Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Ш. Яамада, О концепции случайной последовательности относительно p -адических вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 54–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:55:43

© 2004 г.

ХРЕННИКОВ А. Ю.*, ЯАМАДА Ш.**

О КОНЦЕПЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ОТНОСИТЕЛЬНО p -АДИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹⁾

В статье продолжаются исследования по обобщенным вероятностным моделям, в которых вероятности принимают значения в полях p -адических чисел. Изучается p -адическое обобщение теории Мартин-Лёфа, основанной на тестах случайности. Использование такого обобщения является наиболее естественным подходом к p -адической случайности. Каждый тест случайности генерирует целую серию предельных теорем. Доказано, что можно эффективно перенумеровать все p -адические тесты случайности. Однако, в отличие от обычной теории Мартин-Лёфа для вещественных вероятностей, доказано, что не существует универсального теста случайности.

Ключевые слова и фразы: случайность, коллектив, модель Колмогорова, модель фон Мизеса, p -адические числа.

1. Введение. Обобщения вероятностных моделей, в которых вероятности принимают значения из поля p -адических чисел [1], [2], были рассмотрены в рамках p -адических моделей в квантовой механике. С этим направлением можно ознакомиться в [3]–[10].

Применение p -адических чисел в физических и вероятностных исследованиях основывается на простом наблюдении, что поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$ плотно не только в поле действительных чисел $\mathbf{R}$, но и в любом поле p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$, где $p \geq 2$ — простое число. Таким образом, если мы начинаем построение модели с рациональных чисел, которые появляются в результате физических измерений (см. [5], [7]), то для анализа физических измерений можно использовать не только действительный анализ, но и p -адический. Более того, в силу теоремы Островского о вложении поля $\mathbf{Q}$ в поле с мультипликативной нормой, других полей просто не существует, см. п. 2. С другой стороны, p -адическая

* Department of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, University of Växjö, S-35195, Sweden; e-mail: Andrei.Khrennikov@msi.vxu.se

** Department of Information Sciences, Science University of Tokio, Noda City, Chiba 278, Japan.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке гранта «Квантовая вероятность и приложения к биологии и экономике» (Европейское Сообщество).

вероятностная модель не эквивалентна колмогоровской вероятностной модели, и поэтому мы не можем использовать огромный потенциал колмогоровской модели для p -адических вероятностей, (см. [11]).

Первые p -адические модели [8] были попыткой расширить частотную конструкцию определения вероятностей, предложенную Р. фон Мизесом в теории «коллектива» [12], на p -адический случай, поскольку поведение относительных частот $\nu_n = n/N \in \mathbf{Q}$ можно изучать не только в $\mathbf{R}$, но и в $\mathbf{Q}_p$. Как известно, теория «коллектива» фон Мизеса основана на двух принципах: (1) принцип статистической стабилизации относительных частот и (2) принцип случайности, [12]. Это значит, что каждая бесконечная последовательность $(x) = (x_1, x_2, \dots)$, где для простоты x_i принимают значения из некоторого конечного множества A , называется «коллективом», если выполняются следующие условия:

1) частота $n(\alpha)/n$, где $n(\alpha)$ — число появлений элемента α среди первых $x_1, \dots, x_n$, стремится к некоторому числу $p(\alpha)$ (вероятность α) при $n \rightarrow \infty$ для любого $\alpha \in A$; это свойство последовательности (x) называется принципом статистической стабилизации;

2) для $(x)_\varphi = (x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots)$ — любой выбранной подпоследовательности из (x) , где номера $\varphi(1), \varphi(2), \dots$ не зависят от последовательности (x) , также выполняется принцип статистической стабилизации с теми же значениями вероятностей; это называется принципом случайности.

Первый принцип может быть естественным образом обобщен на p -адический случай, и p -адические вероятности определяются как пределы относительных частот в p -адической топологии. Однако, как и в обычной действительнoзначной теории, тут также появляется трудность с принципом случайности. В p -адическом случае ситуация со стабилизацией пределов относительных частот в подпоследовательностях $(x)_\varphi$ даже хуже, чем в действительном случае, поскольку p -адическая метрика очень неустойчива: если $|n|_p = \varepsilon < 1$, то $|n+1|_p = 1$. В p -адическом случае мы не имеем даже возможности ограничить наши рассмотрения счетным числом подпоследовательностей $(x)_\varphi$, как, например, можно сделать в действительном случае (теорема Торнье [13]). Чтобы получить обоснованное определение p -адической случайности, мы использовали теорию колмогоровской сложности, см. [14]–[18]. Однако строгую математическую теорию развить не удалось (см. [7]), несмотря на достаточно интересные физические приложения [19], [20].

В этой работе мы изучаем p -адическое обобщение теории Мартин-Лёфа, [21], [22], основанное на тестах случайности. Такое обобщение выглядит как более естественный подход к p -адической случайности. Мы также даем естественные тесты для p -адичнозначных равномерных вероятностных распределений. Каждый такой тест индуцирует серию предельных теорем. С другой стороны, отдельная предельная теорема

не является хорошим кандидатом, чтобы использовать ее как тест случайности, поскольку каждая такая теорема описывает только поведение подпоследовательности $S_{n_k}(\omega)$, $S_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)$, независимых одинаково распределенных случайных величин.

Показано, что возможно эффективно перенумеровать все p -адические тесты случайности. Однако, в отличие от теоремы Мартин-Лёфа для действительных вероятностей, доказано, что не существует универсального p -адического теста случайности.

В работе использована стандартная терминология книги М. Ли и П. Витани [18].

Первый автор хотел бы выразить благодарность Ю. В. Прохорову и В. М. Максимова за постоянный интерес к p -адическим моделям теории вероятностей.

2. p -адический анализ. Поля p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$, где p — простое число, были введены К. Гензелем в 1898 г. Первые 100 лет своего существования p -адические числа использовались только в чистой математике. Но в последние годы эти числа были использованы также и в теоретической физике, см. [5].

