Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, С. А. Клоков, О субэкспоненциальной скорости перемешивания для марковских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 21–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:20:45

© 2004 г.

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*, КЛОКОВ С. А.**

О СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ
ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Памяти В. В. Калашникова

Установлены близкие к оптимальным субэкспоненциальные оценки перемешивания и скорости сходимости к инвариантной мере для однородных марковских процессов с непрерывным и дискретным временем.

Ключевые слова и фразы: марковский процесс, перемешивание, сходимость к равновесию.

1. Введение. В работе изучены субэкспоненциальные оценки для скорости β -перемешивания и скорости сходимости к инвариантной мере для двух классов марковских процессов с непрерывным и дискретным временем.

Первый из них является классом диффузионных процессов, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$,

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

где $b(x) = (b_1(x), \dots, b_d(x))^*$ — борелевская d -мерная ограниченная функция, $W_t = (W_{t,1}, \dots, W_{t,l})^*$ — l -мерный винеровский процесс с $l \geq d$, а ограниченная матричная функция размера $d \times l$ невырождена, т.е. (с $\xi \in \mathbf{R}^d$)

$$\inf_x \inf_{|\xi|=1} \xi^* \sigma \sigma^*(x) \xi > 0. \quad (2)$$

Этот класс будет рассматриваться детально. Предполагается, что процесс X_t — это слабое решение уравнения (1), которое единственно по распределению и является однородным строго марковским процессом.

* School of Mathematics, University of Leeds, Woodhouse Lane, LS2 9JT, Leeds, UK; Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 127994 Москва, Россия; e-mail: veretenn@maths.leeds.ac.uk; veretenn@iitp.ru

** Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: klokov@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа поддержана грантами EPSRC-GR/R40746/01 для обоих авторов и грантами NFGRF 2301863 (University of Kansas), INTAS-99-0590 и РФФИ-00-01-22000 для первого автора.

Есть несколько хорошо известных случаев, где это свойство выполнено (напомним, что диффузия невырождена): (1) матричная функция $\sigma\sigma^*$ непрерывна; (2) $d = 1$. В вырожденном случае также имеется несколько возможностей, когда это свойство выполняется, но здесь мы их не рассматриваем.

Второй класс включает в себя марковские нелинейные авторегрессионные процессы вида

$$X_{n+1} = g(X_n) + V_{n+1},$$

где $g: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ — борелевская функция, (V_n) — мартингал-разность. Для этого класса мы лишь формулируем основной результат, который выглядит весьма похожим на результат для непрерывного времени.

З а м е ч а н и е 1. В 2000 г. М. Н. Малышкин рассмотрел описанную выше модель с непрерывным временем. Позже оказалось, что некоторые теоремы в [10] о скорости субэкспоненциальной сходимости и β -перемешивания дают неоптимальные оценки. Данная статья написана с целью улучшения результатов работы [10] путем применения лучших квазифункций Ляпунова. Выигрыш оказывается значительным; например, из приводимой ниже теоремы 1 видно, что экспоненциальные скорости (см. [12]) могут быть, не строго говоря, получены путем формального перехода к пределу при $p \rightarrow 0$.

При написании этой работы выяснилось, что вычисления, относящиеся к новым квазифункциям Ляпунова, должны быть переписаны полностью, тогда как другие части доказательств в [10] требуют лишь небольших уточнений. Следовательно, мы могли либо привести эти вычисления и дать ссылки на остальные рассуждения в работе [10], либо дать полные доказательства, даже если они содержат фрагменты из [10], оставшиеся без изменений. Первый способ короче, но вряд ли будет приятен для чтения; в то же время второй способ изложения, который нами и выбран, значительно более удобен для читателя.

Важнейшим этапом развития теории устойчивости и функций Ляпунова для стохастических систем явились работы В. В. Калашникова, см. [4], [5], памяти которого посвящена данная работа.

2. Основной результат для непрерывного времени. Введем некоторые обозначения. Пусть

$$a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x), \quad \Lambda = d^{-1} \sup_x \operatorname{tr} a(x),$$

$$\lambda_+ = \sup_{x \neq 0} \left\langle \frac{a(x)x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle = \sup_{x \neq 0} \frac{x^* a(x) x}{|x|^2}.$$

Заметим, что λ_+ , вообще говоря, не является максимумом собственных чисел матриц $a(x)$, а может оказаться меньше.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\left\langle b(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = \frac{x^* b(x)}{|x|} \leq -\frac{r}{|x|^p}, \quad 0 < p < 1, \quad r > 0, \quad |x| \geq M_0. \quad (3)$$

Здесь значение $p = 0$ соответствует экспоненциальному (см. [12]), а $p = 1$ — полиномиальному β -перемешиванию (см. [16]). Ниже $\mu_t^x = \mathcal{L}(X_t | X_0 = x)$, μ_{inv} — инвариантная мера, var — расстояние по вариации, $\tau = \inf\{t \geq 0: |X_t| \leq M\}$, константа M будет выбрана позже, $\mathcal{F}_A^X = \sigma\{X_t: t \in A\}$ и

$$\beta_t^x = \sup_{s \geq 0} \mathbf{E}_x \var_{\mathcal{F}_{\geq t+s}^X} (\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{\leq s}^X) - \mathbf{P}(B)).$$

Теорема 1. Пусть выполнено (3), $\alpha = 1 - p$ и $\delta = (1 - p)/(1 + p)$.

