Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, М. Л. Клепцына, Об эргодических фильтрах в непрерывном времени с ошибкой в начальных данных, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 240–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:55:47

© 2008 г. ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*, КЛЕПЦЫНА М. Л.**

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ ФИЛЬТРАХ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ С ОШИБКОЙ В НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для класса неравномерно эргодических марковских диффузионных процессов с наблюдениями, возмущенными винеровским процессом, установлено, что ошибочные начальные данные забываются в топологии сходимости по вариации. Получена оценка скорости сходимости.

Ключевые слова и фразы: нелинейная фильтрация марковских процессов, ошибки в начальных данных.

1. Введение

Мы рассматриваем задачу фильтрации в непрерывном времени для марковского диффузионного процесса (X_t) со значениями в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ и наблюдаемой компоненты (Y_t) из $\mathbf{R}^\ell$, удовлетворяющих системе нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dX_t = b(X_t) dt + dW_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$dY_t = h(X_t) dt + dB_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

с начальными данными X_0 и $Y_0 = 0$, где (W_t, B_t) — $(d + \ell)$ -мерный винеровский процесс, $b(\cdot)$ — d -мерная вектор-функция, $h(\cdot)$ — ℓ -мерная вектор-функция, случайная величина X_0 независима от W и B .

Пусть μ_0 обозначает точное начальное распределение X_0 . Вопрос, рассматриваемый в данной работе, — об асимптотическом поведении фильтра в случае, когда это начальное распределение неизвестно и вместо μ_0 дано другое распределение ν_0 . При условии *равномерной эргодичности* в [1] для непрерывного времени и в [18] и [7] для дискретного

* University of Leeds, Department of Statistics, Leeds, West Yorkshire, LS2 9JT, UK; Институт проблем передачи информации, Россия; e-mail: A.Veretennikov@leeds.ac.uk

** Université du Maine, Faculté des Sciences, Laboratoire de Statistiques et Processus, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans CEDEX 9, France; e-mail: Marina.Kleptsyna@univ-lemans.fr

времени доказано, что оптимальный фильтр асимптотически не зависит от ошибочных начальных данных, а также установлены некоторые оценки. Данная задача также рассматривалась в работах [16], [20] и др.

Некомпактный (нелинейный) случай, фактически, начали исследовать лишь в последнее десятилетие. Задача с малым шумом в наблюдениях изучалась в [4]. В работе [3] шум в наблюдениях предполагался ограниченным и удовлетворяющим некоторому дополнительному условию на плотность. В [18] предполагались выполненными ограничительные условия перемешивания или «псевдоперемешивания» на условное переходное ядро; последнее включает требование малости шума в наблюдениях, и ни одно из этих условий не допускает гауссовского шума, который, конечно, является самым естественным и интересным примером. В [22] данная задача решалась (при некоторых дополнительных ограничениях) с помощью вариационного подхода для систем со сносом градиентного типа и линейными наблюдениями. Постановка данной работы не требует ничего из ограничений, перечисленных выше.

Авторами был предложен новый подход для случая дискретного времени (см. [10]), и в данной работе представлен его аналог для непрерывного времени. Как и в компактном случае, здесь полезна проективная метрика Биркгофа. Хотя основные «дискретные» идеи — те же, переход к непрерывному времени не совсем очевиден, так как здесь приходится работать, в том числе, с плотностью в бесконечномерном пространстве. В частности, некоторые технические шаги здесь сильно отличаются от их аналогов в [10]. Так, свойство локального сжатия, или условие локального перемешивания, здесь обеспечивается неравенством Харнака; в дискретном варианте оно следовало непосредственно из условий на плотность шума в сигнале. Отметим, что в предшествующих работах, посвященных непрерывному времени, свойство перемешивания выводилось из других оценок переходной плотности; однако неравенство Харнака здесь является наиболее подходящим и наиболее общим средством, как и в проблеме перемешивания для безусловной динамики. Другая трудность по сравнению с дискретным случаем состоит в том, что в дискретном времени «условие локального перемешивания» для безусловного переходного ядра влечет такое же условие и для условного ядра, и с той же константой перемешивания. Здесь такое, по-видимому, невозможно из-за необходимости интегрирования вдоль целой траектории сигнала, скажем, на единичном интервале, что отсутствует в дискретном случае. Для того чтобы бороться с данной трудностью, мы вводим условие гладкости на функцию h . Данный подход может оказаться полезным и для более широкого класса систем, нежели (1)–(2), так как само неравенство Харнака известно в гораздо более общей ситуации (см. [13] или [15]). Мы ограничились более простым случаем с целью не перегружать изложение, а более общие случаи оставляем до будущих исследований.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 приведены предположения и основные результаты; раздел 3 посвящен доказательству первого основного результата, при условии (A3), раздел 4 — второго, без названного условия. Часть рассуждений в пункте 3 доказательства теоремы 1 можно было бы заменить ссылкой на результат работы [6], на что любезно обратил наше внимание второй автор цитируемой работы незадолго до корректуры. Мы не стали переделывать доказательство по нескольким причинам, одна из которых, хотя и не единственная — полнота изложения. Последнее независимо от [10]; отметим, однако, что непрерывный случай полезен для понимания дискретного, и наоборот.

2. Предположения и основные результаты

2.1. Предположения. Первая группа предположений предназначена для случаев экспоненциальной или полиномиальной устойчивости, при этом функция h может иметь любой линейный рост, лишь бы только функция ∇h была ограничена. Важную роль играет условие абсолютной непрерывности (A3). Эти предположения используются в теореме 1.

(A1) Функция b локально ограничена и существуют $p \in \{0, 1\}$, $M > 0$ и $r \in (0, +\infty]$ такие, что

$$\left\langle b(x), \frac{x}{|x|^{1-p}} \right\rangle \leq -r, \quad |x| \geq M; \quad (3)$$

при $p = 1$ это понимается как предел, притом с $r = +\infty$, т.е.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle b(x), x \rangle = -\infty. \quad (4)$$

(A2) Функция h удовлетворяет условиям $h \in C^2$, $\|\nabla h\|_{C^1} < \infty$.

(A3) Мера μ_0 абсолютно непрерывна относительно ν_0 и

$$\left\| \frac{d\mu_0}{d\nu_0} \right\|_{L_\infty(\nu_0)} \leq C < \infty;$$

кроме того, оба начальных распределения μ_0 и ν_0 обладают некоторым экспоненциальным моментом, т.е. существует такое $c > 0$, что

$$\int e^{c|x|} (\mu_0(dx) + \nu_0(dx)) < \infty. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. Условие об экспоненциальном моменте для начальных мер в (A3) можно ослабить в случае $p = 1$. В условии (A3) норму $L_\infty(\nu_0)$ можно заменить нормой $L_a(\nu_0)$, $a > 1$; это изменит постоянные, но не экспоненциальный или лучший любого полиномиального характер сходимости. Отметим, однако, что при $a = 1$ данный метод позволяет получить лишь сходимость по вероятности без какой-либо оценки. Специальный случай, где при $a = 1$ можно получить некоторые оценки, описан в теореме 2 ниже. Возможно ослабить условие

$\|\nabla h\|_{C^1} < \infty$, допуская определенный рост функции $\|\nabla^2 h\|$ на бесконечности, используя идеи в духе больших отклонений, но в данной работе это направление не затрагивается.

Вторая группа предположений обслуживает ситуацию, когда условие (A3) может нарушаться. Эти предположения используются в теореме 2.

(A'1) Вектор-функция b локально ограничена и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle b(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = -\infty. \quad (6)$$

(A'2) Вектор-функция h ограничена, более того, $h \in C_b^2$, т.е. ограничены и все ее производные до второго порядка.

(A'3) Мера μ_0 абсолютно непрерывна относительно ν_0 :

$$\mu_0 \ll \nu_0;$$

кроме того, обе начальные меры обладают всеми экспоненциальными моментами, т.е. при всяком $c > 0$

$$\int e^{c|x|} (\mu_0(dx) + \nu_0(dx)) < \infty. \quad (7)$$

2.2. Постановка задачи и основной результат. Для того чтобы поставить задачу, необходимо начать с алгоритма, решающего «точную задачу фильтрации». Этот алгоритм зависит, как явно, так и неявно, от начальных условий. «Ошибочные начальные данные» означают, что в этот алгоритм мы собираемся подставить новое начальное распределение вместо исходного. Перейдем к описанию алгоритма.

