Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 145–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 06:03:23

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2004 г.

АМОСОВ Г. Г.*

О МАРКОВСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ
ГРУППЫ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ,
АССОЦИИРОВАННОЙ СО СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ
СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ¹⁾

В работе вводятся «марковские» коциклические возмущения группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями, характеризующиеся свойством локализации действия возмущения на алгебру событий прошлого. Необходимость такого определения связана с тем, что при марковском возмущении группы, ассоциированной со случайным процессом с некоррелированными приращениями, для возмущенной группы также найдется случайный процесс с некоррелированными приращениями, ассоциированный с ней. С другой стороны, с возмущенной группой может быть ассоциирован некоторый «детерминированный» случайный процесс, полностью лежащий в прошлом. Построена модель марковских возмущений, описывающая все марковские коциклы с точностью до унитарной эквивалентности возмущений. С помощью введенной модели построены марковские коциклы, переводящие гауссовские меры в эквивалентные гауссовские меры.

Ключевые слова и фразы: случайный процесс со стационарными приращениями, группа унитарных операторов, коциклическое возмущение унитарным коциклом.

Введение. Хорошо известно, что любой случайный процесс с конечными вторыми моментами, являющийся непрерывным в среднем квадратичном, может быть рассмотрен как непрерывная кривая в гильбертовом пространстве. При этом такие свойства процесса, как, например, стационарность приращений в широком смысле слова и некоррелированность приращений, переходят в инвариантность относительно группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве и ортогональность приращений кривой соответственно. Таким образом, для исследования свойств случайного процесса можно применить технику функционального анализа. Предложивший такую идеологию А. Н. Колмогоров в [1], [2] рассмотрел задачу классификации классов эквивалентности непрерывных кривых $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ в гильбертовом пространстве H , инвариантных относительно сильно непрерывной однопараметрической группы унитарных операторов $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, по отношению к преобразованиям эквивалентности вида

$$\tilde{\xi}_t = W\xi_t + \eta, \quad (*)$$

* Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия;
e-mail: amosov@fizteh.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантом INTAS-00-738.

где W есть унитарный оператор в H и η — элемент H . Действительно, непрерывная кривая $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ инвариантна относительно группы унитарных операторов $\tilde{U} = (W_t U_t)_{t \in \mathbf{R}}$, где семейство унитарных операторов

$$W_t = W U_t W^* U_{-t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (**)$$

удовлетворяет условию мультипликативного U -коцикла

$$W_{t+s} = W_t U_t W_s U_{-t}, \quad s, t \in \mathbf{R}. \quad (***)$$

Мультипликативный коцикл, порождаемый унитарным оператором W по формуле (**) называется U -кограницей. Заметим, что не любой коцикл (**) является кограницей (**). Здесь мы используем обычные определения теории кохомологии групп для 1-коцикла и 1-кограницы, соответствующие стандартной бар-резольвенте группы $\mathbf{R}$ со значениями в мультипликативной группе $\mathcal{U}(H)$ всех унитарных операторов в гильбертовом пространстве H со структурой модуля, определяемого действием группы $x \rightarrow U_t x U_{-t}$, $x \in \mathcal{U}(H)$, $t \in \mathbf{R}$ (см., например, [3], [4]).

Предположим, что для группы U найдется непрерывная кривая $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$, инвариантная относительно U и такая, что ее приращения ортогональны в том смысле, что $(\xi_{t_1} - \xi_{s_1}) \perp (\xi_{t_2} - \xi_{s_2})$ для любых непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$. Такие кривые названы в [2] спиралями Винера. Любой мультипликативный U -коцикл $(W_t)_{t \in \mathbf{R}}$, сильно непрерывный по t , определяет новую сильно непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов $\tilde{U} = (W_t U_t)_{t \in \mathbf{R}}$, которую мы будем называть *коциклическим возмущением* группы U . В том случае, когда $(W_t)_{t \in \mathbf{R}}$ является кограницей, для коциклического возмущения $\tilde{U}$ также найдется инвариантная кривая ξ , являющаяся спиралью Винера. Действительно, эта кривая будет строиться по формуле (*), в которую в качестве W нужно подставить унитарный оператор, порождающий рассматриваемую кограницу. Для произвольного коцикла $(W_t)_{t \in \mathbf{R}}$, не сводящегося к когранице, для коциклического возмущения $\tilde{U}$ может не найтись инвариантной кривой, являющейся спиралью Винера. В этой работе мы вводим подкласс (М) множества всех коциклов, так что любой коцикл из (М) порождает коциклическое возмущение группы, обладающее инвариантной спиралью Винера при условии, что возмущаемая группа обладала этим свойством. Вводимый нами класс коциклических возмущений важен, поскольку в приложениях (см. [5]–[7]) часто ставится задача о представлении квантового случайного процесса в виде «проекции» коциклического возмущения квантового шума, являющегося спиралью Винера с точки зрения функционального анализа. Используемые при этом коциклы, удовлетворяющие квантовым стохастическим дифференциальным уравнениям, принадлежат вводимому нами классу (М). Отметим, что случаю квантовых случайных процессов будет посвящена вторая часть нашей работы, публикуемая отдельно. Коциклы класса (М) мы называем марковскими. Использование термина «марковский коцикл» восходит к работам [8], [9]. С классическим свойством Маркова марковские коциклы [8], [9] связаны в том смысле, что возмущение квантового марковского случайного процесса марковским коциклом опять является марковским случайным процессом с теми же алгебрами настоящего, будущего и прошлого. Наше определение отличается от определения [8], [9], тем не менее наши возмущения, при надлежащей интерпретации, являются марковскими в смысле определения цитируемой нами работы, охватывающего более широкий класс возмущений. Это представляет нам достаточной мотивацией для использования такой терминологии.