(а) Предположим, что c_1 достаточно мало, тогда для каждого достаточно большого M существуют $c_0, c_2 > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}_x \exp\{c_1(1 + \tau)^\delta\} \leq c_0 \exp\{c_2|x|^\alpha\}. \quad (4)$$

(б) Предположим, что $k > 0$ достаточно мало, тогда существует $c_0 > 0$ такое, что

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x \exp\{k|X_t|^\alpha\} \leq c_0 \exp\{k|x|^\alpha\}. \quad (5)$$

(с) Для каждого достаточно малого значения $c_3 > 0$ существуют $c_0, c_4 > 0$, и наоборот, для каждого достаточно малого $c_4 > 0$ существуют $c_0, c_3 > 0$ такие, что

$$\text{var}(\mu_t^x - \mu_{\text{inv}}) \leq c_0 \exp\{c_3|x|^\alpha - c_4t^\delta\}, \quad (6)$$

$$\beta_t^x \leq c_0 \exp\{c_3|x|^\alpha - c_4t^\delta\}, \quad (7)$$

$$\bar{\beta}_t := \int \beta_t^x \mu_{\text{inv}}(dx) \leq c_0 \exp\{-c_4t^\delta\}. \quad (8)$$

Для доказательства данного результата используются квазифункции Ляпунова вида $\exp\{k|X_t|^\alpha\}$ и $\exp\{k|X_t|^\alpha + c(1+t)^\delta\}$. Данный термин означает, что стандартное свойство Ляпунова «почти выполнено», т.е. «остаток» в неравенстве Ляпунова, хоть и ненулевой, все же удовлетворяет некоторой оценке, достаточной для доказательства субэкспоненциальной возвратности.

Теорема 1 имеет непосредственное следствие, относящееся к стабилизации однородных параболических уравнений. Рассмотрим задачу Коши в классе непрерывных функций u с полиномиальным ростом по x , которые принадлежат пространству функций Соболева $W_{p,\text{loc}}^{1,2}$ для любого $p > 1$:

$$u_t - \frac{1}{2}(a\nabla_x, \nabla_x)u - (b, \nabla_x)u = 0, \quad u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x),$$

где φ — любая ограниченная (для простоты) непрерывная функция. См. [8] по поводу существования и единственности решений в соболевских классах.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \bar{u} = \int \varphi(x) \mu_{\text{inv}}(dx),$$

этот предел не зависит от x , а скорость сходимости является субэкспоненциальной:

$$|u(t, x) - \bar{u}| \leq \|\varphi\|_C \cdot c_0 \exp\{c_3|x|^{1-p} - c_4 t^\delta\}. \quad (9)$$

В свою очередь теорема 2 может быть использована для аппроксимации решения эллиптической задачи Пуассона

$$Lv = \varphi$$

при дополнительном предположении о «нулевом среднем» $\int \varphi d\mu_{\text{inv}} = 0$ в классе непрерывных функций v с полиномиальным ростом по x , принадлежащих классу функций Соболева $W_{p, \text{loc}}^2$ с любым $p > 1$ и удовлетворяющих условию о «нулевом среднем» $\int v(x) \mu_{\text{inv}}(dx) = 0$; см. [11] по поводу существования и единственности решения при более слабых (полиномиальных) условиях. Используя теорему 1, можно распространить единственность на класс функций с субэкспоненциальным ростом, включая также и функции φ с аналогичными свойствами. Из [11] также известно, что единственное в указанном классе решение обладает представлением

$$v(x) = \int_0^\infty u(t, x) dt.$$

Обозначим $v(T, x) = \int_0^T u(t, x) dt$. Скорость сходимости $v(T, x) - v(x)$ используется в некоторых приложениях (см. [11]).

Теорема 3. В предположениях теоремы 2 справедливы следующие субэкспоненциальные оценки:

$$|v(T, x) - v(x)| \leq \|\varphi\|_C \cdot c_0 \exp\{c_3|x|^{1-p}\} \int_t^\infty \exp\{-c_4 s^\delta\} ds.$$

3. Основной результат для дискретного времени. Рассмотрим однородную марковскую цепь $(X_n, n \geq 0)$ в $\mathbf{R}^d$, допускающую представление

$$X_{n+1} = g(X_n) + V_{n+1}, \quad (10)$$

где g — борелевская функция, а $(V_n, \mathcal{F}_{\leq n}^X)$ — мартингал-разность. В этот класс входят, например, марковские цепи с $V_n = \sigma(X_{n-1}) W_n$, где (W_n) независимы и имеют нулевое среднее.

Предположим, что выполнены следующие условия типа возвратности:

(а) существуют положительные константы R_0, C_0, r и $0 < p < 1$ такие, что

$$|g(x)| \leq \begin{cases} C_0, & |x| \leq R_0, \\ |x| \left(1 - \frac{r}{|x|^{1+p}}\right), & |x| > R_0; \end{cases} \quad (11)$$

(b) существуют такие $K > 0$ и $0 < \alpha \leq 1 - p$, что

$$\sup_n \operatorname{ess\,sup} \mathbf{E}\{e^{k|V_{n+1}|^\alpha} | \mathcal{F}_n\} < \infty, \quad 0 \leq k < K. \quad (12)$$

Условие (11) обеспечивает «притяжение» к шару $\{x: |x| \leq R\}$; параметр p регулирует силу притяжения. Случай $p = 0$ рассмотрен в работах [14], [15], а случай $p = 1$ — в работе [17]; $p = 0$ приводит к экспоненциальному β -перемешиванию, в то время как $p = 1$ обеспечивает полиномиальное перемешивание (в котором важную роль играет постоянная r). Условие (12) влечет существование некоторых субэкспоненциальных моментов у величин X_n . Дополнительные предположения на (X_n) будут сформулированы позднее.

Зафиксируем $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ и положим $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n: X_t \in B\}$. Определим «процесс на B », $X_n^B = X_{\tau_n}$, и обозначим через $P^B(x, dy)$ его переходную функцию.

