) \}, \\ G_0(x) &= \exp \{ -x^{-\alpha_1} (1 + C_2 \cos(\beta \ln x)) \}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1 + i\beta$ — один из корней функции $\tau_1(z)$. Согласно лемме 2.7, эти две функции являются функциями распределения на $(0, \infty)$ при $\max(|C_1|, |C_2|) < 1 + |\beta|/\alpha$, причем они различны, если $C_1 \neq C_2$. Из теоремы 2.1 нетрудно вывести, что $F_0(x)$ и $G_0(x)$ удовлетворяют уравнению (3.27), т.е. распределения статистики M , соответствующие им, совпадают. Далее, так как функции $x^{\alpha_1 - \delta - 1}(1 - F_0(x))$ и $x^{\alpha_1 - \delta - 1}(1 - G_0(x))$ интегрируемы на $(0, \infty)$ при $\alpha_1 > \delta > 0$, то, согласно следствию 2.2, $F_0(x)$ и $G_0(x)$ обладают моментами порядка $\alpha_1 - \delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беломестный Д. В. К вопросу о восстановлении распределения слагаемых по распределению суммы. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, № 2, с. 366–370.
2. Крейн М. Г. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 1, с. 17–21.
3. Johnson N L., Kotz S. Characterization of an absolutely continuous distribution by the distribution of any order statistics. — Indian J. Math., 1990, v. 32, № 2, p. 193–194.
4. Kawata T. Fourier Analysis in Probability Theory. New York–London: Academic Press, 1972, 668 p.
5. Линник Ю. В. К вопросу о нахождении генерального распределения по распределению статистики. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 4, с. 466–478.
6. Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии. I, II. — Укр. матем. журн., 1953, т. 5, № 2, № 3, с. 207–243; 247–290.
7. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
8. Прохоров А. В., Ушаков Н. Г. О задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, № 3, с. 449–462.
9. Ushakov N. G. Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999, 355 p.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
11. Belomestnyi D. V. On the problem of characterizing the distribution of random variables by the distribution of their sum. — J. Math. Sci. (New York), 2002, v. 111, № 3, p. 3498–3504.

Поступила в редакцию
19.IV.2001