Модельным примером группы унитарных операторов U , для которой найдется инвариантная спираль Винера, является группа сдвигов в пространстве $H = L^2(\mathbf{R})$, действующая по формуле $(U_t \eta)(x) = \eta(x + t)$, $\eta \in H$. Действительно, семейство функций $\xi_t(x) = 1$, $x \in [-t, 0]$, $\xi_t(x) = 0$, $x \notin [-t, 0]$, является спиралью Винера, инвариантной относительно U (см. [2]). Подпространства H_{t+} и H_{t-} , состоящие из функций с носителем в $[t, +\infty)$ и $(-\infty, t]$, естественно назвать прошлым и будущим системы соответственно. Отметим, что $H_{t+} = U_t H_{0+}$, $H_{t-} = U_t H_{0-}$, $t \in \mathbf{R}$. В этом случае мы называем коцикл W марковским, если сужение унитарного оператора W_t на подпространство будущего H_{t+} является тождественным преобразованием при любом

фиксированном $t \geq 0$. Такое определение, в частности, гарантирует, что подпространство прошлого $H_{0|}$ инвариантно относительно W_{-t} при любом $t \geq 0$, что позволяет рассматривать сужение коциклического возмущения $\tilde{U}_{-t}|_{H_{0|}}$, $t \geq 0$. Пусть $\tilde{U}$ есть коциклическое возмущение U коциклом, являющимся марковским в смысле введенного нами определения. Мы показываем, что любое такое возмущение можно представить в виде $\tilde{U} = \tilde{U}^{(1)} \oplus \tilde{U}^{(2)}$, где $\tilde{U}^{(1)}$ является произвольной группой унитарных операторов в подпространстве прошлого $H_{0|}$, а $\tilde{U}^{(2)}$ унитарно эквивалентна исходной группе сдвигов U . Такое представление можно назвать разложением Вольда коциклического возмущения $\tilde{U}$. Случайные процессы, инвариантные относительно группы $\tilde{U}^{(1)}$, можно интерпретировать, как детерминированные, а инвариантные относительно группы $\tilde{U}^{(2)}$ как недетерминированные.

Эта работа построена следующим образом. В п. 1 мы определяем класс марковских U -коциклов таких, что группа унитарных операторов $\tilde{U}$, полученная возмущением таким коциклом, определяет непрерывную кривую ξ , инвариантную относительно $\tilde{U}$, связанную с исходной непрерывной кривой ξ формулой (*), где W является (вообще говоря не унитарным) изометрическим оператором, удовлетворяющим дополнительному свойству локализации действия на «прошлое». Такие изометрические операторы мы называем марковскими и доказываем, что каждому марковскому оператору отвечает некоторое возмущение марковским коциклом. Детальное изучение, проведенное в п. 2, показывает, что введенный нами марковский коцикл определяет разложение Вольда коциклического возмущения. В п. 3 мы строим модель марковского коцикла для случайного процесса с некоррелированными приращениями. Введенная модель позволяет строить марковские коциклы со свойством $W_t - I \in s_2$ (класс Гильберта–Шмидта), т.е. переводящие гауссовские меры в эквивалентные гауссовские меры.

1. Случайные процессы со стационарными приращениями как кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные относительно группы преобразований. Пусть $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ есть непрерывный в среднем квадратичном со стационарными в широком смысле приращениями случайный процесс на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) . Без ограничения общности мы можем предположить выполнение условия $\xi(0) = 0$. Тогда на гильбертовом пространстве H^ξ , порожденном приращениями $\xi_t - \xi_s$, $s, t \in \mathbf{R}$, однозначно определена сильно непрерывная группа унитарных операторов $U = (U_t)_{t \in \mathbf{R}}$, сдвигающая приращения по времени, так что $U_t(\xi_s - \xi_r) = \xi_{s+t} - \xi_{r+t}$, $s, t, r \in \mathbf{R}$, причем ξ удовлетворяет условию (аддитивного) $1-U$ -коцикла, т.е. $\xi_{t+s} = \xi_t + U_t \xi_s$, $s, t \in \mathbf{R}$. Обозначим H гильбертово пространство со скалярным произведением $(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi \bar{\eta})$, порожденное классами эквивалентности случайных величин ξ, η на пространстве (Ω, μ) , обладающих конечными вторыми моментами, относительно гильбертовой нормы, порожденной математическим ожиданием $\mathbf{E}$. Мы будем отождествлять случайные величины с элементами гильбертова пространства H . Случайный процесс ξ можно рассматривать как кривую в гильбертовом пространстве H^ξ , инвариантную относительно действия группы U (см. [1], [2]). Пространство H^ξ является подпространством H , но не совпадает с ним, вообще говоря. Пусть $\tilde{U}$ есть произвольное продолжение U до сильно непрерывной группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве H . Тогда ξ можно рассматривать также как кривую в H , инвариантную относительно действия группы $\tilde{U}$. Обозначим $\mathcal{J}(\xi)$ множество, состоящее из всех возможных сильно непрерывных групп унитарных операторов в H , относительно которых случайный процесс ξ инвариантен. Введем в пространстве H^ξ возрастающее семейство подпространств H_t^ξ , порожденных приращениями $\xi_s - \xi_r$, $s, r \leq t$, отвечающими за «прошлое» до момента времени t , и убывающее семейство подпространств $H_{|t}^\xi$, порожденное приращениями $\xi_s - \xi_r$, $s, r \geq t$, отвечающими за «будущее» после момента времени t , так что $H^\xi = \vee_t H_t^\xi = \vee_t H_{|t}^\xi$. Отметим, что для процессов с некоррелированными приращениями $H_{|t}^\xi$ и H_t^ξ ортогональны. Фиксируем группу $U \in \mathcal{J}(\xi)$. Сильно непрерывное семейство унитарных операторов $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}}$ в H называется (мультипликативным)

U -коциклом, если выполнено условие

$$W_{t+s} = W_t U_t W_s U_t^*, \quad s, t \in \mathbf{R}, \quad W_0 = I. \quad (C)$$

Коцикл W называется *марковским* при выполнении условия

$$W_t f = f, \quad f \in H_t^\xi, \quad t > 0. \quad (M)$$

Свойство (C) в точности означает, что сильно непрерывное семейство унитарных операторов $\tilde{U} = (W_t U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ образует однопараметрическую группу. Мы понимаем марковость в смысле локализации действия коцикла W на подпространство прошлого. Кроме того, марковское свойство (M) сохраняет «причинность», так что «будущее» системы не возмущается. Отметим, что наше определение марковского коцикла основывается на аналогичном определении, введенном в [8], [9] в значительно более общем случае. Мы отложим примеры марковских коциклов до п. 3, где приведена модель марковского коцикла группы сдвигов на прямой, описывающая все такие коциклы с точностью до унитарной эквивалентности возмущений. Воспользовавшись (C), получаем $I = W_{-t+t} = W_{-t} U_{-t} W_t U_{-t}^*$, $t > 0$, т.е. $W_{-t} = U_t^* W_t U_t$, $t > 0$. Таким образом, можно переписать (M) в виде

$$W_{-t} f = f, \quad f \in H_{[0]}^\xi, \quad t > 0. \quad (M_1)$$

Рассмотрим случайный процесс $\xi^{(1)}$, $\xi^{(1)}(0) = 0$, являющийся непрерывной кривой в гильбертовом пространстве H , и пусть $U^{(1)} \in \mathcal{J}(\xi^{(1)})$. Введем в пространстве H мультипликативный $U^{(1)}$ -коцикл $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}}$.