Будем говорить, что процесс (X_n) удовлетворяет *локальному условию Дёблина*, если для каждого достаточно большого значения R и $B = \{x \in \mathbf{R}^d: |x| \leq R\}$

$$\inf_{x, x' \in B} \int \min \left\{ \frac{P^B(x, dy)}{P^B(x', dy)}, 1 \right\} P^B(x', dy) = \kappa(R) > 0; \quad (13)$$

это условие обеспечивает отсутствие взаимной сингулярности мер в шаре B и вместе с условиями (11), (12) влечет неприводимость. Условие (13) также может быть записано в терминах переходной функции за n шагов. В диффузионном случае предположение о невырожденности σ приводит к тому, что условие (13) выполнено автоматически.

Теорема 4. Пусть цепь Маркова (X_n) удовлетворяет условиям (11)–(13) и $0 < \delta < \alpha/(1 + p)$. Тогда существуют такие числа $c_0, c_1, c_2 > 0$, что для каждого $x = X_0$ справедливы следующие оценки:

$$\operatorname{var}(\mu_n - \mu_{\operatorname{inv}}) \leq c_0 \exp\{c_1|x|^\alpha - c_2n^\delta\}, \quad (14)$$

$$\beta_n^x \leq c_0 \exp\{c_1|x|^\alpha - c_2n^\delta\}, \quad (15)$$

$$\bar{\beta}_n \leq c_0 \exp\{-c_2n^\delta\}. \quad (16)$$

Читатель уже мог заметить схожесть оценок для моделей с дискретным и непрерывным временем. Доказательство теоремы 4 в настоящей статье опущено; это может быть сделано с использованием похожих квазифункций Ляпунова и идей, связанных с разложением по формуле Тейлора, вместо применения формулы Ито.

Результат, аналогичный теореме 2 и касающийся стабилизации, также верен и для дискретного времени. Его формулировка и доказательство аналогичны, и мы оставляем это читателю.

4. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Предположим, что либо $\alpha < 1 - p$ и $k > 0$ произвольны, либо $\alpha = 1 - p$ и $0 < k < 2r/(\alpha\lambda_+)$. Тогда для каждого достаточно большого значения M

$$\sup_t \mathbf{E}_x \exp \{k|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t < \tau) \leq \exp \{k|x|^\alpha\}.$$

Лемма 2. Пусть $\delta = (1 - p)/(1 + p)$, $0 < k' < k < 2r/[(1 - p)\lambda_+]$, а $c > 0$ достаточно мало. Тогда для каждого достаточно большого значения M существуют $C > 0$ и $k < k_1 < 2r/[(1 - p)\lambda_+]$ такие, что

$$\mathbf{E}_x \exp \{c(1 + \tau)^\delta\} \leq C \exp \{k_1|x|^{1-p}\}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}_x \int_0^t \exp \{k'|X_s|^{1-p}\} \mathbf{1}(s < \tau) ds \leq C \exp \{k_1|x|^{1-p}\}. \quad (18)$$

Лемма 3. Пусть $0 < k < 2r/[(1 - p)\lambda_+]$. Тогда существует единственная инвариантная мера μ_{inv} для процесса X_t и

$$\int \exp \{k|x|^{1-p}\} \mu_{\text{inv}}(dx) < \infty.$$

Рассмотрим еще одну независимую копию (Y_t, W'_t) процесса (X_t, W_t) с начальным значением $Y_0 = y, W'_0 = 0$. Определим $\gamma = \inf\{t \geq 0: |X_t| \vee |Y_t| \leq \tilde{M}\}$ для $\tilde{M} > M$. Мы не меняем обозначений для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ и используем двойные нижние индексы для обозначения начальных данных.

Лемма 4. Пусть α и k такие же, как в лемме 1. Тогда для всякого достаточно большого значения $\tilde{M}$ существует такое $C > 0$, что

$$\begin{aligned} \sup_t \mathbf{E}_{x,y} \left(\exp \{k|X_t|^\alpha\} + \exp \{k|Y_t|^\alpha\} \right) \mathbf{1}(t < \gamma) \\ \leq C \left(\exp \{k|x|^\alpha\} + \exp \{k|y|^\alpha\} \right). \end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть $\delta = (1 - p)/(1 + p)$, а $c > 0$ достаточно мало. Тогда для всякого достаточно большого значения $\tilde{M}$ существуют $C > 0$ и $k < 2r/[(1 - p)\lambda_+]$, для которых

$$\mathbf{E}_{x,y} \exp \{c(1 + \gamma)^\delta\} \leq C \left(\exp \{k|x|^{1-p}\} + \exp \{k|y|^{1-p}\} \right).$$

5. Доказательства. Доказательство леммы 1 дано в [10, лемма 2]. Мы приводим здесь доказательство потому, что аналогичные вычисления используются в дальнейшем.

Положим $f(x) = \exp\{k|x|^\alpha\}$, применим формулу Ито к $f(X_t)$ при $t < \tau$ и получим:

$$df(X_t) = f(X_t) \{A(X_t) dt + B(X_t) dW_t\},$$

где

$$A(x) = \frac{k\alpha \langle x, b(x) \rangle}{|x|^{2-\alpha}} + \left(\frac{k^2\alpha^2}{2|x|^{4-2\alpha}} - \frac{k\alpha(2-\alpha)}{2|x|^{4-\alpha}} \right) \langle a(x)x, x \rangle + \frac{k\alpha \operatorname{tr} a(x)}{2|x|^{2-\alpha}},$$