Поле действительных чисел $\mathbf{R}$ строится как пополнение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, где $|\cdot|$ — обычная метрика, заданная абсолютным значением. Поле p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$ строится аналогичным образом, но с помощью других метрик. Для простого числа p , $p = 2, 3, \dots$, p -адическая метрика $|\cdot|_p$ определяется следующим образом. Вначале определим ее для натуральных чисел. Так как каждое натуральное число n можно единственным образом разложить в произведение простых чисел, $n = 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \dots \cdot p^{r_p}$, то можно положить $|n|_p = p^{-r_p}$ и $|-n|_p = |n|_p$. Тогда легко распространить определение p -адической метрики $|\cdot|_p$ на все рациональные числа, полагая $|n/m|_p = |n|_p/|m|_p$ для $m \neq 0$. Пополнение $\mathbf{Q}$ относительно метрики $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ есть локально компактное поле p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$. Числовые поля $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ являются единственными пополнениями поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, так как по теореме Островского [1], [2] метрики $|\cdot|$, $|\cdot|_p$, где p — любое простое, являются единственно возможными метриками на $\mathbf{Q}$.

В отличие от вещественного расстояния, p -адическая метрика удовлетворяет строгому неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, $x, y \in \mathbf{Q}_p$. Обозначим $U_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p \leq r\}$ и $U_r^-(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p < r\}$, где $r = p^n$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Множества $U_r(a)$ и $U_r^-(a)$ являются замкнутыми и открытыми шарами в $\mathbf{Q}_p$, в то время как множество $\mathcal{S}_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p = r\}$ является сферой в $\mathbf{Q}_p$ радиуса r . Эти множества (шары и сферы) имеют что-то странное в топологической структуре с точки зрения обычной евклидовой интуи-

ции: они одновременно открыты и замкнуты. Другое интересное свойство p -адических шаров состоит в том, что они пересекаются тогда и только тогда, когда один из них содержится в другом. Также отметим, что каждая точка p -адического шара может быть взята как его центр. Таким образом, шар неоднозначно характеризуется своим центром и радиусом. Наконец, всякий p -адический шар $U_r(0)$ является аддитивной подгруппой $\mathbf{Q}_p$, в то время как шар $U_1(0)$ есть также кольцо, которое называется *кольцом целых p -адических чисел* и обозначается $\mathbf{Z}_p$.

Каждое $x \in \mathbf{Q}_p$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = \frac{a_{-n}}{p^n} + \dots + a_0 + \dots + a_k p^k + \dots,$$

которое сходится в норме $|\cdot|_p$ и где $a_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ являются разрядами p -адического разложения. Элементы $x \in \mathbf{Z}_p$ имеют разложение $x = a_0 + \dots + a_k p^k + \dots$ (без отрицательных степеней) и могут быть идентифицированы с последовательностями разрядов $x = (a_0, \dots, a_k, \dots)$, где a_j принадлежат алфавиту $A_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Для любых $n, k \in \mathbf{N}$ обозначим (n, k) наибольший общий делитель n и k ; для любого $n \in \mathbf{N}$ обозначим $M_p(n)$ остаток по модулю p от n , $n = M_p(n) \bmod p$. Положим

$$\Theta_p(n) = \begin{cases} |n - M_p(n)|_p, & n \geq p, \\ 1, & 1 \leq n \leq p-1. \end{cases}$$

Следующий технический результат будет использован при построении p -адических рекурсивных тестов и в доказательстве предельных теорем для p -адических вероятностей.

Лемма 2.1. Пусть $n, k \in \mathbf{N}$, $p \leq k \leq n$ и $M_p(n) \geq M_p(k)$. Тогда

$$\left| \binom{n}{k} \right|_p = \frac{\Theta_p(n)}{\Theta_p(k)}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $n = \alpha + ip^N$, $k = \beta + jp^l$, где $i, j, N, l \in \mathbf{N}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$ и $(i, p) = (j, p) = 1$. Тогда

$$\left| \binom{n}{k} \right|_p = \left| (ip^N) \frac{(ip^N - p)}{p} \dots \frac{(ip^N - jp^l + p)}{(jp^l - p)} \frac{1}{(jp^l)} \right|_p = \left| \frac{p^N}{p^l} \right|_p = p^{l-N}. \quad (2)$$

Для получения (2) достаточно использовать соотношения $n - k + 1 = ip^N - jp^l + (\alpha + 1 - \beta)$ и $0 < \alpha + 1 - \beta \leq p$. Значит, последний член в знаменателе дроби $\binom{n}{k} = n \dots (n - k + 1) / (1 \dots k)$, которой делится на p , равен $(ip^N - jp^l + p)$. Случаи, когда $n = \alpha$ или $k = \beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$, рассматриваются аналогично.

Лемма 2.2. Пусть $n, k \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, и $M_p(n) + 1 \leq M_p(k)$. Тогда

$$\left| \binom{n}{k} \right|_p = \Theta_p(n). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $n = \alpha + ip^N$, $k = \beta + jp^l$, где $(i, p) = (j, p) = 1$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \binom{n}{k} \right|_p &= \left| (ip^N) \frac{(ip^N - p)}{p} \frac{(ip^N - 2p)}{2p} \dots \frac{(ip^N - jp^l)}{(jp^l)} \right|_p \\ &= |p^N|_p = p^{-N} = \Theta_p(n). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы получить (4), достаточно заметить, что $n - k + 1 = (ip^N - jp^l) - (\beta - \alpha - 1)$ и $0 \leq \beta - \alpha - 1 < p$. Откуда последний член в знаменателе дроби $\binom{n}{k} = n \cdots (n - k + 1) / (1 \cdots k)$, который делится на p , равен $ip^N - jp^l$. Случаи, когда $n = \alpha$ или $k = \beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p - 1$, рассматриваются аналогично.