Предложение 1.1. Пусть W удовлетворяет марковскому свойству (M). Тогда непрерывное относительно параметра t семейство $\xi_t^{(2)} = W_t \xi_t^{(1)}$, $t \leq 0$, $\xi_t^{(2)} = \xi_t^{(1)}$, $t > 0$, есть процесс со стационарными в широком смысле приращениями, являющийся кривой в H , инвариантной относительно группы унитарных операторов $U_t^{(2)} = W_t U_t^{(1)}$, $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Проверим, что $\xi_{t+s}^{(2)} = \xi_t^{(2)} + U_t^{(2)} \xi_s^{(2)}$, $s, t \in \mathbf{R}$. Действительно, для $s, t \leq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \xi_{t+s}^{(2)} &= W_{t+s} \xi_{t+s}^{(1)} = W_{t+s} \xi_t^{(1)} + W_{t+s} U_t^{(1)} \xi_s^{(1)} \\ &= W_t U_t^{(1)} W_s U_{-t}^{(1)} \xi_t^{(1)} + W_t U_t^{(1)} W_s \xi_s^{(1)} = -W_t U_t^{(1)} W_s \xi_{-t}^{(1)} + U_t^{(2)} \xi_s^{(2)} \\ &= -W_t U_t^{(1)} \xi_{-t}^{(1)} + U_t^{(2)} \xi_t^{(2)} = \xi_t^{(2)} + U_t^{(2)} \xi_s^{(2)}, \end{aligned}$$

где мы использовали тождество $W_s \xi_{-t}^{(1)} = \xi_{-t}^{(1)}$, $s, t \leq 0$, справедливое в силу (M₁). Для $s, t > 0$ доказываемое свойство справедливо, поскольку $\xi_t^{(2)} = \xi_t^{(1)}$, $t \geq 0$, по определению. Заметим, что $\xi_t^{(2)} = \xi_t^{(1)} = -U_t^{(1)} \xi_{-t}^{(1)} = -W_t U_t^{(1)} W_{-t} U_{-t}^{(1)} \xi_{-t}^{(1)} = -W_t U_t^{(1)} W_{-t} \xi_{-t}^{(1)} = -U_t^{(2)} \xi_{-t}^{(2)}$, $t > 0$, в силу условия коцикла (C) для W .

Назовем изометрический оператор $R: H^{\xi^{(1)}} \rightarrow H^{\xi^{(2)}}$ марковским, если $Rf = f$, $f \in H_{[0]}^{\xi^{(1)}}$.

Предложение 1.2. Для любого марковского коцикла W существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t} \eta = W_{-\infty} \eta$, $\eta \in H^{\xi^{(1)}}$, причем $W_{-\infty}$ является марковским изометрическим оператором со свойством $W_{-\infty} f = W_{-s} f$, $f \in H_{[-s]}^{\xi^{(1)}}$, $s \geq 0$.

З а м е ч а н и е. Оператор $W_{-\infty}$ является волновым в смысле определения теории Лакса-Филипса. Дальнейшие наши рассуждения могут быть, при желании, переведены на язык этой теории, см. [10], [11].

Доказательство. Заметим, что $W_{-t-s} f = W_{-s} U_{-s}^{(1)} W_{-t} U_t^{(1)} f = W_{-s} f$, $f \in H_{[-s]}^{\xi^{(1)}}$, $s, t \geq 0$, в силу марковского свойства, записанного в виде (M₁). Следовательно, предел существует на множестве элементов $f \in H_{[-s]}^{\xi^{(1)}}$, $s \geq 0$, всюду плотном

в $H^{\xi^{(1)}}$. Таким образом, предел существует по теореме Банаха–Штейнгауза. Пределный оператор $W_{-\infty}$ является марковским, поскольку все операторы W_{-t} , $t \geq 0$, обладают этим свойством.

Предложение 1.3. В пространстве H существует марковский изометрический оператор R со свойством $\xi_t^{(2)} = R\xi_t^{(1)}$, $t \in \mathbf{R}$, тогда и только тогда, когда случайные процессы $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ связаны марковским коциклом $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}}$ по формуле $\xi_t^{(2)} = W_t \xi_t^{(1)}$, $t \leq 0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует марковский изометрический оператор R , такой что $\xi_t^{(2)} = R\xi_t^{(1)}$, $t \in \mathbf{R}$. Проверим выполнение (М) для W ,

$$\begin{aligned} W_t(\xi_r^{(1)} - \xi_s^{(1)}) &= U_t^{(2)} U_{-t}^{(1)} (\xi_r^{(1)} - \xi_s^{(1)}) = U_t^{(2)} (\xi_{r-t}^{(1)} - \xi_{s-t}^{(1)}) \\ &= U_t^{(2)} (\xi_{r-t}^{(2)} - \xi_{s-t}^{(2)}) = \xi_r^{(2)} - \xi_s^{(2)}, \quad r, s \geq t > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали марковское свойство оператора R , в силу которого $\xi_t^{(2)} = R\xi_t^{(1)} = \xi_t^{(1)}$, $t \geq 0$.