$B(x) = k\alpha x^* \sigma(x)/|x|^{2-\alpha}$. Так как $t < \tau$, нам не нужно определять обе функции в нуле. Для $|x| > M > M_0$, согласно (3), имеем $\langle x, b(x) \rangle \leq -r|x|^{1-p}$. Кроме того, $\text{tr } a(x) \leq \Lambda d$ и $\langle a(x)x, x \rangle \leq \lambda_+|x|^2$. Следовательно,

$$A(x) \leq -\frac{k\alpha r}{|x|^{1+p-\alpha}} + \frac{k^2\alpha^2\lambda_+}{2|x|^{2-2\alpha}} + \frac{k\alpha\Lambda d}{2|x|^{2-\alpha}} =: A_1(x).$$

Идея состоит в получении неположительной оценки для $A_1(X_t)$ при $t < \tau$. Сравнив показатели степеней у $|x|$ в знаменателях этих трех слагаемых, видим, что при больших значениях $|x|$ отрицательная оценка возможна только для $\alpha \leq 1 - p$, а выбор $\alpha = 1 - p$ дает наилучшую оценку:

$$A_1(x) = -\frac{k\alpha r}{|x|^{2p}} + \frac{k^2\alpha^2\lambda_+}{2|x|^{2p}} + \frac{k\alpha\Lambda d}{2|x|^{1+p}}.$$

В предположениях леммы (в обоих случаях) третьим слагаемым в выражении для $A_1(x)$ можно пренебречь и сумма первых двух слагаемых отрицательна, следовательно, $A_1(x) \leq 0$ при достаточно больших значениях $|x|$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x f(X_t) \mathbf{1}(t < \tau) - f(x) &= \mathbf{E}_x \int_0^t f(X_s) A(X_s) \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &\leq \mathbf{E}_x \int_0^t f(X_s) A_1(X_s) \mathbf{1}(s < \tau) ds \leq 0, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство леммы.

Доказательство леммы 2. Обозначим

$$g(t, x) = \exp \{k|x|^\alpha + c(1+t)^\delta\}.$$

В отличие от работы [10], применим формулу Ито к $g(t, X_t)$:

$$dg(t, X_t) = g(t, X_t) \{A(t, X_t) dt + B(t, X_t) dW_t\},$$

где

$$\begin{aligned} A(t, x) &= \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} + \frac{k\alpha \langle x, b(x) \rangle}{|x|^{2-\alpha}} \\ &\quad + \left(\frac{k^2\alpha^2}{2|x|^{4-2\alpha}} - \frac{k\alpha(2-\alpha)}{2|x|^{4-\alpha}} \right) \langle a(x)x, x \rangle + \frac{k\beta \text{tr } a(x)}{2|x|^{2-\alpha}}, \end{aligned}$$

$B(t, x) = k\alpha x^* \sigma(x)/|x|^{2-\alpha}$. Аналогично доказательству леммы 1 для $|x| > M > M_0$ имеем:

$$A(t, x) \leq \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha r}{|x|^{1+p-\alpha}} + \frac{k^2\alpha^2\lambda_+}{2|x|^{2-2\alpha}} + \frac{k\alpha\Lambda d}{2|x|^{2-\alpha}} =: A_1(t, x).$$

Рассуждения из леммы 1 показывают, что наилучшим выбором α является $1 - p$, и в этом случае

$$A_1(t, x) = \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha(r - k\alpha\lambda_+/2)}{|x|^{2p}} + \frac{k\alpha\Lambda d}{2|x|^{1+p}}.$$

Отрицательный член является главным, т.е. для каждого $0 < r' < r - k\alpha\lambda_+/2$, выбирая M достаточно большим, получим:

$$A_1(t, x) \leq \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha r'}{|x|^{2p}} =: A_2(t, x). \quad (19)$$

Таким образом, опустив стандартную процедуру локализации, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x g(t \wedge \tau, X_{t \wedge \tau}) - g(x, 0) &= \mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) A(s, X_s) \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &\leq \mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) A_2(s, X_s) \mathbf{1}(s < \tau) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Глядя на соотношение (19), рассмотрим случайное событие

$$D_s = \left\{ \frac{2c\delta}{(1+s)^{1-\delta}} \leq \frac{k\alpha r'}{|X_s|^{2p}} \right\}$$

и два индикатора: $1 = \mathbf{1}(D_s) + \mathbf{1}(D_s^c)$. Запишем верхнюю оценку:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) \left(-\frac{k\alpha r'}{2|X_s|^{2p}} \right) (1 - \mathbf{1}(D_s^c)) \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &+ \mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) \frac{c\delta}{(1+s)^{1-\delta}} \mathbf{1}(D_s^c) \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &\leq -\mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) \frac{k\alpha r'}{2|X_s|^{2p}} \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &+ 2c\delta \mathbf{E}_x \int_0^t g(s, X_s) \mathbf{1}(D_s^c) \mathbf{1}(s < \tau) ds = -I_1 + 2c\delta I_2 \end{aligned} \quad (21)$$

(знаменатель $(1+s)^{1-\delta} \geq 1$ опущен). Оценим член I_2 сверху. Представляя D_s^c в виде $\{k\alpha r'(1+s)^{1-\delta} < 2c\delta |X_s|^{2p}\}$ и используя неравенство $\mathbf{1}(a < b) \leq \exp(-\varepsilon a^q + \varepsilon b^q)$, $a, b, \varepsilon, q > 0$, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \mathbf{E}_x \int_0^t \exp \{k|X_s|^\alpha + \varepsilon(2c\delta)^q |X_s|^{(2p)q}\} \\ &\times \exp \{c(1+s)^\delta - \varepsilon(k\alpha r')^q (1+s)^{(1-\delta)q}\} \mathbf{1}(s < \tau) ds. \end{aligned}$$