Условное, или фильтрованное, распределение процесса X_t при заданных наблюдениях $Y = (Y_s, 0 \leq s \leq t)$ строится следующим образом. Рассмотрим семейство стохастических экспонент

$$\rho_{0,t}(X, Y) = \exp \left(\int_0^t h(X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(X_s) ds \right),$$

где $h^2 = |h|^2$, $hY \equiv h^*Y$ (здесь и далее $*$ означает транспонирование), и

$$\gamma_{0,t}(X, Y) = \exp \left(- \int_0^t h(X_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(X_s) ds \right).$$

Поскольку процессы X и B независимы, $\gamma_{0,t}$ является плотностью вероятностной меры.

Отметим, что $\rho = \gamma^{-1}$ относительно как исходной меры $\mathbf{P}$, так и меры $\mathbf{P}^\gamma$, где $d\mathbf{P}^\gamma = \gamma d\mathbf{P}$ (см. [19]). Согласно формуле Байеса–Каллианпура–Стрибел (см. [9, гл. 11]),

$$\mathbf{E}_{\mu_0}(f(X) | Y) = \frac{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \rho_{0,t}(X, Y) | Y)}{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\rho_{0,t}(X, Y) | Y)}. \quad (8)$$

Здесь и далее все выражения типа $\mathbf{E}(\cdot | Y)$ означают $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_t^Y)$; такая маленькая вольность в обозначениях не должна привести к недоразумению, так как t фиксировано до конца текста. Кроме того, всякий раз, когда мы говорим, что нам дана сигма-алгебра $\mathcal{F}_t^Y$, мы имеем в виду, что нам известна траектория $(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, так что замена $|\mathcal{F}_t^Y$ на $|Y$ естественна. Отметим, что $f(X)$ здесь может означать как функцию от значения X_t , так и функцию от всей траектории $X_s, 0 \leq s \leq t$. Для удобства читателя и из методических соображений напомним вкратце доказательство равенства (8). Для всякой ограниченной измеримой функции $g = g(Y)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mu_0} g \frac{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \gamma^{-1} | Y)}{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y)} &= \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma \gamma^{-1} g \frac{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \gamma^{-1} | Y)}{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y)} \\ &= \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma \left(g \frac{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \gamma^{-1} | Y)}{\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y)} (\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\gamma^{-1}) | Y) \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma (g \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \gamma^{-1} | Y)) = \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma (g f(X) \gamma^{-1}) = \mathbf{E}_{\mu_0} (g f(X)). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу определения условной вероятности, справедлива формула (8). Как объясняется ниже, обе части отношения в (8) можно выбрать *непрерывными* относительно траектории Y в топологии равномерной сходимости. Алгоритм фильтрации будет использовать всегда только такие версии условных математических ожиданий.

Таким образом, полезно ввести следующие операторы S_t^Y :

$$\mu S_t^Y(A) := \int \mathbf{E}_{x_0}^\gamma(\mathbf{1}(X_t \in A) \rho_{0,t}(X, Y) | Y) \mu(dx_0).$$

Тогда, согласно (8), $\mathbf{P}_{\mu_0}$ -почти наверное,

$$\mathbf{P}_{\mu_0}(X_t \in \cdot | Y) = d_t^{\mu_0}(Y) \mu_0 S_t^Y(\cdot), \quad (9)$$

где $d_t^{\mu_0} = d_t^{\mu_0}(Y)$ — константа нормировки, т.е.

$$d_t^{\mu_0}(Y)^{-1} = \mu_0 S_t^Y(\mathbf{R}^d).$$

Кроме того, $\mathbf{P}_{\mu_0}$ -почти наверное,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(f(X) \rho_{0,t}(X, Y) | Y) &= \langle \mu_0 S_t^Y, f \rangle, \\ \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\rho_{0,t}(X, Y) | Y) &= \langle \mu_0 S_t^Y, 1 \rangle, \end{aligned}$$

где первое равенство можно интерпретировать как равенство мер:

$$\mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma(\rho_{0,t}(X, Y) \mathbf{1}(X_t \in \cdot) | Y) = \mu_0 S_t^Y(\cdot).$$

Отметим, что функцию $\mathbf{P}_{\mu_0}(X_t \in \cdot | Y)$ можно рассматривать как меру при всех Y в силу существования *регулярных условных распределений*, удовлетворяющих тождеству Колмогорова–Чепмена для любого конечного набора неслучайных целочисленных моментов времени

(см. [21], [14]). Следовательно, можно установить равенство правой и левой частей в равенстве (9).

Аналогично можно определить фильтрационную меру с ошибочными начальными данными по формуле $d_t^{\nu_0}(Y) \nu_0 S_t^Y(\cdot)$, или, иными словами, как

$$d_t^{\nu_0}(\tilde{Y}) \nu_0 \tilde{S}_t^{\tilde{Y}}(\cdot) |_{\tilde{Y}=Y},$$

где $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ — решение той же системы уравнений (1)–(2) с новым начальным распределением ν_0 на некотором независимом вероятностном пространстве. Условие (A3) достаточно для того, чтобы операция подстановки Y вместо $\tilde{Y}$ была корректна; а именно, оно гарантирует, что если некоторое свойство выполнено $\mathbf{P}_{\mu_0}$ -почти наверное, то оно выполнено и $\mathbf{P}_{\nu_0}$ -почти наверное. Напомним, что другим обоснованием такой подстановки является непрерывность относительно Y , отмеченная выше; в свою очередь, (A3) сыграет и другую важную роль в доказательстве. Условную вероятность $\mathbf{P}_{\mu_0}(X_t \in \cdot | Y)$ можно также считать результатом применения нелинейного оператора $\bar{S}_t^Y$ к мере μ_0 : $\mu_0 \bar{S}_t^{Y, \mu_0}(\cdot) := d_t^{\mu_0} \mu_0 S_t^Y(\cdot)$.

Основной вопрос, рассматриваемый в данной работе, — о разности мер

$$(\mu_0 \bar{S}_t^{Y, \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_t^{Y, \nu_0})(dx_t).$$

Мы исследуем расстояние для мер по полной вариации *в среднем*; оценка без усреднения (т.е. для самих условных мер, например, для последовательности $t = 1, 2, \dots$) может быть получена как следствие неравенства Чебышёва и лемм Бореля–Кантелли. Еще раз подчеркнем, что постановка задачи основана на понятии алгоритма точного решения, без которого задачи нет. В этом алгоритме используется определенное представление, и никакие другие представления в работе не обсуждаются. В частности, все условные ожидания должны быть непрерывны по Y . Вопросы относительно иных версий могли бы вообще не приниматься во внимание. Отметим, тем не менее, что окончательные оценки (см. формулы (10) и (11) ниже) относятся к *безусловным ожиданиям* разностей двух функционалов от Y . Это означает, что и для любых других версий условных ожиданий в обеих формулах неравенства также справедливы. В то же время, использование лишь непрерывных версий более сложных условных ожиданий от функций Y и $\bar{Y}$ *в доказательстве* просто удобно, и возможные вопросы о других версиях условных ожиданий *в доказательстве* не по существу.

Теорема 1. Если выполнены условия (A1)–(A3), то существуют константы C, c и C_m такие, что справедливы следующие оценки:

$$\mathbf{E}_{\mu_0} \left\| \mu_0 \bar{S}_t^{Y, \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_t^{Y, \nu_0} \right\|_{\text{TV}} \leq \begin{cases} C_m t^{-m}, & p = 1 \quad \forall m > 0, \\ C \exp(-ct), & p = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Теорема 2. Если выполнены условия (A'1)–(A'3), то справедливо следующее неравенство: найдутся $C, c > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}_{\mu_0} \left\| \mu_0 \bar{S}_t^{Y, \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_t^{Y, \nu_0} \right\|_{TV} \leq C \exp(-ct). \quad (11)$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что в обеих теоремах постоянные в правых частях неравенств могут быть выбраны равномерно в подходящем классе моделей, а именно при равномерно ограниченных значениях интегралов в условии на начальные меры, равномерно ограниченных коэффициентах и константах, участвующих в предположениях. Теорема 2 дает оценку для недивергентных уравнений, близкую к результату работы [22] для дивергентного случая, в частности, близки условия обоих результатов типа больших уклонений, хотя доказательства существенно различны. В этой связи заметим, что теорема 1 предоставляет вариант экспоненциальной скорости сходимости при значительно менее ограничительных условиях на устойчивость.

З а м е ч а н и е 3. Если нет даже абсолютной непрерывности $\mu_0 \ll \nu_0$, но имеет место абсолютная непрерывность $\mu_{k_0} \ll \nu_{k_0}$ при некотором $k_0 > 0$, то можно повторить все выкладки, начиная с этого k_0 , что приведет к тем же окончательным оценкам скорости сходимости. Однако следует помнить о том, что сам алгоритм, вообще говоря, может отказаться работать, если наблюдения не соответствуют начальной мере. Возможный выход — найти или смоделировать некоторые фиктивные наблюдения, которые бы соответствовали ошибочной начальной мере, и затем прогнать алгоритм до момента, когда он сможет продолжить работу с заданными наблюдениями Y . Мы не обсуждаем здесь дальнейшие детали.