Достаточность. Предположим, что $\xi_t^{(2)} = W_t \xi_t^{(1)}$, $t \leq 0$, и коцикл W является марковским. Тогда, согласно предложению 1.2, определен марковский изометрический оператор $W_{-\infty} = \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} W_{-t}$. Рассмотрим процесс $\tilde{\xi}_t^{(2)} = W_{-\infty} \xi_t^{(1)}$. Для $t \geq 0$ получаем $\tilde{\xi}_t^{(2)} = \xi_t^{(1)}$ в силу марковского свойства $W_{-\infty}$. Для $t \leq 0$ представление $W_{-\infty} f = W_{-s} f$, $f \in H_{[-s, \infty)}^{\xi^{(1)}}$, $s \geq 0$, дает $\tilde{\xi}_t^{(2)} = W_t \xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$, $t \leq 0$.

2. Процессы с некоррелированными приращениями. Разложение Вольда. Для любого стационарного в широком смысле случайного процесса ξ найдется группа унитарных операторов $U = (U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ в гильбертовом пространстве, определенном скалярным произведением $(\eta, \zeta) = \mathbf{E}(\eta, \bar{\zeta})$, такая, что $\xi_t = U_t \xi_0$, $t \in \mathbf{R}$. Напомним, что процесс ξ называется недетерминированным, если $\bigwedge_{t \in \mathbf{R}} H_t^{\xi} = 0$, и детерминированным, если $\bigwedge_{t \in \mathbf{R}} H_t^{\xi} = H^{\xi}$. Конечно, существуют процессы, не являющиеся ни недетерминированными, ни детерминированными. Для любого стационарного процесса ξ определено единственным образом разложение $\xi = \xi^{(1)} \oplus \xi^{(2)}$ на детерминированный процесс $\xi^{(1)}$ и недетерминированный процесс $\xi^{(2)}$, причем так, что процессы $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ имеют некоррелированные приращения. Для любого недетерминированного процесса $\xi^{(2)}$, в свою очередь, однозначно определено разложение Вольда

$$\xi_t^{(2)} = \int_{-\infty}^t c(t-s) \zeta(ds), \quad (W)$$

где $\zeta(ds)$ является некоррелированной мерой такой, что $\mathbf{E}|\zeta(ds)|^2 = ds$, $\mathbf{E}(\zeta(\Delta) \bar{\zeta}(\Delta')) = 0$ для любых измеримых непересекающихся множеств Δ и Δ' (см. [12]). Таким образом, любой стационарный процесс $\xi_t = U_t \xi_0$ однозначно определяется процесс с некоррелированными стационарными приращениями ζ_t , являющийся инвариантной кривой относительно группы U . Этот процесс определяет «недетерминированную часть» ξ_t . В дальнейшем мы будем понимать разложение Вольда, как возможность сопоставить каждому стационарному процессу процесс с некоррелированными приращениями, являющийся его недетерминированной частью в указанном выше смысле. Пусть $V = (V_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ есть сильно непрерывная полугруппа неунитарных изометрических операторов в гильбертовом пространстве H . В функциональном анализе разложением Вольда называется представление $H = H^{(1)} \oplus H^{(2)}$, где подпространства $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ приводят полугруппу V к полугруппе унитарных операторов и полугруппе вполне неунитарных изометрических операторов соответственно. Вполне неунитарный изометрический оператор характеризуется тем свойством, что не существует подпространства, приводящего его к унитарному оператору. Любая сильно непрерывная полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов унитарно эквивалентна своей модели — полугруппе $S = (S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ сдвигов вправо функций

из $L^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{H})$, действующей по формуле $(S_t f)(x) = f(x - t)$, $x > t$, $(S_t f)(x) = 0$, $0 \leq x \leq t$. Напомним, что индексом дефекта генератора $d = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} [(V_t - I)/t]$ сильно непрерывной полугруппы V называется число линейно независимых решений уравнения $d^* f = -f$. Гильбертово пространство значений функций $\mathcal{H}$ имеет размерность, равную индексу дефекта генератора V (см. [13]). В дальнейшем мы будем называть индекс дефекта генератора полугруппы индексом полугруппы. Заметим, что любая полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов V с индексом $n > 0$ определяет n некоррелированных процессов $\xi^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, с некоррелированными приращениями для положительных значений времени, так что $\xi_{t+s}^{(i)} = \xi_t^{(i)} + V_t \xi_s^{(i)}$, $s, t \geq 0$. В модельном случае полугруппы сдвигов S в $L^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{H})$ такие процессы могут быть построены следующим образом. Выберем ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$, состоящий из элементов e_i , $1 \leq i \leq n \leq +\infty$, и положим $\xi^{(i)} = e_i \otimes \chi_{[0, t]}$, где $\chi_{[0, t]}$ есть индикаторная функция интервала $[0, t]$. Исследуем поведение процессов с некоррелированными приращениями относительно «возмущений» марковскими коциклами, введенными в предыдущем пункте.

Предложение 2.1. Пусть ξ и W — процесс с некоррелированными приращениями и марковский коцикл соответственно. Тогда процесс $\xi'_t = W_t \xi_t$, $t \leq 0$, $\xi'_t = \xi_t$, $t > 0$, является процессом с некоррелированными приращениями.

Доказательство. Из предложения 1.3 следует, что марковский изометрический оператор $W_{-\infty} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t}$ связывает возмущенный и невозмущенный процессы формулой $\xi'_t = W_{-\infty} \xi_t$, $t \in \mathbf{R}$.

Пусть процесс с некоррелированными приращениями $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ инвариантен относительно группы преобразований $U = (U_t)_{t \in \mathbf{R}}$.

Предложение 2.2. Сужение $V_t = U_{-t}|_{H^\xi_0}$, $t \geq 0$, определяет полугруппу вполне неунитарных изометрических операторов в гильбертовом пространстве H^ξ_0 с индексом единица.