Возьмем $q = \alpha/(2p)$, тогда $\alpha = 2pq$, $\delta = (1-\delta)q$ и

$$I_2 \leq \mathbf{E}_x \int_0^t \exp \{k_1 |X_s|^\alpha - c_1(1+s)^\delta\} \mathbf{1}(s < \tau) ds$$

с $k_1 = k + \varepsilon(2c\delta)^q$ и $-c_1 = c - \varepsilon(k\alpha r')^q$. Выберем ε так, чтобы $k_1 < 2r \times [(1-p)\lambda_+]^{-1}$ и $c_1 > 0$; например, возьмем $\varepsilon = 2c/(k\alpha r')^q$, тогда $c_1 = c > 0$ и $k_1 = k + 2c(2c\delta)^q/(k\alpha r')^q < 2r/[(1-p)\lambda_+]$, если только $c > 0$ достаточно мало. По лемме 1 (с $\alpha = 1-p$)

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp \{k_1 |X_s|^\alpha - c(1+s)^\delta\} \mathbf{1}(s < \tau) ds \\ &\leq \int_0^\infty \left(\sup_t \mathbf{E}_x \exp \{k_1 |X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t < \tau) \right) \exp \{-c(1+s)^\delta\} ds \\ &\leq C_1 \exp \{k_1 |x|^\alpha\} \end{aligned}$$

с $C_1 = \int_0^\infty \exp\{-c(1+s)^\delta\} ds$. Собрвав вместе все оценки, получим из (20) и (21), что

$$I_1 + \mathbf{E}_x \exp\{k|X_{t \wedge \tau}|^\alpha + c(1+t \wedge \tau)^\delta\} \\ \leq \exp\{k|x|^\alpha + c\} + 2c\delta C_1 \exp\{k_1|x|^\alpha\}.$$

Если опустить члены I_1 и $\exp\{k|X_{t \wedge \tau}|^\alpha\} \geq 1$, перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$ и использовать лемму Фату, получим (17). Если же оставить только член I_1 , тогда

$$\mathbf{E}_x \int_0^t \frac{\exp\{k|X_s|^\alpha + c(1+s)^\delta\}}{|X_s|^{2p}} \mathbf{1}(s < \tau) ds \leq C_3 \exp\{k_1|x|^\alpha\}, \quad C_3 > 0,$$

что влечет (18).

Доказательство леммы 3. Рассмотрим две области $U_1 = \{x: |x| \leq M\}$ и $U_2 = \{x: |x| \geq M+1\}$, а также их границы $\Gamma_1 = \partial U_1 = \{x: |x| = M\}$ и $\Gamma_2 = \partial U_2 = \{x: |x| = M+1\}$. Определим последовательность моментов остановки:

$$\tau_0 = 0, \quad \tau'_0 = \inf\{t \geq \tau_0: X_t \in \Gamma_2\}, \quad \tau_1 = \inf\{t \geq \tau'_0: X_t \in \Gamma_1\}, \quad \dots$$

В наших предыдущих обозначениях $\tau_1 = \tau$. Согласно лемме 2, для каждого компактного множества $K \subset U_2$ получим:

$$\sup_{x \in K} \mathbf{E}_x(\tau_1 - \tau'_0) < \infty. \quad (22)$$

В силу предположения (2) о невырожденности диффузии вероятность достижения границы Γ_2 в течение периода времени $\Delta t > 0$ при начальных данных на границе Γ_1 положительна и отделена от нуля равномерно по x . (Например, это может быть показано с использованием проекции траектории X_t на любое направление и замены времени.) Следовательно, строго марковское свойство влечет, что распределение τ'_0 имеет геометрически убывающий хвост и (см., например, [6, §4.3])

$$\sup_{x \in \Gamma_1} \mathbf{E}_x \tau'_0 < \infty. \quad (23)$$

Обозначим $Z_n = X_{\tau'_n}$. Тогда (Z_n) — это марковская цепь со значениями на Γ_2 . Она обладает единственной инвариантной мерой m в силу неравенства Харнака. (Стандартная техника описана, например, в [6, теорема 4.4.1] или [3]; неравенство Харнака для уравнения (1) в общем виде установлено в работе [7].)

Пусть

$$\tau(A) = \int_{\tau_0 \leq t \leq \tau_1} \mathbf{1}(X_t \in A) dt \quad \text{и} \quad \nu(A) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{E}_x \tau(A) m(dx).$$

Так как $\tau(A) \leq \tau_1 - \tau_0$, то соотношения (22) и (23) влекут $\mathbf{E}_x \tau(A) < \infty$, а значит, $\nu(\mathbf{R}^1) < \infty$. Применим представление Харриса–Хасьминского [6, теорема 4.4.1] для инвариантной меры μ_{inv} :

$$\int f(y) \mu_{\text{inv}}(dy) = \frac{1}{\nu(\mathbf{R}^d)} \int_{\Gamma_1} m(dx) \mathbf{E}_x \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_t) dt,$$

где f — любая неотрицательная функция. Таким образом, согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \int_{\tau_0}^{\tau_1} \exp\{k|X_t|^{1-p}\} dt \\ & \leq \mathbf{E}_x \int_{\tau_0}^{\tau'_0} \exp\{k|X_t|^{1-p}\} dt + \mathbf{E}_x \int_{\tau'_0}^{\tau_1} \exp\{k|X_t|^{1-p}\} dt \\ & \leq C \mathbf{E}_x \tau'_0 + C \int_{\tau'_0}^{\tau_1} \exp\{k|X_t|^{1-p}\} dt < \infty. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4 похоже на доказательство леммы 1. Пусть $f(x) \in C^2(\mathbf{R}^d)$ — произвольная функция такая, что $f(x) = k|x|^\alpha$ при $|x| \geq 1$. Единственная причина, почему мы переопределяем субэкспоненту при $|x| \leq 1$, заключается в том, чтобы получить гладкость и ограниченность производных первого и второго порядков, а также оценку $\exp\{f(x)\} \leq K \exp\{k|x|^\alpha\}$ с некоторым $K > 0$.