3. Доказательство теоремы 1

1. Рассмотрим процесс $Z_t = (X_t, \tilde{X}_t)$; напомним, что его компоненты X и $\tilde{X}$ — независимые процессы, удовлетворяющие одному и тому же уравнению (1) с независимыми версиями W и $\tilde{W}$ винеровского процесса однако с различными начальными распределениями $X_0 \sim \mu_0$ и $\tilde{X}_0 \sim \nu_0$.

Заметим, что все условные ожидания вида $\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(f(X_t, \tilde{X}_t) | Y, \tilde{Y})$ с ограниченными борелевскими функциями f , используемые в доказательстве, являются непрерывными по Гельдеру в $C([0, t]; \mathbf{R}^d) \times C([0, t]; \mathbf{R}^d)$ относительно $Y, \tilde{Y}$, и лишь такие версии рассматриваются во всех случаях. Эта непрерывность вытекает из тех же выкладок, связанных с экспонентами Гирсанова, что и в п. 3 ниже, с помощью формулы (8), интегрирования по частям и экспоненциальных мартингаловых неравенств по мере $\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma$. Разумеется, здесь нет никакого порочного круга. Отметим, что существует несколько иное объяснение непрерывности, представляющееся вполне разумным и основанное на представлении обеих

частей дроби в представлении Байеса–Каллианпура–Стрибел через решения уравнений в частных производных. Однако по мнению авторов данный путь более сложен (см. замечание после формулы (26) ниже).

Пусть $n := [t]$ обозначает целую часть t . Введем некоторые индикаторы. Прежде всего, до конца данной работы X обозначает непрерывную траекторию на отрезке времени $[0, t]$, и тот же смысл имеют обозначения для траекторий $\tilde{X}$ и Y . Далее, обозначим через δ (неслучайный) вектор размерности n с координатами 1 или 0 и положим

$$D_i := \left\{ \max(|X_i|, |\tilde{X}_i|) \leq R; \max \left(\sup_{i \leq s \leq i+1} |X_s|, \sup_{i \leq s \leq i+1} |\tilde{X}_s| \right) < R + 1 \right\},$$

$$\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) := \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{1}(D_i))^{\delta_i} (1 - \mathbf{1}(D_i))^{1-\delta_i}$$

с соглашением $0^0 = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \left\| \mu_0 \bar{S}_t^{Y, \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_t^{Y, \nu_0} \right\|_{TV} \\ &= 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}(X_t \in A) | Y) - \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}(\tilde{X}_t \in A) | \tilde{Y}) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ &= 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(X_t \in A) | Y \right) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(\tilde{X}_t \in A) | \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ &\leq 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \sum_{\delta \in \Delta} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(X_t \in A) | Y) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(\tilde{X}_t \in A) | \tilde{Y}) \right|_{\tilde{Y}=Y}, \end{aligned} \quad (12)$$

где Δ обозначает все множество возможных значений δ .

Далее θ_s обозначает оператор сдвига по траекториям, т.е. $(\theta_{t'} X)_s = X_{t'+s}$, $(\theta_{t'} \tilde{X})_s = \tilde{X}_{t'+s}$ и т.п. При $0 \leq t' \leq t$ мы понимаем под $\mathbf{1}_\delta(\theta_{t'} X, \theta_{t'} \tilde{X})$ индикатор $\mathbf{1}_\delta(X', \tilde{X}')$ с траекториями

$$X'_s := \begin{cases} 0, & s \leq t', \\ X_s, & t' \leq s \leq t, \\ 0, & s \geq t, \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{X}'_s := \begin{cases} 0, & s \leq t', \\ \tilde{X}_s, & t' \leq s \leq t, \\ 0, & s \geq t. \end{cases}$$

Теперь при $0 \leq t' < t'' \leq t$ определим следующие операторы на пространстве нормированных и не нормированных мер на $\mathbf{R}^{2d} = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$:

$$\begin{aligned} & (\mu_{t'}, \nu_{t'}) S_{t': t''}^{Y; R; \delta}(A \times B) \\ &= \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}(X_{t''-t'} \in A, \tilde{X}_{t''-t'} \in B) \mathbf{1}_\delta(\theta_{t'} X, \theta_{t'} \tilde{X}) \right. \\ & \quad \left. \times \rho_{0, t''-t'}(X, \theta_{t'} Y) \rho_{0, t''-t'}(\tilde{X}, \theta_{t'} Y) | Y \right) \mu_{t'}(dx_0) \nu_{t'}(d\tilde{x}_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu, \nu) \bar{S}_t^{Y;R;\delta;\mu_0,\nu_0}(A \times B) \\
& = d_t^{\mu_0} d_t^{\nu_0} \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}(X_t \in A, \tilde{X}_t \in B) \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \right. \\
& \quad \left. \times \rho_{0,t}(X, Y) \rho_{0,t}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \mu(dx_0) \nu(d\tilde{x}_0)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& (\mu, \nu) S_t^{Y;R;\delta}(A \times B) \\
& = \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}(X_t \in A, \tilde{X}_t \in B) \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \right. \\
& \quad \left. \times \rho_{0,t}(X, Y) \rho_{0,t}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \mu(dx_0) \nu(d\tilde{x}_0).
\end{aligned}$$

Более того, в силу *дезинтеграционного свойства* регулярных условных распределений, т.е. равенства Колмогорова–Чепмена (см., например, [21], [14]),

$$(\mu, \nu) S_t^{Y;R;\delta}(A \times B) = (\mu, \nu) \left(\prod_{i=0}^{n-1} S_{i:t}^{Y;R;\delta} \right) S_{n:t}^{Y;R;\delta}(A \times B).$$

Отметим, что в последнем выражении оператор $S_{n:t}^{Y;R;\delta}$, в действительности, по определению не зависит ни от δ , ни от R , поскольку мы не налагаем никаких ограничений на процессы на интервале $[n, t]$.

Для любого вектора δ положим

$$e_t^{Y;\delta;\mu_0,\nu_0} := (\mu_0, \nu_0) \bar{S}_t^{Y;R;\delta}(\mathbf{R}^{2d}).$$

Тогда

$$e_t^{Y;\delta;\mu_0,\nu_0} = \mathbf{E}_{\mu_0,\nu_0}(\mathbf{1}_\delta(Z) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \mathbf{P}_{\mu_0,\nu_0}\text{-п.н.}$$

Отметим, что ввиду симметрии в определении операторов $\bar{S}_t^{Y;R;\delta}$ имеет место равенство $e_t^{Y;\delta;\mu_0,\nu_0} = e_t^{Y;\delta;\nu_0,\mu_0}$ $\mathbf{P}_{\mu_0,\nu_0}$ -п.н. В самом деле, поскольку все ограничения на x такие же, как и на $\tilde{x}$, или, другими словами, поскольку $\mathbf{1}_\delta(x, \tilde{x}) = \mathbf{1}_\delta(\tilde{x}, x)$, заключаем, что

$$\begin{aligned}
e_n^{Y;\delta;\mu_0,\nu_0} & = (\mu_0, \nu_0) \bar{S}_t^{Y;R;\delta}(\mathbf{R}^{2d}) \\
& = d_t^{\mu_0} d_t^{\nu_0} \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \rho_{0,t}(X, Y) \rho_{0,t}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \mu(dx_0) \nu(d\tilde{x}_0) \\
& = d_t^{\mu_0} d_t^{\nu_0} \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}_\delta(\tilde{X}, X) \rho_{0,t}(\tilde{X}, Y) \rho_{0,t}(X, Y) \mid Y \right) \mu(dx_0) \nu(d\tilde{x}_0);
\end{aligned}$$

после замены переменных $X \leftrightarrow \tilde{X}$ и $x_0 \leftrightarrow \tilde{x}_0$ с сохранением $X_0 = x_0$, $\tilde{X}_0 = \tilde{x}_0$ последнее выражение принимает вид

$$\begin{aligned}
& d_t^{\mu_0} d_t^{\nu_0} \int \mathbf{E}_{x_0, \tilde{x}_0}^\gamma \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \rho_{0,t}(X, Y) \rho_{0,t}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \nu(dx_0) \mu(d\tilde{x}_0) \\
& = (\nu_0, \mu_0) \bar{S}_t^{Y;R;\delta}(\mathbf{R}^{2d}) = e_n^{Y;\delta;\nu_0,\mu_0},
\end{aligned}$$