3. p -адические вероятностные меры на пространстве бинарных последовательностей. Положим $X = \{0, 1\}$, $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in X\}$, $X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$, $X^\infty = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) : \omega_j \in X\}$. Для $x \in X^n$ положим $l(x) = n$. Для $x \in X^*$, $l(x) = n$, мы определим цилиндр U_x с базисом x : $U_x = \{\omega \in X^\infty : \omega_1 = x_1, \dots, \omega_n = x_n\}$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\text{cyl}}$ алгебру подмножеств X^∞ , порожденную всеми цилиндрами.

Функция $\mathbf{P} : \mathcal{F}_{\text{cyl}} \rightarrow \mathbf{Q}_p$ называется p -адической вероятностной мерой, если выполнены следующие условия: 1) аддитивность: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $A \cap B = \emptyset$; 2) ограниченность: $\|\mathbf{P}\|_p = \sup\{|\mathbf{P}(A)|_p : A \in \mathcal{F}_{\text{cyl}}\} < \infty$; 3) нормированность: $\mathbf{P}(X^\infty) = 1$.

Тройка $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\Omega = X^\infty$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{cyl}}$, а $\mathbf{P}$ есть p -адическая вероятностная мера, будет называться p -адическим вероятностным пространством, см. [7] для общего случая. В этой работе мы будем рассматривать *равномерное* p -адическое распределение $\mathbf{P}_p : \mathcal{F}_{\text{cyl}} \rightarrow \mathbf{Q}_p$, для которого по определению $\mathbf{P}_p(U_x) = 1/2^{l(x)}$ при $x \in X^*$. Заметим, что значения $\mathbf{P}_p$ на цилиндрах совпадают со значениями стандартного действительнозначного равномерного распределения $\mathbf{P}_\infty$, заданного на X^∞ . Так как $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ и $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}_p$, то мы можем интерпретировать рациональные числа $1/2^{l(x)}$ и как действительные, и как p -адические.

Так как $|1/2^{l(x)}|_2 = 2^{l(x)}$, то $\mathbf{P}_2$ не является 2-адической вероятностной мерой. Поэтому мы ограничим наши рассуждения случаем $p \neq 2$.

Отображение $j : X^\infty \rightarrow \mathbf{Z}_2$, $j(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^i$, дает взаимно однозначное соответствие между X^∞ и $\mathbf{Z}_2$. Поэтому мы можем отождествить эти множества. Алгебра цилиндров $\mathcal{F}_{\text{cyl}}$ совпадает с алгеброй $\mathcal{F}_{\text{cl}}$ всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathbf{Z}_2$, см. п. 2. Отождествление

$X^\infty = \mathbf{Z}_2$ дает возможность использовать стандартную теорию интегрирования относительно p -адичнозначных мер для p -адических вероятностей. Различные варианты этой теории читатель может найти в [1], [2], [7]. Однако мы не будем использовать эту теорию в настоящей статье.

Функцию $f: X^* \rightarrow \mathbf{Q}_p$ мы будем называть рекурсивной, если найдется обычная рекурсивная функция $g: X^* \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ такая, что $|f(x) - g(x, k)|_p < 1/k$. p -адическое распределение $\mathbf{P}$ будет называться рекурсивным, если функция $f_p: X^* \rightarrow \mathbf{Q}_p$, $f_p(x) = \mathbf{P}(U_x)$, рекурсивна.

В действительности в настоящей работе не будут рассматриваться общие рекурсивные p -адические распределения. Мы рассмотрим только одно равномерное p -адическое распределение $\mathbf{P}_p$, $p \neq 2$, которое, очевидно, является рекурсивным.

4. p -адические тесты случайности. Мы будем использовать следующие обозначения. Для каждого множества $M \subset X^*$ положим $M^{(n)} = \{x \in M: l(x) = n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Для каждого множества $W \subset X^* \times \mathbf{N}$ положим $W_m = \{x \in X^*: (x, m) \in W\}$. Откуда $W_m^{(n)} = \{x \in X^*: l(x) = n, (x, m) \in W\}$. Обозначим мощность конечного множества A символом $\sigma(A)$. Мы не используем стандартный символ $|A|$, чтобы избежать выражения вида $\|A\|_p$.

Мы рассмотрим обобщение на случай p -адического равномерного распределения теста случайности, данного Мартин-Лёфом для обычных действительных вероятностей. Вначале дадим общее определение.

О п р е д е л е н и е 4.1. Пусть $\mathbf{P}$ — некоторое p -адическое рекурсивное распределение. Тогда рекурсивно перечислимое множество V , $V \subset X^* \times \mathbf{N}$, будет называться p -адическим $\mathbf{P}$ -тестом случайности, если оно обладает следующими свойствами: для всех $n, m \in \mathbf{N}$

$$V_{m+1} \subset V_m, \quad (5)$$

$$\left| \sum_{x \in V_m^{(n)}} \mathbf{P}(U_x) \right|_p \leq \frac{1}{p^m}. \quad (6)$$

Мы используем p -адические тесты случайности для построения p -адических статистик. Пусть имеется выборочное пространство X^* с ассоциированным p -адическим распределением $\mathbf{P}$. Для данного элемента x выборочного пространства мы хотим проверить гипотезу « x есть типичная выборка». Собственно говоря, свойство типичности x есть свойство принадлежности к разумно определенному большинству. Чтобы удостовериться, принадлежит ли данный элемент выборочного пространства разумно выбранному большинству, мы используем понятие теста. Как и в обычной теории вероятностей, тест задается правилом, которое для каждого уровня значимости $\varepsilon = 1/p^m$ говорит нам,

для каких элементов $x \in X^*$ гипотеза « x принадлежит большинству M в X^* » должна быть отклонена, когда $\varepsilon = 1 - \mathbf{P}(M)$. Множество V_m есть критическая область для уровня значимости $\varepsilon = 1/p^m$. Если $x \in V_m$, то гипотеза « x принадлежит большинству M в X^* » отклоняется с уровнем значимости ε . Конечно, существует большая разница между « p -адическим большинством» и обычным «действительным большинством». Например, популяции, очень большие с точки зрения обычной вероятности, могут быть очень малы с точки зрения p -адической вероятности, и наоборот.