Применим формулу Ито к $\exp\{f(X_t)\} + \exp\{f(Y_t)\}$ при $t < \gamma$. Как и в лемме 1, нам нужна неположительная оценка той части стохастического дифференциала, которая содержит dt ; она равна $\exp\{f(X_t)\} A(X_t) dt + \exp\{f(Y_t)\} A(Y_t) dt$, где

$$A(X_t) = \nabla f(X_t) b(X_t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(H^f a)(X_t)$$

и H^f — матрица вторых производных функции f . Поскольку $t < \gamma$, то либо $|X_t|$, либо $|Y_t|$ больше, чем $\widetilde{M}$. Предположим, что это верно для $|X_t|$. Выражение для $A(X_t)$ может быть оценено сверху точно таким же образом, как в лемме 1:

$$-\frac{k\alpha r}{|X_t|^{1+p-\alpha}} + \frac{k^2\alpha^2\lambda_+}{2|X_t|^{2-2\alpha}} + \frac{k\alpha\Lambda d}{2|X_t|^{2-\alpha}}.$$

Это выражение отрицательно и убывает к $-\infty$ при возрастании $|X_t|$. Если $|Y_t| \geq M$, мы получим по лемме 1 похожую отрицательную оценку и для $A(Y_t)$. Если же $|Y_t| < M$, то $A(Y_t)$ ограничено. В любом случае, выбрав значение $\widetilde{M}$ достаточно большим, можно скомпенсировать вклад $A(Y_t)$ и получить отрицательную оценку для суммы $A(X_t) + A(Y_t)$. В результате имеем:

$$\mathbf{E}_{x,y}(f(X_t) + f(Y_t)) \mathbf{1}(t < \gamma) \leq f(x) + f(y),$$

что влечет неравенство, требуемое в лемме.

Доказательство леммы 5. Обозначим

$$g(t, x) = \exp\{f(x) + c(1+t)^\delta\},$$

где функция $f(x)$ была введена в доказательстве леммы 4, и положим $\alpha = 1 - p$. Применим формулу Ито к $g(t, X_t) + g(t, Y_t)$ при $t < \gamma$. Нас

интересует только та часть стохастического дифференциала, которая содержит dt ; она равна $g(t, X_t) A(t, X_t) dt + g(t, Y_t) A(t, Y_t) dt$, где

$$A(t, x) = \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} + \nabla f(x) b(x) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(H^f a)(x).$$

Как и в лемме 2, при $|x| > M > 1$ мы получим оценку, похожую на (19):

$$A(t, x) \leq \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha r'}{|x|^{2p}}. \quad (24)$$

Для значений $|x| \leq M$ существует такое $K > 0$, что

$$A(t, x) \leq \frac{c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} + K, \quad (25)$$

поскольку $f(x)$, ее производные первого и второго порядков, а также $b(x)$ ограничены.

Если $|x| > M$ и $|y| > M$, то, применив дважды (24), получим:

$$\begin{aligned} g(t, x) A(t, x) + g(t, y) A(t, y) &\leq \exp \left\{ k(|x| \vee |y|)^\alpha + c(1+t)^\delta \right\} \\ &\times \left(\frac{2c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha r'}{(|x| \vee |y|)^{2p}} \right). \end{aligned}$$

Если $|x| > \widetilde{M}$ и $|y| \leq M$, то при каждом $r'' < r'$ значение $\widetilde{M}$ может быть выбрано настолько большим, что

$$-\exp\{k|x|^\alpha\} \frac{k\alpha r'}{|x|^{2p}} + K \exp\{k|y|^\alpha\} \leq -\exp\{k|x|^\alpha\} \frac{k\alpha r''}{|x|^{2p}},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} g(t, x) A(t, x) + g(t, y) A(t, y) &\leq \exp \left\{ k(|x| \vee |y|)^\alpha + c(1+t)^\delta \right\} \\ &\times \left(\frac{2c\delta}{(1+t)^{1-\delta}} - \frac{k\alpha r''}{(|x| \vee |y|)^{2p}} \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Если $|x| \leq M$ и $|y| > \widetilde{M}$, такая же оценка имеет место. Таким образом, для $|x| \vee |y| > \widetilde{M}$ мы всегда имеем (26), что является аналогом (19) с точностью до умножения на g . Продолжая как в лемме 2, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x,y} \exp \{c(1+\gamma)^\delta\} &\leq C_2 \exp \{k_1(|x| \vee |y|)^\alpha\} \\ &\leq C_2 \left(\exp \{k_1|x|^\alpha\} + \exp \{k_1|y|^\alpha\} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, лемма доказана с C_2 и k_1 в качестве C и k соответственно.

Доказательство теоремы 1 разделено на несколько шагов.

1. Утверждение (4) уже доказано в лемме 2.