что и утверждалось. Далее, положим

$$(\mu, \nu) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(A \times B) := (e_t^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0})^{-1}(\mu, \nu) \bar{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(A \times B).$$

Смысл последнего обозначения в том, что теперь мы получаем возможность работать с *нормированной* мерой на $(X, \tilde{X}) \in \delta$. Следовательно, при $D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2d})$

$$\begin{aligned} & \left\| \mu_0 \bar{S}_t^{Y; \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_t^{\tilde{Y}; \nu_0} \right\|_{\tilde{Y}=Y} \Big|_{\text{TV}} \\ & \leq \sum_{\delta \in \Delta} \left\| (\mu_0, \nu_0) \bar{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0} - (\nu_0, \mu_0) \bar{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0} \right\|_{\text{TV}} \\ & = 2 \sum_{\delta \in \Delta} \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2d})} \left(e_t^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0}(\mu_0, \nu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) \right. \\ & \quad \left. - e_t^{Y; \delta; \nu_0, \mu_0}(\nu_0, \mu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) \right) \\ & = 2 \sum_{\delta \in \Delta} e_t^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0} \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2d})} \left((\mu_0, \nu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) \right. \\ & \quad \left. - (\nu_0, \mu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}$ -п.н. Первое неравенство здесь можно объяснить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\| \mu_0 \bar{S}_n^{Y; \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_n^{\tilde{Y}; \nu_0} \right\|_{\tilde{Y}=Y} \Big|_{\text{TV}} \\ & = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \mathbf{P}_{\mu_0}(\mathbf{1}(X_n \in A) \mid Y) - \mathbf{P}_{\nu_0}(\mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A) \mid \tilde{Y}) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \stackrel{(a)}{=} 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \left(\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}(X_n \in A) \mid Y, \tilde{Y}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A) \mid Y, \tilde{Y}) \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ & = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(X_n \in A) \mid Y, \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \quad - \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \stackrel{(b)}{=} 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(X_n \in A) \mid Y, \tilde{Y}) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \quad - \sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A) \mid Y, \tilde{Y}) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \stackrel{(c)}{=} 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \left| \sum_{\delta \in \Delta} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) (\mathbf{1}(X_n \in A) - \mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A)) \mid Y, \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\ & \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \sum_{\delta \in \Delta} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) (\mathbf{1}(X_n \in A) - \mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A)) \mid Y, \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)} \sum_{\delta \in \Delta} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(X_n \in A) \mid Y, \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\
&\quad - \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}(\tilde{X}_n \in A) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \Big| \\
&\leq 2 \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2d})} \sum_{\delta \in \Delta} \left| \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \mathbf{1}((X_n, \tilde{X}_n) \in D) \mid Y, \tilde{Y} \right) \right|_{\tilde{Y}=Y} \\
&\quad - \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\mathbf{1}_\delta(\tilde{X}, X) \mathbf{1}((\tilde{X}_n, X_n) \in D) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \Big|,
\end{aligned}$$

где равенство $\stackrel{(a)}{=}$ выполнено, поскольку (X, Y) не зависит от $\tilde{Y}$, а $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ не зависит от Y , равенства $\stackrel{(b)}{=}$ и $\stackrel{(c)}{=}$ выполнены в силу линейности, а в последней строке мы использовали симметрию $\mathbf{1}_\delta(\tilde{X}_n, X_n) \equiv \mathbf{1}_\delta(X_n, \tilde{X}_n)$. Напомним, что все условные математические ожидания всегда выбираются непрерывными относительно траекторий Y и $\tilde{Y}$.

Для оценки членов $\sup((\mu_0, \nu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) - (\nu_0, \mu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D))$ в правой части (13) используем метрику Биркгофа (другие популярные названия для нее: метрика Гильберта, проективная метрика, см. [11], а также [1], [18])

$$h(\mu, \nu) = \begin{cases} \ln \frac{\inf\{u: u > 0, \mu \leq u\nu\}}{\sup\{v: v > 0, \mu \geq v\nu\}}, & \text{если эта величина конечна,} \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами,

$$h(\mu, \nu) = \ln \left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\| + \ln \left\| \frac{d\nu}{d\mu} \right\|, \quad \text{где} \quad \left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\| = \text{ess sup} \left| \frac{d\mu}{d\nu} \right|.$$

Для нормированных мер имеет место следующее замечательное неравенство (см. [1] или [18]):

$$\begin{aligned}
&2 \sup_D \left((\mu_0, \nu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) - (\nu_0, \mu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}(D) \right) \\
&\leq \frac{2}{\ln 3} h\left((\mu_0, \nu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}, (\nu_0, \mu_0) \hat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}\right).
\end{aligned}$$

Как было отмечено Кристофом Лериданом (*Christoph Leuridan*, частное сообщение, 2006), постоянная $2/\ln 3$ в этом неравенстве может быть заменена на единицу; для наших целей подходит любая постоянная.

Более того, для любого $0 \leq i \leq n-1$

$$h\left((\mu_i, \nu_i) S_{i:i+1}^{Y; R; \delta}, (\nu_i, \mu_i) S_{i:i+1}^{Y; R; \delta}\right) \leq h((\mu_i, \nu_i), (\nu_i, \mu_i)), \quad (14)$$

а также

$$h\left((\mu_n, \nu_n) S_{n:t}^{Y; R; \delta}, (\nu_n, \mu_n) S_{n:t}^{Y; R; \delta}\right) \leq h((\mu_n, \nu_n), (\nu_n, \mu_n)), \quad (15)$$

и для всякого $L > 0$ найдется постоянная $\pi_R(L) < 1$ такая, что при любом $i \in J := \{j: \delta_j = \delta_{j+1} = 1\}$

$$h\left((\mu_i, \nu_i) S_{i:i+1}^{Y;R;\delta}, (\nu_i, \mu_i) S_{i:i+1}^{Y;R;\delta}\right) \leq \pi_R(L) h\left((\mu_i, \nu_i), (\nu_i, \mu_i)\right) \quad (16)$$

при условии, что траектория Y на $i \leq t \leq i+1$ удовлетворяет неравенству $\Delta_i(Y) := \sup_{i \leq s \leq i+1} |Y_s - Y_i| \leq L$. Подчеркнем, что данное условие ограниченности Y выполняется при всяком i с вероятностью, близкой к единице, если L достаточно велико. Идея такого сжатия, которое имеет место в зависимости от Y , т.е. случайно, состоит в том, что оно выполнено *достаточно часто* при $i = 0, 1, \dots, n-1$, и этого будет достаточно для окончательной экспоненциальной или полиномиальной оценки, в зависимости от случая $p = 0$, либо $p = 1$. Если же оно выполнено недостаточно часто — см. оценку (43) в п. 6 и доказательство теоремы 2. Нестрогие неравенства (14) и (15) справедливы просто в силу того, что любое переходное ядро, случайное или нет, не увеличивает расстояние Биркгофа между двумя мерами.

2. Теперь покажем, что (16) является следствием неравенства Харнака. Пусть Γ обозначает параболическую границу цилиндра $\{(t, x, \tilde{x}): 0 \leq t \leq 1; |x| \leq R+1, |\tilde{x}| \leq R+1\}$. Тогда параболическое неравенство Харнака из [13], примененное к диффузионному процессу $(X, \tilde{X})$ размерности $2d$, можно сформулировать следующим образом: для всякой неотрицательной функции φ на Γ такой, что $\varphi(t, x, \tilde{x}) \equiv 0$ при всех $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ и $\mathbf{E}_{0,0} \mathbf{1}(D_0) \varphi(\tau, X_\tau, \tilde{X}_\tau) > 0$, имеем

$$\sup_{|x_0(1)|, |\tilde{x}_0(1)|, |x_0(2)|, |\tilde{x}_0(2)| \leq R} \frac{\mathbf{E}_{x_0(1), \tilde{x}_0(1)} \mathbf{1}(D_0) \varphi(\tau, X_\tau, \tilde{X}_\tau)}{\mathbf{E}_{x_0(2), \tilde{x}_0(2)} \mathbf{1}(D_0) \varphi(\tau, X_\tau, \tilde{X}_\tau)} \leq C, \quad (17)$$

где $\tau = \inf\{t: 0 \leq t \leq 1, \max(|X_t|, |\tilde{X}_t|) \geq R+1\}$ с условием $\inf(\emptyset) = 1$.