В этой работе мы изучаем только равномерные p -адические распределения, где $\mathbf{P} = \mathbf{P}_p$, $p \neq 2$. Условимся тесты случайности для этих распределений называть просто p -адическими тестами. В нашем частном случае условие (6) может быть переформулировано в следующем виде:

$$|\sigma(V_m^{(n)})|_p \leq \frac{1}{p^m} \quad (7)$$

(так как $\mathbf{P}(U_x) = 1/2^n$ для $x \in V_m^{(n)}$ и $|2^n|_p = 1$ для $p \neq 2$, неравенство (6) приобретает вид $|\sum_{x \in V_m^{(n)}} 1|_p \leq 1/p^m$).

Предложение 4.1. Пусть V есть p -адический тест. Тогда для каждого $(x, m) \in V$ имеет место неравенство

$$l(x) (\log_p 2) > m \geq 1. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $n = l(x)$. Так как $x \in V_m$, мы имеем $V_m^{(n)} \neq \emptyset$, и в силу (7) число $\sigma(V_m^{(n)})$ делится на p^m . Таким образом, $2^n = \sigma(X^n) \geq \sigma(V_m^{(n)}) \geq p^m$, что доказывает неравенство (8).

Предложение 4.2. Пусть V есть p -адический тест. Тогда для любых $k \geq m$, $n \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$|\sigma(V_m^{(n)} \setminus V_k^{(n)})|_p \leq \frac{1}{p^m}. \quad (9)$$

Доказательство. Так как $V_k^{(n)} \subset V_m^{(n)}$, то

$$\sigma(V_m^{(n)}) = \sigma(V_k^{(n)}) + \sigma(V_m^{(n)} \setminus V_k^{(n)}).$$

В силу строгого неравенства треугольника мы получим

$$|\sigma(V_m^{(n)} \setminus V_k^{(n)})|_p \leq \max \left(|\sigma(V_m^{(n)})|_p, |\sigma(V_k^{(n)})|_p \right) = \frac{1}{p^m}.$$

Как обычно, обозначим целую часть действительного числа x через $[x]$. Условие (8) может быть переписано в виде

$$[l(x) \log_p 2] \geq m. \quad (10)$$

Функция $\lambda(n) = [n \log_p 2]$, $n \in \mathbf{N}$, будет играть важную роль в наших рассуждениях. Для всякого p -адического теста V и $n \in \mathbf{N}$ только множества $V_m^{(n)}$, $m = 1, \dots, \lambda(n)$, могут быть непусты.

Дадим несколько примеров p -адических тестов случайности. Все эти тесты связаны с поведением сумм

$$S(x) = x_1 + \dots + x_n, \quad x \in X^*, \quad n = l(x). \quad (11)$$

Пример 4.1. Положим

$$V_m = \left\{ x \in X^*: \Theta_p(S(x)) \geq p^m \Theta_p(l(x)), S(x) \neq 0, l(x) \geq p \right. \\ \left. \text{и } M_p(S(x)) \leq M_p(l(x)) \right\}. \quad (12)$$

Итак, мы рассматриваем последовательности из нулей и единиц длины, большей, чем p , отличные от чисто нулевых последовательностей. Условие $M_p(S(x)) \leq M_p(l(x))$ имеет следующий смысл: остаток по модулю p суммы $S(x)$ не больше, чем остаток по модулю p длины последовательности испытаний. Условие $\Theta_p(S(x)) \geq p^m \Theta_p(l(x))$ имеет следующий смысл: пусть число испытаний за вычетом его остатка по модулю p точно делится на p^s , и пусть сумма $S(x)$ без ее остатка по модулю p точно делится на p^t . Тогда m не превосходит $s - t$.

Покажем, что множество $V = \{(x, m): x \in V_m\}$ есть p -адический тест. Для этого достаточно доказать справедливость (7). Имеем

$$\sigma(V_m^{(n)}) = \sum_k \binom{n}{k},$$

где $p \leq k \leq n$ и $M_p(k) \leq M_p(n)$, $\Theta_p(n)/\Theta_p(k) \leq 1/p^m$. Чтобы получить (7), достаточно использовать строгое неравенство треугольника и лемму 2.1.

Пример 4.2. Положим

$$\bar{V}_m = \left\{ x \in X^*: \Theta_p(l(x)) \leq \frac{1}{p^m}, M_p(S(x)) \geq M_p(l(x)) + 1 \right\}. \quad (13)$$

Используя лемму 2.2, получим, что (7) справедливо для $\bar{V}_m$. Таким образом, множество $\bar{V} = \{(x, m): x \in \bar{V}_m\}$ является p -адическим тестом.

Пример 4.3 (конечные тесты). Пусть $n \in \mathbf{N}$ — фиксированное число, а T — некоторое подмножество X^n , $|\sigma(T)|_p = p^{-\lambda(n)}$. Положим $W_m^{(n)} = T$ для $m = 1, \dots, \lambda(n)$ и $V_j^{(n)} = \emptyset$, $j > \lambda(n)$, $V_j^{(n)} = \emptyset$, $k \neq n$, для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда $V = \{(x, m): x \in V_m\}$, $V_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_m^{(k)}$, есть конечный p -адический тест.

Чтобы проиллюстрировать тесты (12) и (13), полезно рассмотреть некоторые им соответствующие подмножества с фиксированными значениями $M_p(n)$ и $M_p(S(x))$.

Начнем с теста (12). Положим

$$\begin{aligned} V_m(1, 0) &= \{x \in V_m: M_p(l(x)) = 1, M_p(S(x)) = 0\}, \\ V(1, 0) &= \{(x, m): x \in V_m(1, 0)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Этот тест связан с выборками вида

$$x = (x_1, \dots, x_{1+jp^N}), \quad N \in \mathbb{N}, \quad (j, p) = 1. \quad (15)$$

Такая выборка должна быть отклонена с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$, если $1 > |S(x)|_p \geq p^m |l(x) - 1|_p = p^{m-N}$. Таким образом, тест $V(1, 0)$ отклоняет все выборки вида $x = (x_1, \dots, x_{1+jp^N})$, $(j, p) = 1$, в которых сумма $S(x) = x_1 + \dots + x_{1+jp^N}$ не делится на достаточно высокую степень p , но делится на p^1 .