Доказательство. Любая полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов с индексом единица унитарно эквивалентна своей модели — полугруппе сдвигов вправо $S = (S_t)_{t \geq 0}$, действующей в пространстве $L^2(\mathbf{R}_+)$ по формуле $(S_t f)(x) = f(x - t)$, $x > t$, $(S_t f)(x) = 0$, $0 \leq x \leq t$ (см. [13]). Определим непрерывную кривую $\eta = (\eta_t)_{t \geq 0}$ в $L^2(\mathbf{R}_+)$ так, что $\eta_t(x) = 1$, $0 \leq x \leq t$, $\eta_t(x) = 0$, $x > t$. Линейные комбинации элементов кривой η образуют плотное множество в пространстве $L^2(\mathbf{R}_+)$ и $\eta_{t+s} = \eta_t + S_t \eta_s$, $s, t \geq 0$. Заметим, что, в силу стационарности и ортогональности приращений кривой, $\|\xi_t\|^2 = \|\sum_{i=1}^n (\xi_{it/n} - \xi_{(i-1)t/n})\|^2 = n \|\xi_{t/n}\|^2$ и $\|\xi_t\|^2/t = \sigma^2 = \text{const}$. Таким образом, кривую ξ можно представить в виде $\xi_t = \sigma^2 \mu_t$, где мера $d\mu_t$ со значениями в H удовлетворяет условиям $\mu(\Delta_1) \perp \mu(\Delta_2)$ для непересекающихся измеримых множеств $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbf{R}$ и $\|d\mu_t\|^2 = dt$. Определим унитарный оператор $W: H^\xi_0 \rightarrow L^2(\mathbf{R}_+)$ по формуле $W\mu_t = \eta_t$, тогда $V_t = W^* S_t W$, $t \geq 0$.

Пусть $V = (V_t)_{t \geq 0}$ есть полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов в H^ξ_0 , определенная в предложении 2.2.

Предложение 2.3. Марковский коцикл W задает полугруппу изометрических операторов $\tilde{V} = (W_{-t} V_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ в H^ξ_0 с индексом единица. Разложение Вольда $H^\xi_0 = H^{(1)} \oplus H^{(2)}$, отвечающее полугруппе $\tilde{V}$, определяется формулой $H^{(2)} = W_{-\infty} H^\xi_0$, где $W_{-\infty} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t}$.

Доказательство. В силу предложений 1.2 и 1.3, существует предел $W_{-\infty} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t}$, причем марковский изометрический оператор $W_{-\infty}$ обладает свойством $W_t \xi_t = W_{-\infty} \xi_t$, $t \leq 0$. Пусть $H^{(1)}$ есть подпространство H^ξ , задаваемое условием ортогональности ко всем элементам $W_{-\infty} \xi_t$, $t \in \mathbf{R}$. Это подпространство является инвариантным относительно действия группы унитарных операторов $W_t U_t$, $t \in \mathbf{R}$. С другой стороны, в силу марковского свойства $W_{-\infty}$, подпространство $H^{(1)}$ ортогонально ко всем элементам $W_{-\infty} \xi_t = \xi_t$, $t \geq 0$, и, следовательно, $H^{(1)} \subset H^\xi_0$. Итак, мы доказали, что подпространство $H^{(1)} \subset H^\xi_0$ инвариантно относительно группы унитарных операторов $(W_t U_t)_{t \in \mathbf{R}}$. Следовательно, суже-

ние $V_t|_{H^{(1)}} = W_{-t}U_{-t}|_{H^{(1)}}$, $t \geq 0$, состоит из унитарных операторов. Подпространство $H^{(2)} \subset H^\xi$ определяется условием ортогональности к $H^{(1)}$, т.е. $H^{(2)} = W_{-\infty}H^\xi$, по определению $H^{(1)}$. Таким образом, сужение $V|_{H^{(2)}}$ является полугруппой вполне неунитарных изометрических операторов согласно предложению 2.2.

3. Модель марковского коцикла для процесса с некоррелированными приращениями. Пусть $S = (S_t)_{t \in \mathbf{R}}$ есть поток сдвигов на прямой, действующий по формуле $(S_t \eta)(x) = \eta(x+t)$, $x, t \in \mathbf{R}$, $\eta \in H = L^2(\mathbf{R})$. С группой S естественным образом ассоциирован случайный процесс $\xi_t = \chi_{[-t, 0]}$ с некоррелированными приращениями, так что $\xi_{t+s} = \xi_t + S_t \xi_s$, $s, t \in \mathbf{R}$. Пусть подпространство H_t состоит из функций f с носителем $\text{supp } f \subset [-t, +\infty)$. Тогда H_t порождается приращениями $\xi_s - \xi_r$, $s, r \leq t$. Сужения $T_t = S_{-t}|_{H_0}$, $t \geq 0$, образуют полугруппу сдвигов вправо T . Любое инвариантное подпространство $T_t \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, $t \geq 0$, может быть описано как образ изометрического оператора M_Θ , $\mathcal{V} = M_\Theta H_0$, где $M_\Theta = \mathcal{L}^{-1} \Theta \mathcal{L}$. Здесь $\mathcal{L}$ есть преобразование Лапласа, а Θ — оператор умножения на внутреннюю функцию Θ в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$. Напомним, что функция $\Theta(\lambda)$ называется внутренней, если она аналитическая в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$ и равная по модулю единице на мнимой оси (см. [13]). Обозначим $P_{[0, t]}$, $P_{[t, +\infty)}$, $P_\mathcal{V}$, $P_{\mathcal{V}^\perp}$ ортогональные проекторы на подпространства функций с носителем на отрезке $[0, t]$, функций с носителем на полуинтервале $[t, +\infty)$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^\perp$ соответственно.

Предложение 2.3 показывает, что любое возмущение марковским коциклом W группы сдвигов, отвечающей процессу с некоррелированными приращениями, полностью описывается унитарной частью $R = \tilde{V}|_{H^{(1)}}$ полугруппы изометрических операторов $\tilde{V} = (W_{-t}V_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$. В следующей теореме мы построим марковские коциклы, приводящие к полугруппе R , унитарно эквивалентной любой наперед заданной. Тем самым вводится модель, описывающая все марковские коциклы с точностью до унитарной эквивалентности возмущений.

Теорема 3.1. Пусть $R = (R_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ есть произвольная сильно непрерывная полугруппа унитарных операторов в пространстве $\mathcal{V}^\perp$, где $\mathcal{V}$ инвариантно относительно полугруппы сдвигов вправо T . Тогда семейство унитарных операторов $(W_t)_{t \in \mathbf{R}}$, заданное для отрицательных $-t$ формулой

$$\begin{aligned} W_{-t} \eta &= (R_t P_{\mathcal{V}^\perp} S_t - P_\mathcal{V}) P_{[t, +\infty)} \eta + M_\Theta P_{[0, t]} \eta, & \eta \in H_0, \\ W_{-t} \eta &= \eta, & \eta \in H_0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

и продолженное для положительных t по формуле $W_t = S_t W_{-t}^* S_{-t}$, $t \geq 0$, является марковским коциклом, причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{-t} \eta = M_\Theta \eta$, $\eta \in H_0$. Полугруппа R определяет унитарную часть полугруппы изометрических операторов $(W_{-t}T_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ в пространстве H_0 , отвечающую ей согласно разложению Вольда.