Покажем, как из (17) следует (16). Положим

$$\Gamma_0 = \left\{ (t, x, \tilde{x}): \frac{1}{4} \leq t < 1; |x| \vee |\tilde{x}| = R+1 \right\}.$$

Поскольку $|x_0(1)| \vee |\tilde{x}_0(1)| \vee |x_0(2)| \vee |\tilde{x}_0(2)| \leq R$, неравенство (17) влечет

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{x_0(1), \tilde{x}_0(1)} \left(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\} \right) \\ & \leq C \mathbf{P}_{x_0(2), \tilde{x}_0(2)} \left(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Установим аналогичное неравенство для условной линейаризованной динамики в предположении $\Delta_0(Y) = \sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L$ и с некоторой новой постоянной C , в частности, зависящей от L и R .

Поскольку $h \in C^2$, мы можем применить под знаком гирсановской экспоненты интегрирование по частям, т.е. формулу Ито, при этом получаем (мы показываем лишь выкладку с $\rho_{0,1}^2(X, Y)$ и опустим экспоненту

$\exp(-\int_0^1 h^2(X_s) ds)$, поскольку последняя ограничена и отделена от нуля на множестве D_0)

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^1 h(X_s) dY_s\right) &= \exp\left(h(X_1)^*(Y_1 - Y_0) - \int_0^1 (Y_s - Y_0) dh(X_s)\right) \\ &= \exp\left(h(X_1)^*(Y_1 - Y_0) - \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) (dW_s + b(X_s) ds)\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 (Y_s - Y_0) \Delta h(X_s) ds\right) \\ &\equiv \exp\left(-\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(h(X_1)(Y_1 - Y_0) - \frac{1}{2} \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \Delta h(X_s) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) b(X_s) \right\} ds\right). \end{aligned}$$

Здесь Δh понимается как вектор с компонентами Δh^i , где $h = (h^i, 1 \leq i \leq \ell)$; ∇h — матрица размера $\ell \times d$, и все выражения типа Yh понимаются как скалярные произведения, $\langle Y, h \rangle$.

Вторая экспонента, содержащая $\tilde{X}$, аналогичным образом преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^1 h(\tilde{X}_s) dY_s\right) &= \exp\left(h(\tilde{X}_1)(Y_1 - Y_0) - \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* dh(\tilde{X}_s)\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s - \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(h(\tilde{X}_1)(Y_1 - Y_0) - \int_0^1 (Y_s - Y_0) \Delta h(\tilde{X}_s) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) b(\tilde{X}_s) \right\} ds\right). \end{aligned}$$

Множитель

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} := \exp\left(-\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s - \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s\right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds\right) \end{aligned}$$

здесь можно трактовать как новую гирсановскую экспоненту, меняющую снос $b(X_s)$ компоненты диффузии X на новый, $b(X_s) - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)$, и соответственно снос $b(\tilde{X}_s)$ компоненты $\tilde{X}$ на $b(\tilde{X}_s) - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)$. Иными словами, процесс $(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y})$, заданный на отрезке времени $[0, 1]$

системой уравнений

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s) ds + dW_s, \\ dY_s = h(X_s) ds + dB_s, \\ d\tilde{X}_s = b(\tilde{X}_s) ds + d\tilde{W}_s, \\ d\tilde{Y}_s = h(\tilde{X}_s) ds + d\tilde{B}_s \end{cases} \quad (19)$$

с начальными условиями $X_0, Y_0, \tilde{X}_0, \tilde{Y}_0$, по новой мере оказывается решением системы уравнений

$$\begin{cases} dX_s = (b(X_s) - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)) ds + dW_s, \\ dY_s = dB_s, \\ d\tilde{X}_s = (b(\tilde{X}_s) - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)) ds + d\tilde{W}_s, \\ d\tilde{Y}_s = d\tilde{B}_s \end{cases} \quad (20)$$

на том же отрезке времени и с теми же начальными данными. Отметим, что, конечно, данная операция делает компоненты X и $\tilde{X}$ зависимыми по новой мере. Однако это не существенно, поскольку наша цель здесь — лишь установить «условия перемешивания» в смысле [18], а сама эта новая мера в дальнейших рассуждениях не участвует. Конечно, все ви-неровские процессы в (20) новые. Мера $\hat{\mathbf{P}}$ задается плотностью

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}^\gamma}(\omega) := \hat{\gamma}(\omega).$$

Отметим, что данная операция не меняет траекторий процессов $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$. Вновь в силу формулы Байеса–Каллианпура–Стрибел (8) мы имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid Y, \tilde{Y} \right) \\ &= \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right. \\ & \quad \times \hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y, \tilde{Y} \left. \right) \left[\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\tilde{x}, x}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid Y, \tilde{Y} \right) \\ &= \hat{\mathbf{E}}_{\tilde{x}, x} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right. \\ & \quad \times \hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y, \tilde{Y} \left. \right) \left[\hat{\mathbf{E}}_{\tilde{x}, x}(\hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим числитель. «Главная часть» выражения

$$\rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y),$$

т.е. множитель со стохастическим интегралом, есть экспонента

$$\begin{aligned} & \exp \left(- \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s - \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right) \\ & \times \exp \left(+ \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right) \equiv 1. \end{aligned}$$

Другими словами, стохастическая часть здесь вырождается, превращаясь в множитель, равный единице. Оставшийся множитель ограничен и отделен от нуля на множестве $\{\sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L\}$ (напомним, что мы работаем с системой (20) и мерой $\hat{\mathbf{P}}$, так что процесс $\tilde{Y}$ здесь не появляется):

$$\begin{aligned} & \exp \left(h(X_1)(Y_1 - Y_0) - \frac{1}{2} \int_0^1 (Y_s - Y_0) \Delta h(X_s) ds \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds \right) \\ & \times \exp \left(\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) b(X_s) \right\} ds \right) \\ & \times \exp \left(h(\tilde{X}_1)(Y_1 - Y_0) - \frac{1}{2} \int_0^1 (Y_s - Y_0) \Delta h(\tilde{X}_s) ds \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds \right) \\ & \times \exp \left(\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 - (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) b(\tilde{X}_s) \right\} ds \right) \\ & \leq C(L, R) < \infty \end{aligned}$$

в силу предположений; аналогично имеем нижнюю оценку $\geq C(L, R)^{-1}$ для левой части, которая понадобится лишь в дальнейшем. Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y, \tilde{Y} \right) \\ & \leq C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y, \tilde{Y} \right) \\ & = C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y \right), \end{aligned}$$

где последний переход использует независимость $\tilde{Y}$ от $X, \tilde{X}, Y$ по мере $\hat{\mathbf{P}}$ в силу системы (20).

Теперь уместно немного изменить определение D_0 . В самом деле, первые два требования $|X_0| \leq R$ и $|\tilde{X}_0| \leq R$ несущественны, и их можно без всякого ущерба отбросить, поскольку они оба суть ограничения только на начальные значения x и $\tilde{x}$. Мы разрешим любые $|x|$,

$|\tilde{x}| < R + 1$, но применять эту конструкцию будем лишь к точкам $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^{2d}$, отделенным от границы, что важно для неравенства Харнака. Итак, положим

$$D'_0 := \left\{ \max \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |X_s|, \sup_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{X}_s| \right) < R + 1 \right\}.$$

Тогда при $|x|, |\tilde{x}| \leq R$ имеем тождество

$$\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y \right) = \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y \right).$$

Покажем справедливость следующего неравенства для условных мер:

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y \right) \\ & \leq C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x', \tilde{x}'} \left(\mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y \right), \end{aligned} \quad (23)$$

на множестве $\{\sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L\}$. Для этого достаточно доказать аналогичное неравенство с любой неотрицательной непрерывной ограниченной функцией φ и даже с любой неотрицательной $\varphi \in C_b^2$:

$$\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} (\mathbf{1}(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) \mid Y) \leq C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x', \tilde{x}'} (\mathbf{1}(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) \mid Y). \quad (24)$$

Выражение $\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} (\mathbf{1}(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) \mid Y)$ можно трактовать как решение $u^\psi(s, x, \tilde{x})$ с $s = 0$ следующего линейного параболического уравнения в частных производных с неоднородным коэффициентом при производных первого порядка, зависящим от случайного параметра Y :

$$\begin{aligned} u_s + \frac{1}{2} u_{xx} + \frac{1}{2} u_{\tilde{x}\tilde{x}} + (b(x) - (\psi_s - \psi_0)^* \nabla h(x)) u_x \\ + (b(\tilde{x}) - (\psi_s - \psi_0)^* \nabla h(\tilde{x})) u_{\tilde{x}} = 0, \quad 0 \leq s < 1, \\ \max(|x|, |\tilde{x}|) < R + 1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{cases} u(1, x, \tilde{x}) = \varphi(x, \tilde{x}), \\ u(s, x, \tilde{x}) = 0, \quad 0 < s < 1, \end{cases} \quad \max(|x|, |\tilde{x}|) = R + 1,$$

с подстановкой $\psi = Y$; таким образом, оправдано обозначение u^Y . Во всех случаях кривая $(\psi_s, 0 \leq s \leq 1)$ непрерывна и, в частности, ограничена. Для всякой функции $\varphi \in C_b^2$ существует единственное решение уравнения (25) в соответствующем соболевском классе функций (см. [17]); если $\varphi \in C_b$, то это также верно (см. [24]). Отметим, что можно использовать и разрывные начальные условия φ , однако для гладких φ проще найти ссылки на литературу. Установим равенство

$$\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} \left(\mathbf{1}(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) \mid Y \right) = u^Y(0, x, \tilde{x}). \quad (26)$$

Как уже отмечалось, правая часть в (26) есть решение уравнения (25) с подстановкой $\psi = Y$.