Выборка x вида (15), для которой $S(x) = ip^k$, $(i, p) = 1$, $k \geq 1$, отвергается с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$, если $k < N - n$.

Для теста (12) и $M_p(l(x)) = 1$ можно фиксировать $M_p(S(x)) = 1$ и получить новый тест:

$$\begin{aligned} V_m(1, 1) &= \{x \in V_m: M_p(l(x)) = 1, M_p(S(x)) = 1\}, \\ V(1, 1) &= \{(x, m): x \in V_m(1, 1)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда выборка x вида (15) должна быть отвергнута с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$, если $1 > |S(x) - 1|_p \geq p^m |l(x) - 1|_p = p^{n-N}$. Таким образом, тест $V(1, 1)$ бракует все выборки x вида (15), для которых $S(x) - 1$ не делится на достаточно высокую степень p , но делится на p^1 .

Таким же образом, фиксируя $M_p(n) = s = 0, 1, \dots, p-1$, мы получим тесты $V_m(s, q)$, $q = 0, 1, \dots, s$. Тест $V(s, q)$ отвергает некоторые выборки вида

$$x = (x_1, \dots, x_{s+jp^N}), \quad j, N \in \mathbb{N}, \quad (j, p) = 1, \quad (17)$$

а именно выборки x , для которых число $S(x) - q$ не делится на достаточно высокую степень p , но делится на p^1 . Выборка x вида (17), для которой $S(x) = q + ip^k$, $(i, p) = 1$, $k \geq 1$, отвергается с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$, если $k < N - m$.

Изучим теперь тест (13). Условие $M_p(S(x)) \geq M_p(l(x)) + 1 \geq 0$ означает, что этот тест используется, чтобы отвергнуть некоторые выборки, для которых сумма $S(x)$ не делится на p (ср. с (14)). Положим

$$\begin{aligned} \bar{V}_m(0, 1) &= \{x \in \bar{V}_m: M_p(l(x)) = 0, M_p(S(x)) = 1\}, \\ \bar{V}(0, 1) &= \{(x, m): x \in \bar{V}_m(0, 1)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Этим тестом мы отбрасываем с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$ все выборки вида $x = (x_1, \dots, x_{jp^N})$, $(j, p) = 1$, для которых $N < m$

и $M_p(S(x)) = 1$. Можно сравнивать тесты $\bar{V}(0, 1)$ и $V(0, 0)$. Последний тест используется для отбраковки выборок того же вида, но для которых сумма $S(x)$ делится на p : $S(x) = ip^k$, $(i, p) = 1$, $k \geq 1$. Выборка отклоняется с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$, если $k < N - m$.

Можно ввести p -адический тест O , который покрывает все случаи делимости на p суммы $S(x)$.

Предложение 4.3. Пусть Φ и Ψ — два p -адических теста, для которых $\Phi \cap \Psi = \emptyset$. Тогда множество $\Gamma = \Phi \cup \Psi$ есть p -адический тест с критической областью $\Gamma_m = \Phi_m \cup \Psi_m$ и с уровнем значимости $\varepsilon = 1/p^m$.

Доказательство. Нам нужно только доказать, что (7) справедливо. Но $|\sigma(\Gamma_m^{(n)})|_p = |\sigma(\Phi_m^{(n)}) + \sigma(\Psi_m^{(n)})|_p \leq \max(|\sigma(\Phi_m^{(n)})|_p, |\sigma(\Psi_m^{(n)})|_p) \leq 1/p^m$.

Возвратимся к тестам V и $\bar{V}$, определенным в примерах 4.1 и 4.2. Очевидно, что $V_m \cap \bar{V}_m = \emptyset$ для всех m . Тогда множества $\Sigma_m = V_m \cup \bar{V}_m$ дают критические области p -адического теста $\Sigma = \{(x, m): x \in \Sigma_m\}$.

5. Некоторые предельные теоремы. Как в обычной теории вероятностей, тесты V и $\bar{V}$ примеров 4.1, 4.2 связаны с некоторыми предельными теоремами p -адической теории вероятностей. Пусть $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{F}_{\text{cyl}}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, образованное равномерным p -адическим распределением $\mathbf{P}$ на алгебре $\mathcal{F}_{\text{cyl}}$ цилиндрических подмножеств $\Omega = X^\infty$, $p \neq 2$. Для $\omega \in \Omega$ положим $S_n(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_n$.

Теорема 5.1. Для каждого $l \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega: |S_n(\omega) - M_p(S_n(\omega))|_p = \frac{1}{p^l}, M_p(S_n(\omega)) \leq M_p(n)\right\} \rightarrow 0 \quad (19)$$

в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n - M_p(n)|_p \rightarrow 0$.

Доказательство. Используя условия примера 4.1, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega: |S_n(\omega) - M_p(S_n(\omega))|_p = \frac{1}{p^l}, M_p(S_n(\omega)) \leq M_p(n)\right\} \\ \leq p^l |n - M_p(n)|_p. \end{aligned}$$

В частности, мы получаем следующие предельные теоремы.

Следствие 5.1 (см. [22]). Для каждого $l \in \mathbf{N}$ вероятности

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_{1/p^l}(0)\} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\omega \in \Omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_{1/p^l}(1)\}$$

стремятся к нулю в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n - 1|_p$ стремится к нулю.

Следствие 5.2. Для каждого $l \in \mathbf{N}$ вероятности $\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_{1/p^l}(0)\}$ стремятся к нулю в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n|_p \rightarrow 0$.