Доказательство. Заметим, что проектор $P_\mathcal{V}$ и изометрический оператор M_Θ коммутируют с действием изометрических операторов $T_t = S_{-t}$, $t \geq 0$, и проектора $P_{[t, +\infty)}$. Следовательно, семейство унитарных операторов $W_{-t}S_{-t} = (R_t P_{\mathcal{V}^\perp} - S_{-t} P_\mathcal{V}) P_{H_0} + (M_\Theta P_{[0, t]} + P_{H_0}) S_{-t}$, $t \geq 0$, образует полугруппу в H . Сужение $V_t = W_{-t}S_{-t}|_{H_0}$, $t \geq 0$, образует полугруппу неунитарных изометрических операторов в H_0 с разложением Вольда $H = \mathcal{V}^\perp \oplus \mathcal{V}$. Действительно, сужение $V_t|_\mathcal{V}$ сплетается с полугруппой сдвигов вправо изометрическим оператором M_Θ , осуществляющим унитарное отображение H_0 на $\mathcal{V}$, так что $V_t|_\mathcal{V} M_\Theta = M_\Theta T_t$, $t \geq 0$. Таким образом, $V|_\mathcal{V}$ и T унитарно эквивалентны. Сужение $V|_{\mathcal{V}^\perp} = R$. Следовательно, $V = (W_{-t}T_t)_{t \geq 0}$ является полугруппой изометрических операторов с индексом единицы и унитарной частью R .

Ниже, используя модель марковского коцикла, введенную в теореме 3.1, мы построим марковские коциклы со свойством $W_t - I \in s_2$, $t \in \mathbf{R}$. Такие коциклы естественно было бы назвать внутренними ввиду дальнейших приложений в квантовой вероятности (см. [15], [16], [22]). Действительно, это условие появляется, в частности, как условие внутренней автоморфизма алгебры фермионов, порожденного унитарным оператором W (см. [14], [15], [22]). Можно обосновать появление этого условия

следующим образом. Попытки ввести в гильбертовом пространстве H меру, удовлетворяющую естественным условиям, привели к построению меры белого шума на пространстве E^* , включенном в тройку $E \subset H \subset E^*$, где мы обозначили E^* сопряженное пространство линейных функционалов на пространстве E , плотном в H (см. [17]). Такая ситуация, в частности, реализуется, когда $\xi \in H$ входят в параметрическое множество обобщенного случайного процесса. Для любых $\xi \in E$, $x \in E^*$ обозначим $\langle x, \xi \rangle$ соответствующее соотношение двойственности. Заметим, что если $x \in H$, то $\langle x, \xi \rangle = (x, \xi)$ совпадает со скалярным произведением в H . Фиксируем положительный ограниченный оператор R в пространстве H . Тогда существует такое пространство (Ω, μ) с гауссовской мерой μ , что $\int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x) = e^{-(\xi, R\xi)}$, $\xi \in E \subset H$. Будем считать, что унитарный оператор W в H меняет не элементы H , а меру μ на некоторую другую гауссовскую меру $\tilde{\mu}$, так что $\int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\tilde{\mu}(x) = e^{-(\xi, W^* R W \xi)}$, $\xi \in E \subset H$. Естественно задаться вопросом: когда гауссовские меры, определяемые операторами R и $W^* R W$, эквивалентны? Критерий Фельдмана (см. [18], [19]) дает условие $(\xi, R\xi) - (\xi, W^* R W \xi) = (\xi, \Delta \xi)$, где Δ — симметрический оператор класса Гильберта-Шмидта. Таким образом, $R - W^* R W \in s_2$, что может быть переписано в форме $W R - R W \in s_2$. Такое условие будет выполнено для любого положительного оператора R , если $W - I \in s_2$. Отметим, что условие типа Фельдмана встречается в [20] как условие квазиэквивалентности гауссовских состояний на алгебре бозонов.

Пусть внутренняя функция Θ , фигурирующая в условии теоремы 3.1, является произведением Бляшке (см. [13]), построенным по комплексным числам λ_k , $1 \leq k \leq N \leq +\infty$. Следуя [15], [21], [22], подберем действительные части чисел λ_k так, чтобы

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \sum_{k=1}^N |\operatorname{Re} \lambda_k| < +\infty, \quad (B)$$

мнимые числа могут быть взяты произвольно, тогда $\Theta(\lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda + \bar{\lambda}_k) / (\lambda - \lambda_k)$. Произведение Бляшке $\Theta(\lambda)$ является голоморфной аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и равно единице по модулю на мнимой оси. Соответствующее подпространство $\mathcal{V}$ гильбертова пространства $H_{[0]} = L^2(\mathbf{R}_+)$, инвариантное относительно полугруппы сдвигов вправо, определяется условием ортогональности ко всем экспонентам $e^{\lambda_k x}$, $1 \leq k \leq N$. Отметим, что условие (B) не является необходимым для сходимости произведения Бляшке. Это условие подробно исследовано в [23], где показано, что оно необходимо и достаточно для того, чтобы произведение Бляшке Θ обладало свойствами $\Theta - I \in H^2$ (класс Харди в правой полуплоскости) и $\operatorname{Re}(\Theta - I) \in L^1(i\mathbf{R})$. Пусть функции g_k , $1 \leq k \leq N$, получены последовательной ортогонализацией системы $e^{\lambda_k x}$. Тогда $(g_k, g_l) = \delta_{kl}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}^\perp$. Определим сильно непрерывную полугруппу унитарных операторов $R = (R_t)_{t \in \mathbf{R}}$ по формуле $R_t g_k = e^{i \operatorname{Im} \lambda_k t} g_k$, $1 \leq k \leq N$, $t \in \mathbf{R}_+$.