Равенство почти наверное (26) интуитивно очевидно, если принять во внимание, что Y находится независимо от X и $\tilde{X}$ и что Y и $(X, \tilde{X})$ независимы по мере $\hat{\mathbf{P}}$. Тем не менее, для полноты изложения мы предпочитаем привести обоснование этого факта. Отметим, что наиболее естественный путь (фиксировать Y , применить формулу Ито–Крылова и взять условное математическое ожидание) требует некоторых технических лемм, связанных с измеримостью решений стохастических дифференциальных уравнений, зависящих от траектории Y как от параметра, а также теорем о единственности этих решений в смысле обыкновенных дифференциальных уравнений, которых (лемм и теорем) мы предпочитаем избежать. Между прочим, если использовать исходную меру, то не получится никакого линейного уравнения с частными производными, подобного вышеуказанному; все это показывает, что несмотря на интуитивную очевидность (26), здесь требуется некоторая осторожность.

Отметим, что в силу априорных оценок решений уравнений с частными производными [17] зависимость функции u^ψ от траектории ψ непрерывная, каковой факт будет использован напрямую. Рассмотрим произвольную непрерывную ограниченную функцию $g(\cdot)$ на $C[0, 1]$ и покажем, что

$$\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} g(Y) \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} (1(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) | Y) = \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}), \quad (27)$$

что является просто другой формой равенства (26). Еще одна эквивалентная версия такова:

$$\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} g(Y) 1(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) = \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}} g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}). \quad (28)$$

Рассмотрим экспоненту

$$\zeta = \zeta(Y) := \exp \left(\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^1 (|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)|^2 + |(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)|^2) ds \right)$$

и меру

$$\frac{d\mathbf{P}^\zeta}{d\hat{\mathbf{P}}(\omega)} := \zeta(Y).$$

Тогда (28) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \zeta^{-1}(Y) g(Y) 1(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) = \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \zeta^{-1}(Y) g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}). \quad (29)$$

По мере $\mathbf{P}^\zeta$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s) ds + dW_s, & X_0 = x, \\ dY_s = dB_s, \\ d\tilde{X}_s = b(\tilde{X}_s) ds + d\tilde{W}_s, \\ d\tilde{Y}_s = d\tilde{B}_s, \end{cases}$$

как всегда, с новыми винеровскими процессами.

3. Следующий аргумент — использовать ε -сеть для аппроксимации процесса Y , который является винеровским как по мере $\tilde{\mathbf{P}}$, так и по мере $\mathbf{P}^\zeta$. В силу свойств d -мерного винеровского процесса и теоремы Улама о плотности меры, при заданном $\varepsilon' > 0$ мы можем найти компакт $K \subset C[0, 1]$ такой, что

$$\mathbf{P}^\zeta\{Y - Y_0 \in K\} > 1 - \varepsilon'. \quad (30)$$

Теперь при любом $\varepsilon > 0$ выберем для этого компакта ε -сеть $\{\psi^i, 1 \leq i \leq N\}$. Определим по индукции

$$\begin{aligned} U^1 &:= \{\psi: \|\psi - \psi^1\|_C < \varepsilon\}; \\ U^2 &:= \{\psi: \|\psi - \psi^2\|_C < \varepsilon\} \setminus U^1; \\ &\dots\dots\dots \\ U^{k+1} &:= \{\psi: \|\psi - \psi^{k+1}\|_C < \varepsilon\} \setminus U^k; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Поскольку Y и $(X, \tilde{X})$ независимы относительно меры $\mathbf{P}^\zeta$, имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \\ &= \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \\ &\quad + \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}\left(Y \notin \bigcup_i U^i\right) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \\ &\sim \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}), \end{aligned}$$

где последнее асимптотическое равенство справедливо при $\varepsilon \rightarrow 0$. В самом деле,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \right. \\ &\quad + \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}\left(Y \notin \bigcup_i U^i\right) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \\ &\quad \left. - \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \right| \\ &\leq \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}\left(Y \notin \bigcup_i U^i\right) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \\ &\quad + \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \left| \zeta^{-1}(Y) g(Y) - \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) \right| \\ &\quad \times \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}). \end{aligned}$$

Следовательно, слагаемое

$$\mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}\left(Y \notin \bigcup_i U^i\right) \zeta^{-1}(Y) g(Y) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\})$$

мало в силу (30). Более того, поскольку g ограничена и непрерывна на $C[0, 1]$, достаточно оценить, например, выражение

$$\sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) |\zeta^{-1}(Y) - \zeta^{-1}(\psi^i)| \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}),$$

а для оценки сверху последний индикатор можно заменить на единицу. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) |\zeta^{-1}(Y) - \zeta^{-1}(\psi^i)| \\ &= \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(Y) |1 - \zeta^{-1}(\psi^i) \zeta(Y)| \\ &= \sum_i \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(Y) \\ & \quad \times \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \left(\left| 1 - \exp \left(\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s) dW_s - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s)|^2 + |(Y_s - Y_0) \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 \right) ds \right) \Big| Y \Big). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя тот факт, что по мере $\mathbf{P}^\zeta$ процессы Y и $(X, \tilde{X}, W, \tilde{W})$ независимы, мы можем проинтегрировать по W и $\tilde{W}$, считая Y неслучайной траекторией. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получаем, что квадрат условного математического ожидания, стоящего в правой части (31), не превосходит

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \left(\left| 1 - \exp \left(\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s) dW_s - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s)|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + |(Y_s - Y_0) \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 \right) ds \right) \Big| Y \Big)^2 \\ &= 1 + \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\zeta \left(\exp \left(\int_0^1 2(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_0^1 2(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 2(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s) dW_s \\
& - \int_0^1 2(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \\
& - \int_0^1 \left(|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s)|^2 \right. \\
& \quad \left. + |(Y_s - Y_0) \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 \right) ds \Big| Y \Big) \\
& - 2\mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \left(\exp \left(\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s) dW_s - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s)|^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + |(Y_s - Y_0) \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 - |(\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s)|^2 \right) ds \right) \Big| Y \right).
\end{aligned}$$

Понятно, что на множестве $\{Y \in U^i\}$ оба математических ожидания в последнем выражении равномерно близки к единице, поэтому вся сумма имеет порядок $o_\varepsilon(1)$. Действительно, с помощью экспоненциальных мартингалов мы получаем, что в данном случае

$$o_\varepsilon(1) \text{ имеет порядок } \varepsilon. \quad (32)$$

Это показывает непрерывность в смысле Гёльдера порядка $\frac{1}{2}$ каждого слагаемого суммы

$$\sum_i \mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) \mathbf{1}(D'_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \quad (33)$$

относительно ψ . Отметим, что те же аргументы доказывают непрерывность в смысле Гёльдера условных ожиданий, указанную в начале доказательства. Докажем (32). В самом деле, для d -мерного винеровского процесса W и для произвольных согласованных процессов y_s, z_s , $0 \leq s \leq 1$, удовлетворяющих условию $\sup_s (|y_s| + |z_s|) \leq \varepsilon < \infty$ с малым $\varepsilon > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s - \int_0^1 y_s ds \right) \right)^{1/2} \\
& = \left(\mathbf{E} \left(\exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s \mp \int_0^1 |z_s|^2 ds \right) - \int_0^1 y_s ds \right) \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 2z_s^* dW_s - 2 \int_0^1 |z_s|^2 ds \right) \right)^{1/4} \\
& \quad \times \left(\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 2(|z_s|^2 - y_s) ds \right) \right)^{1/4} \leq \exp(C\varepsilon) \sim 1 + C\varepsilon \quad (34)
\end{aligned}$$