Формально, следствие 5.1 можно интерпретировать следующим образом. Сумма $S_n(\omega)$ может быть рассмотрена как сумма $S_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_j(\omega)$, принимающих значения 0 или 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$ (см. [7]). По следствию 5.1 распределение вероятностей случайной величины $S_{\lim}(\omega) = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\omega)$ сконцентрировано в точках $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$ из $\mathbf{Q}_p$. В силу симметрии $\mathbf{P}_{S_{\lim}}(\{a_0\}) = \mathbf{P}_{S_{\lim}}(\{a_1\}) = \frac{1}{2}$. Конечно, это есть только формальное утверждение, поскольку следствие 5.1 дает сходимость только на сферах $\mathbf{Q}_p$.

Теорема 5.2. *Имеет место сходимость в $\mathbf{Q}_p$:*

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: M_p(S_n(\omega)) \geq M_p(n) + 1\} \rightarrow 0,$$

когда $|n - M_p(n)|_p \rightarrow 0$.

Как и в случае теоремы 5.1, мы можем, например, положить $M_p(n) = 0$ или $M_p(n) = 1$ и получить следующие следствия теоремы 5.2.

Следствие 5.3. *Вероятности $\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: M_p(S_n(\omega)) \geq 1\}$ стремятся к нулю в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n|_p \rightarrow 0$.*

Следствие 5.4. *Вероятности $\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: M_p(S_n(\omega)) \geq 2\}$ стремятся к нулю в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n - 1|_p \rightarrow 0$.*

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: M_p(S_n(\omega)) \geq 1\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_1(0)\}.$$

Таким образом, из следствий 5.2 и 5.3 мы получим, что

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega: S_n(\omega) \in U_{1/p^m}(0)\} \rightarrow 1$$

в $\mathbf{Q}_p$, когда $|n|_p \rightarrow 0$, для всех $m \in \mathbf{N}$. Отсюда формально получаем, что вероятностное распределение $\mathbf{P}_{S_{\lim}}$ величины $S_{\lim} = \lim_{n \rightarrow 0} S_n(\omega)$ сконцентрировано в точке $a_0 = 0 \in \mathbf{Q}_p$: $\mathbf{P}_{S_{\lim}}(\{0\}) = 1$.

По видимому, в p -адическом случае более естественно использовать тесты случайности, чем предельные теоремы. В противоположность обычной теории вероятностей, в p -адическом случае нет общих предельных теорем для $n \rightarrow \infty$. Все предельные теоремы дают сходимость вероятностей для некоторых подпоследовательностей $n_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Например, из $|n_k|_p \rightarrow 0$, $n_k \neq 0$, вытекает, что $n_k = jp^N$, $(j, p) = 1$, $N \rightarrow \infty$, а из $n_k \neq 1$, $|n_k - 1|_p \rightarrow 0$ вытекает, что $n_k = 1 + jp^N$, $(j, p) = 1$, $N \rightarrow \infty$, и т.д.

6. Рекурсивное перечисление множества p -адических тестов. Здесь мы докажем, что множество всех p -адических тестов рекурсивно перечислимо. Общая схема доказательства такая же, как и в классическом случае. Тем не менее, основная часть доказательства —

построение алгоритма p -адического теста на основе частично рекурсивной функции — принципиально иная. Вначале напомним одну хорошо известную лемму (см., например, [18]).

Лемма 6.1. *Существует частично рекурсивная функция $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X^* \times N$ со следующими свойствами:*

- (a1) *если $i, j \in \mathbb{N}$ и $f(i, j) \neq \infty$, то $f(i, k) \neq \infty$ для всех $k \leq j$;*
- (a2) *множество $A \subset X^* \times N$ рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда $A = \{f(i, j): j = 1, 2, \dots\} \setminus \{\infty\}$ для некоторого $i \geq 1$.*

Определение 6.1. Для всякого теста V положим $V_m = \{x: (x, m) \in V\}$ и $V_m^{(n)} = \{x: x \in V_m \wedge l(x) = n\}$.

Теорема 6.1. *Множество всех p -адических тестов рекурсивно перечислимо.*

Доказательство. Пусть задана частично рекурсивная функция $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow X^* \times \mathbb{N}$ такая, что если $\Phi(n) \downarrow$, то $\Phi(k) \downarrow$ для $1 \leq k < n$. Идея доказательства состоит в конструировании из такой функции Φ общей рекурсивной функции $g: \mathbb{N} \rightarrow X^* \times \mathbb{N}$, для которой $A_g = \text{range } g$ есть p -адический тест.

Замечание 6.1. Если данная Φ уже является p -адическим тестом, то $A_g = \text{range } g = \text{range } \Phi$. Условие, что $\text{range } g$ и $\text{range } \Phi$ равны, всегда выполняется в силу конструкции Φ . Таким образом, только то условие, что $\text{range } g$ является p -адическим тестом, осталось непроверенным.

Тест T , равный $\text{range } g$ по определению, конструируется шаг за шагом, с использованием следующего алгоритма. Заметим, что при этом на каждом шаге получаем p -адический тест.

Обозначения. Список $\mathcal{D}_m^{(n)}$ используется, чтобы дать аппроксимацию для множества $T_m^{(n)}$ в процессе вычислений. Список $\mathcal{R}_m^{(n)}$ используется, чтобы собирать элементы x из $A_\Phi = \text{range } \Phi$ такие, что $l(x) = n \wedge (x, m) \in \text{range } \Phi$.

Основная идея состоит в том, что мы не можем увеличивать множества $\mathcal{D}_m^{(n)}$ на шаге, когда $\Phi(j) = (x, m) \wedge l(x) = n$, из-за того, что p -адическая метрика очень чувствительна к изменению количества единиц.

В список $\mathcal{R}_m^{(n)}$ элементы собираются до тех пор, пока не будет kp^m элементов.

После этого мы изменяем $\mathcal{D}_m^{(n)}$, полагая $\mathcal{D}_m^{(n)} = \mathcal{R}_m^{(n)}$.