Теорема 3.2. *Марковский коцикл $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}}$, отвечающий, согласно теореме 3.1, внутренней функции Θ и полугруппе унитарных операторов R , построенным выше, является внутренним, т.е. удовлетворяет свойству $W_t - I \in s_2$, $t \in \mathbf{R}$.*

Следствие 3.1. *Возмущая полугруппу сдвигов T внутренним марковским коциклом, можно получить полугруппу изометрических операторов, унитарная часть которой обладает любым наперед заданным точечным спектром.*

Доказательство следствия. Полугруппа R является унитарной частью полугруппы $(W_{-t} T_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ в пространстве $H_{[0]}$, согласно теореме 3.1. Точечный спектр R состоит из мнимых чисел $i \operatorname{Im} \lambda_k$, $1 \leq k \leq N \leq +\infty$, на которые не наложено никаких условий.

Доказательство теоремы 3.2. Заметим, что $W_{-t} \eta - \eta = 0$, $\eta \in H_{[0]}^\perp$, $t > 0$. Таким образом, нам нужно доказать сходимость ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} \|W_{-t} \eta_i - \eta_i\|^2$ для какого-нибудь ортонормированного базиса $(\eta_i)_{i=1}^{+\infty}$ пространства $H_{[0]}$. Разобьем $W_{-t} - I|_{H_{[0]}}$ на две части, так что

$$W_{-t} \eta - \eta = (R_t P_{\mathcal{V}^\perp} S_t - P_{\mathcal{V}^\perp}) P_{[t, +\infty)} \eta + (M_\Theta - I) P_{[0, t]} \eta, \quad \eta \in H_{[0]}, \quad t > 0,$$

и докажем сходимость рядов, отвечающих этим частям, т.е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|(R_t P_{\mathcal{V}^\perp} S_t - P_{\mathcal{V}^\perp}) P_{[t, +\infty)} \eta_k\|^2 < +\infty, \quad (r1)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|(M_\Theta - I) P_{[0, t]} \eta_k\|^2 < +\infty. \quad (r2)$$

Для проверки (r1) достаточно доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^N \|(R_t - P_{\mathcal{V}^\perp} S_t^* P_{\mathcal{V}^\perp}) g_k\|^2$, где функции $(g_k)_{k=1}^N$, образующие ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}^\perp$, получены последовательной ортогонализацией экспонент $e^{\lambda_k x}$. Представим R_t в виде суммы $R_t^{(1)}$ и $R_t^{(2)}$, где $R_t^{(1)} g_k = e^{\lambda_k t} g_k$, а $R_t^{(2)} g_k = (e^{i \operatorname{Im} \lambda_k t} - e^{\lambda_k t}) g_k$, $1 \leq k \leq N$, $t > 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^N \|(R_t^{(1)} - P_{\mathcal{V}^\perp} S_t^* P_{\mathcal{V}^\perp}) g_k\|^2$ сходится согласно теореме о триангуляции усеченного сдвига (см. [13]). Заметим, что $\sum_{k=1}^N |e^{i \operatorname{Im} \lambda_k t} - e^{\lambda_k t}| = \sum_{k=1}^N |1 - e^{\operatorname{Re} \lambda_k t}|$, а последний ряд сходится, поскольку $\sum_{k=1}^N |\operatorname{Re} \lambda_k| < +\infty$. Следовательно, $R_t^{(2)} \in s_1$ (ядерный оператор), так что

$$\sum_{k=1}^N \|(R_t - P_{\mathcal{V}^\perp} S_t^* P_{\mathcal{V}^\perp}) g_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^N \|(R_t^{(1)} - P_{\mathcal{V}^\perp} S_t^* P_{\mathcal{V}^\perp}) g_k\|^2 + \sum_{k=1}^N \|R_t^{(2)} g_k\|^2 < +\infty.$$

Для доказательства (r2) достаточно найти семейство функций $f_k(x)$, $k \in \mathbf{Z}$, плотное в пространстве $H_{[0, t]} = P_{[0, t]} H$, для которого существует ограниченный оператор V с ограниченным обратным V^{-1} , так что семейство $(V f_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ образует ортонормированный базис в $H_{[0, t]}$, и для него доказать сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|(M_\Theta - I) f_k\|^2 < +\infty$. Семейство $(f_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ с указанными выше свойствами называется базисом Рисса пространства $H_{[0, t]}$. Каноническим примером такого базиса является семейство экспонент $f_k = e^{\mu_k x}$, $x \in [0, t]$, с показателями $\mu_k = -1/(2|k|) + i2\pi k/t$, $k \in \mathbf{Z}$. Доопределим нулем значения $f_k(x)$ для $x \notin [0, t]$. Тогда $f_k = f_k^{(1)} - f_k^{(2)}$, где $f_k^{(1)} = e^{\mu_k x}$, $x \in \mathbf{R}_+$, $f_k^{(2)} = e^{\mu_k x}$, $x \geq t$, и $f_k^{(1)}(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}_-$, $f_k^{(2)}(x) = 0$, $x < t$. Используя равенство Парсеваля для преобразования Лапласа и изометричность оператора умножения на произведение Бляшке Θ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|(M_\Theta - I) f_k\|^2 &\leq 2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\|(M_\Theta - I) f_k^{(1)}\|^2 + \|(M_\Theta - I) f_k^{(2)}\|^2) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\|(\Theta - I) \tilde{f}_k^{(1)}\|^2 + \|(\Theta - I) \tilde{f}_k^{(2)}\|^2) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \{(\|\tilde{f}_k^{(1)}\|^2 - \operatorname{Re}(\Theta \tilde{f}_k^{(1)}, \tilde{f}_k^{(1)})) \\ &\quad + (\|\tilde{f}_k^{(2)}\|^2 - \operatorname{Re}(\Theta \tilde{f}_k^{(2)}, \tilde{f}_k^{(2)}))\}, \end{aligned} \quad (B1)$$

где $\tilde{f}_k^{(1)}(\lambda) = 1/(\lambda \mu_k)$, $\tilde{f}_k^{(2)} = e^{\mu_k t} e^{-t\lambda}/(\lambda - \mu_k)$ есть преобразования Лапласа функций $f_k^{(1)}$ и $f_k^{(2)}$. Применяя технику вычисления вычетов, получаем

$$(\Theta \tilde{f}_k^{(i)}, \tilde{f}_k^{(i)}) = \Theta(-\overline{\mu_k}) \|\tilde{f}_k^{(i)}\|^2, \quad i = 1, 2. \quad (B2)$$

Заметим, что

$$\ln \Theta(\lambda) = \sum_{k=1}^N \left(\ln \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda} \right) - \ln \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda} \right) \right) = \frac{\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \lambda_k}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Откуда следует,

$$\Theta(\lambda) = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re} \lambda_k}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (B3)$$

Подставляя в (B1) формулы (B2) и (B3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|(M_\Theta - I) f_k\|^2 &\leq C_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - \operatorname{Re} \Theta(-\overline{\mu_k})) \\ &\leq C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1/(2|k|)}{1/(4k^2) + 4\pi^2 k^2/t^2} \leq C_3 \frac{1}{|k|^3} < +\infty, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 и C_3 есть некоторые положительные константы.