(здесь $\sim$ означает эквивалентность после вычитания единицы). Аналогично (в силу версии того же неравенства Коши–Буняковского–Шварца, которую было бы уместно назвать *неравенством Коши–Буняковского–Шварца снизу*: $\mathbf{E}\xi\eta \geq \mathbf{E}\xi^{1/2}(\mathbf{E}\eta^{-1})^{-1/2}$ при $\xi, \eta > 0$), имеет место следующая оценка снизу:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s - \int_0^1 y_s ds \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\exp \left(- \int_0^1 z_s^* dW_s \pm \frac{1}{2} \int_0^1 |z_s|^2 ds \right) - \int_0^1 y_s ds \right) \\ &\geq \left(\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 |z_s|^2 ds \right) \right)^{-1/2} \\ &\quad \times \left(\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 \left(-\frac{1}{4} |z_s|^2 - \frac{1}{2} y_s \right) ds \right) \right) \geq \exp(-C\varepsilon) \sim 1 - C\varepsilon; \end{aligned}$$

здесь в качестве ξ и η мы взяли величины

$$\xi = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 |z_s|^2 ds - \int_0^1 y_s ds \right)$$

и

$$\eta = \exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s + \frac{1}{2} \int_0^1 |z_s|^2 ds \right)$$

и $\sim$ имеет тот же смысл, что и в (34). Другими словами, разность между

$$\mathbf{E} \exp \left(\int_0^1 z_s^* dW_s - \int_0^1 y_s ds \right) \quad \text{и} \quad 1$$

имеет порядок не более ε . Следовательно, величина

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \left(\left| 1 - \exp \left(\int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s \right. \right. \right. \\ & \quad + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(X_s) dW_s \\ & \quad \left. \left. - \int_0^1 (\psi_s^i - \psi_0^i)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left| ((Y_s - Y_0) - (\psi_s^i - \psi_0^i))^* \nabla h(X_s) \right|^2 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \left| ((Y_s - Y_0) - (\psi_s^i - \psi_0^i))^* \nabla h(\tilde{X}_s) \right|^2 \right) ds \right) \right| Y \right) \end{aligned}$$

имеет порядок не более ε , что и доказывает (32). Отметим, что, используя неравенство Гёльдера вместо неравенства Коши–Буняковского–Шварца, можно добиться любого порядка, меньшего единицы; однако для наших целей достаточно любого положительного показателя.

Чтобы установить непрерывность правой части в (29), мы используем подход, основанный на оценках решений уравнений с частными производными, также упомянутый в начале доказательства.

В силу теоремы 4.9.1 из [17] для любой функции ψ , удовлетворяющей условию $\|\psi\|_C \leq K$, существует единственное решение u^ψ задачи (25) в классе функций

$$C([0, 1] \times B_{R+1}^{\otimes 2}) \cap \bigcap_{p>1} W_p^{1,2}([0, 1] \times B_{R+1}^{\otimes 2}),$$

где $B_{R+1}^{\otimes 2} = \{(x, \tilde{x}): |x| \leq R+1, |\tilde{x}| \leq R+1\}$. В частности, при любом $p > 0$ имеем

$$u_x^\psi \in L_p,$$

более того, при заданном K (т.е. при заданной верхней границе для величин $\|\psi\|_C$) нормы $\|u_x^\psi\|_{L_p}$ равномерно ограничены. Поэтому для любых двух траекторий ψ, ψ' с одной и той же верхней границей K разность $v = u^\psi - u^{\psi'}$ удовлетворяет уравнению

$$L^\psi v = -(\psi_t - \psi'_t) u_x^{\psi'}$$

с нулевыми граничными и начальными данными. Будем трактовать здесь правую часть как заданную вектор-функцию $u_x^{\psi'} \in \bigcap_{p>1} L_p$ с малым множителем $-(\psi_t - \psi'_t)$, тогда теорема 4.9.1 из [17] гарантирует *априорную* оценку

$$\|u^\psi - u^{\psi'}\|_{W_p^{1,2}} \leq N \|\psi - \psi'\|_C.$$

В силу теорем вложения Соболева ([17, лемма 2.3.3], см. также [17, следствие к теореме 4.9.1]) заключаем, что найдутся N и $0 < \alpha < 1$ (здесь константа N , вообще говоря, новая, а α можно выбрать сколь угодно близким к единице) такие, что

$$\|u^\psi - u^{\psi'}\|_C \leq N \|\psi - \psi'\|_C^\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\zeta \zeta^{-1}(Y) g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}) &= \sum_i \mathbf{E}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(Y) g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}) \\ &\quad + \mathbf{E}^\zeta \mathbf{1}\left(Y \notin \bigcup_i U^i\right) \zeta^{-1}(Y) g(Y) u^Y(0, x, \tilde{x}) \\ &\approx \sum_i \mathbf{E}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) u^{\psi^i}(0, x, \tilde{x}). \end{aligned}$$

Множители $g(\psi^i)$ и $\mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i)$ во всех членах обеих сумм,

$$\sum_i \mathbf{E}^\zeta \mathbf{1}(Y \in U^i) \mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \zeta^{-1}(\psi^i) g(\psi^i) u^{\psi^i}(0, x, \tilde{x})$$

и (33), одинаковы, поэтому, чтобы доказать (29) и, значит, (27), достаточно показать, что

$$\mathbf{E}_{x,\tilde{x}}^\zeta \zeta^{-1}(\psi^i) \mathbf{1}(D'_0) \varphi(X_1, \tilde{X}_1) = u^{\psi^i}(0, x, \tilde{x}) \mathbf{E}^\zeta \zeta^{-1}(\psi^i). \quad (35)$$

Поскольку $E^{\zeta} \zeta^{-1}(\psi^i) = 1$, правая часть здесь является решением уравнения

$$\begin{aligned} u_s + \frac{1}{2} \Delta_{xx} u + \frac{1}{2} \Delta_{\tilde{x} \tilde{x}} u + (b(x) - (\psi_s^i - \psi_0^i) \nabla h(x)) \nabla u \\ + (b(\tilde{x}) - (\psi_s^i - \psi_0^i) \nabla h(\tilde{x})) \nabla u = 0 \\ \text{при } 0 \leq s < 1, \quad \max(|x|, |\tilde{x}|) < R + 1, \\ \begin{cases} u(1, x, \tilde{x}) = \varphi(x, \tilde{x}), \\ u(s, x, \tilde{x}) = 0, \end{cases} \quad \max(|x|, |\tilde{x}|) = R + 1, \end{aligned} \quad (36)$$

в соответствующем соболевском классе функций. Начальные и граничные условия также очевидны. Но тот факт, что левая часть в (35) удовлетворяет уравнению (36), хорошо известен (см., например, [12]).

Таким образом, (26) имеет место. Далее все коэффициенты уравнения (20), а значит, и (25) ограничены. Согласно неравенству Харнака (см. [13]), получаем

$$u^Y(0, x, \tilde{x}) \leq C(L, R) u^Y(0, x', \tilde{x}')$$

с постоянной $C(L, R)$, зависящей лишь от констант, ограничивающих коэффициенты уравнения, но не от D . Последнее неравенство можно переписать в виде (24) или в эквивалентном ему виде (23).

Знаменатель, который является общим для (21) и (22), можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\tilde{x}, x} \left(\hat{\gamma}^{-1}(X, \tilde{X}, Y) \mid Y \right) \\ = \hat{E}_{\tilde{x}, x} \left(\exp \left(+ \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right) \right. \\ \times \exp \left(+ \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds \right) \mid Y, \tilde{Y} \Big) \\ = \hat{E}_{\tilde{x}, x} \left(\exp \left(+ \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s) dW_s + \int_0^1 (Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s \right) \right. \\ \times \exp \left(- \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds \right) \\ \times \exp \left(+ \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds \right. \\ \left. + \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds \right) \mid Y, \tilde{Y} \Big). \end{aligned}$$

Последняя экспонента на множестве $\{\Delta_0(Y) \leq L\}$ допускает следующую оценку:

$$C^{-1} \leq \exp \left(+ \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(X_s)\|^2 ds + \int_0^1 \|(Y_s - Y_0)^* \nabla h(\tilde{X}_s)\|^2 ds \right) \leq C$$

с некоторым $C = C(L, R)$.

Последнее неравенство и неравенство (23) дают на множестве $\{\Delta_0(Y) = \sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L\}$ следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \sup_{x, \tilde{x} \in B_R} \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \\ & \leq C(L, R) \inf_{x', \tilde{x}' \in B_R} \mathbf{E}_{x', \tilde{x}'}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \right. \\ & \quad \left. \times \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Это и есть так называемое условие перемешивания в смысле [18] для условных мер или (условных) переходных ядер, и теперь в силу предложения 3.9 из [18] это неравенство влечет (16), как и было обещано, с некоторой постоянной $\pi_R(L) \leq (C(L, R)^2 - 1)/(C(L, R)^2 + 1)$, где $C(L, R)$ — константа из неравенства (37).