Так как мы желаем получить множество, которое обладает свойством $T_m \supset T_{m+1}$, мы должны проверить условие $\mathcal{D}_{m-1}^{(n)} \supset \mathcal{R}_m^{(n)}$, прежде чем положить $\mathcal{D}_m^{(n)} = \mathcal{R}_m^{(n)}$.

С другой стороны, из возрастания $\mathcal{D}_m^{(n)}$ на некотором шаге может вытекать, что множество $\mathcal{R}_{m+1}^{(n)}$, сконструированное на предыдущих шагах, имеет sp^m элементов и станет меньше, чем $\mathcal{D}_m^{(n)} = \mathcal{R}_m^{(n)}$.

В этом случае мы положим $\mathcal{D}_{m+1}^{(n)} = \mathcal{R}_{m+1}^{(n)}$ и продолжим проверять это условие, увеличивая $m + 2, m + 3, \dots < (\log_p 2) n$.

Чтобы T было рекурсивно перечислимым множеством, мы построим общую рекурсивную функцию $g: \mathbf{N} \rightarrow X^* \times \mathbf{N}$ с T , равным $\text{range } g$ по определению. (Ясно, что если $\text{range } \Phi$ уже есть p -адический тест, то $T = \text{range } \Phi$, но это не ясно в общем случае.)

Ниже мы будем использовать обозначения, принятые в языке Паскаль, для построения нашего алгоритма.

Алгоритм.

З а м е ч а н и е 6.2. Мы используем две таблицы $\text{LOOP}j$ и BAR для переходов и идентификатор $\text{value}i$, чтобы контролировать текущее значение i .

```

begin  $T := \emptyset$ ; Set  $\mathcal{D}_m^{(n)} = \mathcal{R}_m^{(n)} = \emptyset$  for  $1 \leq m \leq [n \log_p 2]$ ;
 $j := 0$ ;  $i := 1$ ;  $t_m^{(n)} := 0$ ;
LOOP  $j$ : for  $j = 1$  to  $\infty$  do
  begin if  $\Phi(j) \downarrow$  then
    {else if  $\Phi(j) \uparrow$ , computation of  $T$  is finished}
    begin  $(x, m) := \Phi(j)$ ;  $n = l(x)$ ;
      if  $m > [n \log_p 2]$  then begin  $T := \emptyset$ ; halt end;
       $\mathcal{R}_m^{(n)} := \mathcal{R}_m^{(n)} \cup \{x\}$ ;
       $t_m^{(n)} := t_m^{(n)} + 1$ ;
      if  $|t_m^{(n)}|_p \leq \frac{1}{p^m}$  and  $\mathcal{D}_{m-1}^{(n)} \supset \mathcal{R}_m^{(n)}$  then
         $\mathcal{D}_m^{(n)} := \mathcal{R}_m^{(n)}$ 
      end; {end of loop on  $j$ }
       $g := (\text{foo}(i, m, \mathcal{D}_m^{(n)}))_1$ ;
       $\text{value}i := (\text{foo}(i, m, \mathcal{D}_m^{(n)}))_2$ ;  $s := m$ ;
BAR:  $s := s + 1$ 
      if  $s \leq [n \log_p 2]$  and  $|t_1^{(n)}|_p \leq \frac{1}{p^m}$  and  $\mathcal{D}_{s-1}^{(n)} \supset \mathcal{R}_s^{(n)}$  then
        begin  $\mathcal{D}_s^{(n)} := \mathcal{R}_s^{(n)}$ ;  $g := (\text{foo}(\text{value}i, s, \mathcal{D}_s^{(n)}))_1$ ;
          goto BAR
        end;
       $T := T \bigcup_{m \leq s < (\log_p 2)n} \{\mathcal{D}_s^{(n)} \times \{s\}\}$ ;
      goto LOOP;
end. {end of program}

```

З а м е ч а н и е 6.3. Функциональная программа `foo` принимает набор $(i, m, \mathcal{D})$ как вход и возвращает $\text{foo}(i)$, которое является парой $(g, \text{value}i)$, где g есть список $((i, ((\mathcal{D})_1, m)), (i + 1, ((\mathcal{D})_2, m)), \dots, (i + l(\mathcal{D}) - 1, ((\mathcal{D})_{l(\mathcal{D})}, m)))$, и $\text{value}i$ есть текущее значение $i + l(\mathcal{D})$ переменной i .

Здесь проекция на i -й элемент списка x записана как $(x)_i$

```
function foo( $i, m$ : integer,  $\mathcal{D}$ : list): list;
var  $g$ : list;
var  $x$ : integer;
begin  $g := \text{nil}; x := 0$ ;
  while  $\mathcal{D} \neq \text{nil}$  do
    begin  $g := g \cup \{(i + x), ((\mathcal{D})_x, m)\}$ ;
       $i := i + 1; x := x + 1$ 
    end
  foo := ( $g, i + x - 1$ )
end.
```

T по построению всегда будет p -адическим тестом для равномерного распределения. В частности, множество T рекурсивно перечислимо, так как T есть $\text{range } g$ с общей рекурсивной функцией g .

7. О несуществовании p -адического универсального теста.

Рассмотрим естественное обобщение определения универсального теста случайности.

О п р е д е л е н и е 7.1. Некоторый p -адический тест U называется универсальным, если для каждого p -адического теста V мы можем эффективно найти $c \in \mathbf{N}$ (зависящее от U и V) такое, что $V_{m+c} \subset U_m$ для всех m .

Хорошо известно, что в обычной теории вероятностей существует универсальный тест случайности, который, конечно, не является единственным. Однако в p -адической теории вероятностей не существует универсального рекурсивного теста.

Мы начнем с технических рассуждений. Рассмотрим более аккуратно свойства функции $\lambda(n) = [n \log_p 2]$. Если $p > 2$, то мы имеем $\log_p 2 < 1$. Положим $L_k = [k / \log_p 2]$. Если $0 < n \leq L_1$, то $n \log_p 2 < 1$ и $\lambda(n) = 0$. С другой стороны, если $L_{k-1} < n \leq L_k$, то $\lambda(n) = k - 1$, $k \geq 2$. Положим $n_k = L_k + 1$.