2. Пусть X_t и X'_t — две независимые копии решений уравнения (1) с независимыми винеровскими процессами W_t и W'_t , определенные на

общем вероятностном пространстве и такие, что $X_0 = x$, а X'_0 имеет инвариантное распределение μ_{inv} . Покажем, что пара (X_t, X'_t) возвратна и можно применять аргументы метода склейки (каплинга). Пусть $s \geq 0$, а $\widetilde{M} > 1$ — число, использующееся в леммах 4 и 5. Определим последовательность моментов останковки: $\gamma_0 = s$, $\gamma_1 = \inf\{t \geq s: |X_t| \vee |X'_t| \leq \widetilde{M}\}$, а для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} T_n &= \inf\{t \geq \gamma_n: |X_t| \vee |X'_t| \geq \widetilde{M} + 1\}, \\ T'_n &= T_n \wedge (\gamma_n + 1), \\ \gamma_{n+1} &= \inf\{t \geq T'_n: |X_t| \vee |Y_t| \leq \widetilde{M}\}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = 1 - p$. Согласно лемме 5,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left\{\exp\{c(\gamma_1 - s)^\delta\} \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}\right\} \\ &\leq C \mathbf{E}\left\{\exp\{k|X_s|^\alpha\} + \exp\{k|X'_s|^\alpha\} \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}\right\}, \\ &\mathbf{E}\left\{\exp\{c(\gamma_{n+1} - T'_n)^\delta\} \mid \mathcal{F}_{\gamma_n}^{X, X'}\right\} \leq 2C \exp\{k(M + 1)^\alpha\} \end{aligned}$$

с некоторыми $C, k > 0$. Рассуждения из доказательства леммы 3 показывают (вообще говоря, с новым значением C), что

$$\mathbf{E}\left\{\exp\{c(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^\delta\} \mid \mathcal{F}_{\gamma_n}^{X, X'}\right\} \leq C, \quad n \geq 1.$$

Строго марковское свойство и неравенство $(\gamma_n - s)^\delta \leq (\gamma_n - \gamma_{n-1})^\delta + \dots + (\gamma_1 - s)^\delta$ влекут оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\exp\{c(\gamma_n - s)^\delta\} \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}\right\} &\leq C^n \mathbf{E}\left\{\exp\{k|X_s|^\alpha\} \right. \\ &\quad \left. + \exp\{k|X'_s|^\alpha\} \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}\right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, для $n(t) = \sup\{n \geq 0: \gamma_n \leq t\}$, $t \geq s$, мы получим, в частности, что

$$\mathbf{P}\{n(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty\} = 1.$$

Процесс (X_t, X'_t) в самом деле возвратен, и можно использовать метод склейки (см. [12]). А именно, возможно определить новый случайный процесс $\widetilde{X}_t$ и момент останковки $L_s \geq s$ на некотором расширении исходного вероятностного пространства такие, что $\widetilde{X}_t$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $\widetilde{X}_0 = x$ и новым винеровским процессом $\widetilde{W}_t$, а также

$$\mathbf{P}\{\widetilde{X}_t = X_t, t \leq L_s - 1\} = \mathbf{P}\{\widetilde{X}_t = X'_t, t \geq L_s\} = 1;$$

вдобавок, найдется такое значение $q \in (0, 1)$, что

$$\sup_{s \geq 0} \text{ess sup } \mathbf{P}(L_s > \gamma_n \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}) \leq q^n. \quad (28)$$

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что процессы X_t и X'_t достаточно регулярно возвращаются в шар $\{x: |x| \leq \widetilde{M}\}$, а когда $t = \gamma_n$, они могут либо быть склеены с некоторой положительной

вероятностью через единичный промежуток времени, либо остаться независимыми.

Применив неравенство каплинга, мы получим для каждого $B \in \mathcal{F}_{\geq t+s}^{X, X'}$:

$$|\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}) - \mu_{\text{inv}}(B)| \leq \mathbf{P}(L_s > t + s \mid \mathcal{F}_s^{X, X'}). \quad (29)$$

Это неравенство при $s = 0$ дает промежуточную оценку расстояния по вариации между μ_t^x и инвариантной мерой μ_{inv} .

3. Докажем утверждение (6). Подставим в (29) значение $s = 0$ и запишем оценку через неравенство Гёльдера с некоторыми $a, b > 1$, $1/a + 1/b = 1$:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mu_t^x - \mu_{\text{inv}}) &\leq \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}\{L_0 > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \mathbf{1}(L_0 > t) \mathbf{1}(\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/a}\{L_0 > \gamma_n\} \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/b}\{\gamma_{n+1} > t\}. \end{aligned}$$

Из соотношения (28) следует, что $\mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/a}\{L_0 > \gamma_n\} \leq q^{n/a}$. Из неравенства Бьенеме–Чебышева, (27) и леммы 3 имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}\{\gamma_{n+1} > t\} &\leq \exp\{-ct^\delta\} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{c\gamma_{n+1}^\delta\} \\ &\leq \exp\{-ct^\delta\} C^{n+1} (\exp\{k|x|^\alpha\} + \mathbf{E}_{\mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X'_0|^\alpha\}) \\ &\leq \exp\{-ct^\delta\} C^{n+1} K \exp\{k|x|^\alpha\}, \quad K > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{var}(\mu_t^x - \mu_{\text{inv}}) \leq (CK)^{1/b} \exp\left\{\frac{k}{b}|x|^\alpha - \frac{c}{b}t^\delta\right\} \sum_{n=0}^{\infty} (q^{1/a}C^{1/b})^n.$$

Взяв значение a близким к единице, добьемся того, что $q^{1/a}C^{1/b} < 1$, ряд сходится и

$$\text{var}(\mu_t^x - \mu_{\text{inv}}) \leq \tilde{C} \exp\left\{\frac{k}{b}|x|^\alpha - \frac{c}{b}t^\delta\right\}, \quad \tilde{C} > 0.$$

Таким образом, мы получили (6) с $c_3 = k/b$, $c_4 = c/b$ и, возможно, новым значением c_0 .