Автор признателен А. С. Холево за постоянное обсуждение и многочисленные полезные замечания, позволившие существенно улучшить работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 1, с. 6–9.
2. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 2, с. 115–118.
3. Браун К. С. Когомологии групп. М.: Наука, 1987, 384 с.
4. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.: Мир, 1984, 262 с.
5. Parthasarathy K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhäuser, 1992, 290 p.
6. Holevo A. S. Statistical Structure of Quantum Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 159 p.
7. Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика. — Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр., 1991, т. 83, с. 5–132.
8. Accardi L. On the quantum Feynman–Kac formula. — Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1978, v. 48, p. 135–180.
9. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes. — Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1982, v. 18, № 1, p. 97–133.
10. Адамян В. М., Аров Д. З. Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий. — Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 1, с. 9–12.
11. Адамян В. М., Аров Д. З. Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовом пространстве. — Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 1, с. 9–12.
12. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963, 284 с.
13. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980, 384 с.
14. Murakami T., Yamagami S. On types of quasifree representations of Clifford algebras. — Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1995, v. 31, p. 33–44.
15. Amosov G. G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K -flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup. — Infin. Dimen. Anal., Quantum Probab. Relat. Top., 2000, v. 3, № 2, p. 237–246.
16. Амосов Г. Г., Булинский А. В., Широков М. Е. Регулярные полугруппы эндоморфизмов факторов Неймана. — Матем. заметки., 2001, т. 70, № 5, с. 643–659.
17. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
18. Feldman J. Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. — Pacific J. Math., 1958, v. 8, p. 699–708. Corrections: 1959, v. 9, p. 1295–1296.
19. Guichardet A. Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1972, 197 p. (Lecture Notes in Math., v. 261.)
20. Araki H., Yamagami S. On quasi-equivalence of quasifree states of the canonical commutation relation. — Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1982, v. 18, № 2, p. 703–758.
21. Амосов Г. Г. Об аппроксимации непрерывных полугрупп изометрий в гильбертовом пространстве. — Изв. вузов, сер. матем., 2000, № 6, с. 7–12.
22. Амосов Г. Г. Аппроксимация по модулю s_2 изометрических операторов и коциклическая сопряженность эндоморфизмов алгебры КАС. — Фундам. и прикл. матем., 2001, т. 7, № 3, с. 925–930.

23. Baranov A. D. Isometric embeddings of the spaces K_Θ in the upper half-plane. — J. Math. Sci. (New York), 2001, v. 105, № 5, p. 2319–2329.

Поступила в редакцию
23.V.2002

© 2004 г.

ВЛАСЕНКО М. А.*

МЕРЫ ПОСЕЩЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С УБЫВАЮЩИМИ НОРМИРОВКАМИ¹⁾

Для последовательности одинаково распределенных случайных величин $\{x_n, n \geq 1\}$, удовлетворяющей определенному условию перемешивания, исследуются локальные меры посещения последовательностей $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с различными монотонно убывающими к 0 числовыми последовательностями $\{a_n, n \geq 1\}$. Получены достаточные условия того, что меры $\{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(x_k/a_k)^{-1}, n \geq 1\}$ являются локальными мерами посещения $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с вероятностью 1.

Ключевые слова и фразы: локальные меры посещения, перемешивание.

0. Введение. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Считающими мерами последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ называется последовательность мер $\nu_n = \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}, n \geq 1$.

Считающие меры содержат всю информацию о последовательности. Поэтому ее поведение на бесконечности может быть описано в терминах считающих мер. Однако они устроены так же сложно, как и сама последовательность. Естественно попытаться заменить считающие меры более простой последовательностью мер, которая по-прежнему характеризовала бы $\{x_n, n \geq 1\}$ на бесконечности. Следующие определения были введены в [1] и [3].

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность конечных на компактах мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ на борелевской σ -алгебре называется возрастающей, если $\lambda_{n+1}(\Delta) \geq \lambda_n(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ при всех n и $\lambda_n(\mathbf{R}) \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$.

Считающие меры последовательности действительных чисел являются примером возрастающей последовательности мер. Следующее определение обобщает понятие множества частичных пределов.

О п р е д е л е н и е 3. Для возрастающей последовательности мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ множество $\mathcal{M}_\lambda = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0: \lambda_n((x - \varepsilon; x + \varepsilon)) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$ называется ее предельным множеством, а элементы $\mathcal{M}_\lambda$ — точками роста последовательности $\{\lambda_n, n \geq 1\}$.

Предельным множеством считающих мер $\{\nu_n, n \geq 1\}$ последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ является множество ее частичных пределов. Пусть Δ — окрестность некоторого частичного предела. Тогда $\{x_n, n \geq 1\}$ посетит Δ бесконечно много раз; возрастающая последовательность чисел $\{\nu_n(\Delta), n \geq 1\}$ показывает динамику появления членов последовательности в Δ . Если нас не интересуют подробности этого процесса, то посещение множества Δ можно характеризовать произвольной последовательностью, эквивалентной $\nu_n(\Delta)$ при $n \rightarrow \infty$. Это и мотивирует следующее определение эквивалентности последовательностей мер.

О п р е д е л е н и е 4. Возрастающие последовательности мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ и $\{\mu_n, n \geq 1\}$ называются локально равносходящимися, если $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\mu \neq \emptyset$ и

* Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, 01601 Киев, Украина; e-mail: mariyka@imath.kiev.ua; url: <http://masha.org.ua>