Лемма 7.1. *Неравенство*

$$p^{\lambda(n_k)} > 2^{n_k - 1} \quad (20)$$

справедливо для всех $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Мы имеем $\lambda(n_k) = k$ и $\lambda(n_k - 1) = k - 1$. По определению $\lambda(n) = \max\{l: p^l < 2^n\}$. Следовательно, для всех n имеем $p^{\lambda(n)+1} > 2^n$. В частности, $p^{\lambda(n_k-1)+1} = p^k > 2^{n_k-1}$, откуда $p^k = p^{\lambda(n_k)} > 2^{n_k-1}$.

Построим теперь два p -адических теста W и $\widetilde{W}$, используя следующую процедуру.

Для $k = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, \lambda(n_k)$ положим

$$W_j^{(n_k)} = W_{\lambda(n_k)}^{(n_k)} = \{x_1, \dots, x_{p^{\lambda(n_k)}}\},$$

$$\widetilde{W}_j^{(n_k)} = \widetilde{W}_{\lambda(n_k)}^{(n_k)} = \{x_{2^{n_k} - p^{\lambda(n_k)} + 1}, \dots, x_{2^{n_k}}\}$$

и $W_l^{(n_k)} = \widetilde{W}_l^{(n_k)} = \emptyset$ для $n \neq n_k$ и $l = 1, 2, \dots$. Здесь мы использовали лексикографическую нумерацию элементов X^{n_k} , $k = 1, 2, \dots$: $x_1, x_2, \dots, x_{2^{n_k}}$. Так как $\sigma(W_j^{(n_k)}) = \sigma(\widetilde{W}_j^{(n_k)}) = p^{\lambda(n_k)}$, $j = 1, \dots, \lambda(n)$, то в силу (20) мы получим $W_j^{(n_k)} \cap \widetilde{W}_j^{(n_k)} \neq \emptyset$, откуда

$$X^{n_k} = W_j^{(n_k)} \cup \widetilde{W}_j^{(n_k)}, \quad j = 1, \dots, \lambda(n_k).$$

Теорема 7.1. *Не существует универсального p -адического теста.*

Доказательство. Допустим, что такой универсальный p -адический тест U существует. Тогда можно эффективно найти $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $W_{m+c_1} \subset U_m$ и $\widetilde{W}_{m+c_2} \subset U_m$, где W и $\widetilde{W}$ — p -адические тесты, построенные выше. Пусть k выбрано достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства $\lambda(n_k) - c_1 \geq 1$ и $\lambda(n_k) - c_2 \geq 1$. Тогда $W_{1+c_1}^{(n_k)} = W_{\lambda(n_k)}^{(n_k)}$ и $\widetilde{W}_{1+c_2}^{(n_k)} = \widetilde{W}_{\lambda(n_k)}^{(n_k)}$. Откуда

$$U_1^{(n_k)} \supset W_{1+c_1}^{(n_k)} \cup \widetilde{W}_{1+c_2}^{(n_k)} = X^{n_k}.$$

Из этого вытекает

$$|\sigma(U_1^{(n_k)})|_p = |\sigma(X^{n_k})|_p = 1,$$

что противоречит (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schikof W. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984, 306 p.
2. Koblitz N. p -Adic Analysis. A Short Course on Recent Work. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980, 163 p.
3. Volovich I. V. p -adic string. — Classical Quantum Gravity, 1987, v. 4, p. 83–87.
4. Freund P. G. O., Witten E. Adelic string amplitudes. — Phys. Lett. B, 1987, v. 199, № 2, p. 191–194.

5. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994, 352 с.
6. Frampton P. H., Okada Y. p -adic string N -point function. — Phys. Rev. Lett. B, 1988, v. 60, № 6, p. 484–486.
7. Khrennikov A. Yu. p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer, 1994, 264 p.
8. Хренников А. Ю. p -адическая теория вероятностей и ее приложения. Принцип статистической стабилизации частот. — Теорет. матем. физика, 1993, т. 97, № 3, с. 348–363.
9. Хренников А. Ю. О вероятностных распределениях на поле p -адических чисел. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 1, с. 189–192.
10. Хренников А. Ю. О расширении частотного подхода Р. фон Мизеса и аксиоматического подхода А. Н. Колмогорова на p -адическую теорию вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 458–464.
11. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.–Л.: ОНТИ, 1936, 80 с.
12. von Mises R. Mathematical Theory of Probability and Statistics. New York–London: Academic Press, 1964, 694 p.
13. Tornier E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Allgemeine Integrationstheorie. Leipzig: Teubner, 1936, 160 p.
14. Solomonoff R. J. A formal theory of inductive inference. I, II. — Information and Control, 1964, v. 7, p. 1–22, 224–254.
15. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации». — Проблемы передачи информации, 1965, т. 1, № 1, с. 3–11.
16. Uspensky V. A., Shen A. Relations between varieties of Kolmogorov complexities. — Math. Systems Theory, 1996, v. 29, № 3, p. 271–292.
17. Звонкин А. К., Левин Л. А. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. — Успехи матем. наук, 1970, т. 25, № 6, с. 85–127.
18. Li M., Vitányi P. An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1997, 637 p.
19. Хренников А. Ю. Описание экспериментов по нахождению p -адической статистики в квантовых дифракционных экспериментах. — Докл. РАН, 1998, т. 58, № 3, с. 478–480.
20. Khrennikov A. Yu. p -adic probability predictions of correlations between particles in the two slit and neutron interferometry experiments. — Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B (12), 1998, v. 113, № 6, p. 751–760.
21. Мартин-Лёф П. О понятии случайной последовательности. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 198–200.
22. Martin-Löf P. The definition of random sequences. — Information and Control, 1966, v. 9, p. 602–619.
23. Хренников А. Ю. p -адическая асимптотика бернуллиевских вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, № 4, с. 839–845.

Поступила в редакцию
28.VI.2000