4. Докажем соотношение (5). Рассуждения аналогичны использованным в работе [12] или [16] и адаптированы к субэкспоненциальному случаю. По определению L_0

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \exp\{k|X_t|^\alpha\} &= \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t \geq L_0) \\ &\quad + \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t < L_0) \\ &\leq \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X'_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t \geq L_0) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}) \mathbf{1}(\gamma_n \leq L_0). \end{aligned}$$

По лемме 3

$$\mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X'_t|^\alpha\} \mathbf{1}(t \geq L_0) = \int \exp\{k|x|^\alpha\} \mu_{\text{inv}}(dx) < \infty.$$

Применим снова неравенство Гёльдера с $a, b > 1$, $1/a + 1/b = 1$, $bk < 2r/[(1-p)\lambda_+]$, (28), условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_{\gamma_n}^{X, X'})$ и лемму 4 с $\gamma = \gamma_{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \exp\{k|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}) \mathbf{1}(L_0 > \gamma_n) \\ & \leq \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/a} \{L_0 > \gamma_n\} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/b} \exp\{bk|X_t|^\alpha\} \mathbf{1}(\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}) \\ & \leq Cq^{n/a} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}}^{1/b} \exp\{bk|X_{\gamma_n}|^\alpha\} \leq Cq^{n/a} \exp\{k(|x| \vee |M+1|)^\alpha\}. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n/a} < \infty$, получим (5) с некоторой константой $c_0 > 0$.

5. Наконец, выведем (7) и (8). Пусть $B \in \mathcal{F}_{\geq t+s}^X$. Сравним оба члена разности $\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_s^X) - \mathbf{P}(B)$ (см. определение β_t^x) с $\mu_{\text{inv}}(B)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_s^X) - \mathbf{P}(B)| & \leq |\mathbf{P}(B) - \mu_{\text{inv}}(B)| + |\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_s^X) - \mu_{\text{inv}}(B)| \\ & \leq \mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}} \{L_0 > t\} + \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \mathbf{P}(L_s > t + s | \mathcal{F}_s^{X, X'}). \end{aligned}$$

На шаге 3 мы пришли к оценке $\mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}} \{L_0 > t\} \leq c_0 \exp\{c_3|x|^\alpha - c_6t^\delta\}$. Аналогично, для каждого $s \geq 0$

$$\mathbf{P}_{x, \mu_{\text{inv}}} (L_s > t | \mathcal{F}_s^{X, X'}) \leq c_0 \exp\{c_3|X_s|^\alpha - c_6t^\delta\}.$$

Далее, применение (5) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x, \mu_{\text{inv}}} \mathbf{P}(L_s > t + s | \mathcal{F}_s^{X, X'}) & \leq \mathbf{E}_x (c_0 \exp\{c_3|X_s|^\alpha - c_4t^\delta\}) \\ & \leq c'_0 \exp\{c_3|x|^\alpha - c_4t^\delta\}. \end{aligned}$$

В совокупности все эти оценки приводят к соотношению

$$\beta_t^x \leq (c_0 + c'_0) \exp\{c_3|x|^\alpha - c_4t^\delta\}.$$

Увеличив при необходимости значение c_0 , мы установим справедливость (7).

Неравенство (8) следует из (7) с достаточно малым значением c_3 и леммы 3 после интегрирования по инвариантной мере μ_{inv} . Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно вероятностному представлению решения, имеем:

$$\begin{aligned} \left| u(t, x) - \int \varphi(y) \mu_{\text{inv}}(dy) \right| & = \left| \int \varphi(x) (\mu_t^x(dy) - \mu_{\text{inv}}(dy)) \right| \\ & \leq \|\varphi\|_C \cdot \text{var}(\mu_t^x - \mu_{\text{inv}}) \leq \|\varphi\|_C \cdot c_0 \exp\{c_3|x|^\alpha - c_4t^\delta\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3 следует немедленно из оценки (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ganidis H., Roynette B., Simonot F.* Convergence rate of some semi-groups to their invariant probability. — *Stochastic Process. Appl.*, 1999, v. 79, № 2, p. 243–263.
2. *Guillin A.* Moderate deviations of inhomogeneous functionals of Markov processes and application to averaging. — *Stochastic Process. Appl.*, 2001, v. 92, № 2, p. 287–313.
3. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 604 с.
4. *Калашников В. В.* Свойство γ -возвратности для марковских последовательностей. — *Докл. АН СССР*, 1973, т. 213, № 6, с. 1243–1246.
5. *Калашников В. В.* Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М.: Наука, 1978, 247 с.
6. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 367 с.
7. *Крылов Н. В., Сафонов М. В.* Об одном свойстве решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. — *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1980, т. 44, № 1, с. 161–175.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
9. *Lamperti J.* Criteria for stochastic processes. II. Passage-time moments. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1963, v. 7, p. 127–145.
10. *Малышкин М. Н.* Субэкспоненциальные оценки скорости сходимости к инвариантной мере для стохастических дифференциальных уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 3, с. 489–504.
11. *Pardoux E., Veretennikov A. Yu.* On the Poisson equation and diffusion approximation. I. — *Ann. Probab.*, 2001, v. 29, № 3, p. 1061–1085.
12. *Веретенников А. Ю.* Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
13. *Веретенников А. Ю.* О скорости перемешивания и принципе усреднения для гипоеллиптических стохастических дифференциальных уравнений. — *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1988, т. 52, № 5, с. 899–908.
14. *Веретенников А. Ю., Гулинский О. В.* О скорости перемешивания и принципе усреднения для стохастических рекуррентных процедур. — *Автомат. и телемех.*, 1990, № 6, с. 68–78.
15. *Веретенников А. Ю.* Об оценках скорости перемешивания для марковских процессов. — *Литов. матем. сб.*, 1991, т. 31, № 1, с. 40–49.
16. *Veretennikov A. Yu.* On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 70, № 1, p. 115–127.
17. *Веретенников А. Ю.* О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.

Поступила в редакцию
5.VI.2003