Ради полноты изложения приведем детали доказательства неравенства (37). Для любых $|x|, |x'|, |\tilde{x}|, |\tilde{x}'| \leq R$ и, по-прежнему, на множестве

$$\{\Delta_0(Y) = \sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L\}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \\ & = \frac{\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \hat{\gamma}^{-1} \mid Y)}{\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\hat{\gamma}^{-1} \mid Y)} \\ & \leq C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y) \\ & \leq C(L, R) \hat{\mathbf{E}}_{x', \tilde{x}'}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{x, \tilde{x}}^\gamma \left(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \mid Y \right) \\ & = \frac{\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \rho_{0,1}(X, Y) \rho_{0,1}(\tilde{X}, Y) \hat{\gamma}^{-1} \mid Y)}{\hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\hat{\gamma}^{-1} \mid Y)} \\ & \geq C(L, R)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_{x, \tilde{x}}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y) \\ & \geq C(L, R)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_{x', \tilde{x}'}(\mathbf{1}(D_0 \cap \{(X_1, \tilde{X}_1) \in D\}) \mid Y). \end{aligned}$$

Стало быть, в самом деле, имеет место неравенство (37).

4. Пусть $\#1(\delta)$ обозначает (неслучайное) число единиц в векторе δ , а $\#1(\delta, L)$ — число (уже случайное) тех из них, стоящих, скажем, на местах с номерами « i », для которых также выполнено условие $\Delta_i(Y) \leq L$. Тогда из (16) в силу индукции получаем

$$\begin{aligned} & h\left((\mu_0, \nu_0) \widehat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}, (\nu_0, \mu_0) \widehat{S}_t^{Y; R; \delta; \mu_0, \nu_0}\right) \\ & \equiv h\left((\mu_0, \nu_0) S_t^{Y; R; \delta}, (\nu_0, \mu_0) S_t^{Y; R; \delta}\right) \\ & = h\left((\mu_0, \nu_0) \prod_{i=0}^{n-1} S_{i:i+1}^{Y; R; \delta}, (\nu_0, \mu_0) \prod_{i=0}^{n-1} S_{i:i+1}^{Y; R; \delta}\right) \leq C \pi_R^{(\#1(\delta, L)-2)+}. \end{aligned} \quad (38)$$

Мы использовали тот факт, что даже если начальные меры μ_0 и ν_0 не сравнимы в смысле метрики Биркгофа, они становятся таковыми после первого же применения неравенства (37). Поэтому мы можем потерять не более двух единиц из величины $\#1(\delta, L)$ в показателе экспоненциальной оценки. Из (13) и (38) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mu_0} \left\| \mu_0 \bar{S}_n^{Y; \mu_0} - \nu_0 \bar{S}_n^{Y; \nu_0} \right\|_{TV} & \leq C \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta \in \Delta} \pi_R^{(\#1(\delta, L)-2)+} e_n^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0} \\ & = C \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\#1(\delta, L) \geq \varepsilon n} \pi_R^{\#1(\delta, L)-2} e_n^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0} \\ & \quad + C \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\#1(\delta, L) < \varepsilon n} \pi_R^{(\#1(\delta, L)-2)+} e_n^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ (в предположении $\varepsilon n \geq 2$) мы имеем оценку

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) \geq \varepsilon n} \pi_R^{\#1(\delta, L)-2} e_n^{Y; \delta; \mu_0, \nu_0} \\ & \leq \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \pi_R^{\varepsilon n-2} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) \geq \varepsilon n} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (\mathbf{1}_\delta(X, Y) | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y} \\ & = \pi_R(L)^{\varepsilon n-2} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\bigcup_{\delta: \#1(\delta, L) \geq \varepsilon n} \mathbf{1}_\delta(X, Y) | Y, \tilde{Y} \right) |_{\tilde{Y}=Y} \\ & \leq \pi_R(L)^{\varepsilon n-2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Во второй сумме при $\#1(\delta, L) < 2$ мы вообще не переходим к метрике Биркгофа и, соответственно, не используем сжатия в этой метрике. В частности, сравнимость мер μ_0 и ν_0 не будет играть никакой роли.

5. Итак, остается оценить второе математическое ожидание в правой части (39). Оно не превосходит

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n} \pi_R^{(\#1(\delta, L)-2)+} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (\mathbf{1}_\delta(X, Y) | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & \leq \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (\mathbf{1}_\delta(X, Y) | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y} \right). \end{aligned}$$

В свою очередь, разобьем последнее выражение на две части. Фиксируем некоторое $\varepsilon' > \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &= \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n, \#1(\delta) < \varepsilon' n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &+ \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n, \#1(\delta) \geq \varepsilon' n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &\leq \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon' n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &+ \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n, \#1(\delta) \geq \varepsilon' n} 1. \tag{41}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (41). Зафиксируем произвольным образом ε , удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Обозначим $p_L = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leq s \leq 1} |Y_s - Y_0| \leq L\}$ и $q_L = 1 - p_L$; отметим, что $p_L \approx 1$, если L достаточно велико. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta, L) < \varepsilon n, \#1(\delta) \geq \varepsilon' n} 1 = \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \{ \#1(\delta, L) < \varepsilon n, \#1(\delta) \geq \varepsilon' n \} \\
 &= \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \{ \text{найдется не менее } (\varepsilon' - \varepsilon)n \text{ единичных интервалов с } \Delta_i(Y) > L \} \\
 &\leq \sum_{k=(\varepsilon' - \varepsilon)n}^n C_n^k q_L^k p_L^{n-k} \leq (2 q_L^{\varepsilon' - \varepsilon})^n, \tag{42}
 \end{aligned}$$

что меньше любой экспоненты, если L достаточно велико. Отметим, что до этого момента доказательство теоремы 2 будет идентичным.

6. Оценим первое слагаемое в правой части (41). Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, \tilde{X}) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &= \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} (1_\delta(X, \tilde{X}) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \\
 &= \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} 1_\delta(X, \tilde{X}) \mid Y, \tilde{Y} \right) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right). \tag{43}
 \end{aligned}$$

Введем некоторые новые обозначения:

$$\#1(X)_R := \sum_{k=0}^{n-1} 1(|X_k| \leq R, \sup_{k \leq s \leq 1} |X_s| < R+1), \quad \#0(X)_R := n - \#1(X)_R.$$

В силу принципа Дирихле

$$1 \left(\#1(X)_R \geq \frac{1+\varepsilon}{2} n, \#1(\tilde{X})_R \geq \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} 1_\delta(X, \tilde{X}) = 0. \tag{44}$$

В самом деле, заметим, что $\sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} 1_\delta(X, \tilde{X}) = 1(\sum_{i=0}^{n-1} 1(D_i) < \varepsilon n)$. Если $\#1(X)_R = n$, $\#1(\tilde{X})_R = n$, то $\sum_{i=0}^{n-1} 1(D_i) = n$. Если уменьшить любое из чисел $\#1(X)_R = n$ или $\#1(\tilde{X})_R = n$ на единицу, то от этого число $\sum_{i=0}^{n-1} 1(D_i)$ может уменьшиться самое большее на единицу же. Следовательно, чтобы сделать эту сумму меньше, чем εn , необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\#0(X)_R + \#0(\tilde{X})_R > n - \varepsilon n$, и, значит, либо $\#0(X)_R > (1 - \varepsilon)n/2$, либо $\#0(\tilde{X})_R > (1 - \varepsilon)n/2$. Однако оба эти неравенства противоречат соотношениям $\#1(X)_R \geq (1 + \varepsilon)n/2$ и $\#1(\tilde{X})_R \geq (1 + \varepsilon)n/2$, откуда и следует (44). Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} 1_\delta(X, \tilde{X}) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & \leq \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(1 \left(\#1(X)_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & \quad + \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \left(1 \left(\#1(\tilde{X})_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid Y, \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & = \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\mu_0} \left(1 \left(\#1(X)_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid Y \right) \right) \\ & \quad + \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\nu_0} \left(1 \left(\#1(\tilde{X})_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

поскольку X не зависит от $\tilde{Y}$, а $\tilde{X}$ не зависит от Y . Напомним, что мы всегда рассматриваем версии условных ожиданий, непрерывные по $Y, \tilde{Y}$. Первое слагаемое в правой части (43) равно $\mathbf{E}_{\mu_0} 1(\#1(X)_R < (1 + \varepsilon)n/2)$.

Второе слагаемое оценим с помощью условия (A3), используя его следствие $\mathbf{E}_{\mu_0} F(X, Y) \leq C \mathbf{E}_{\nu_0} F(X, Y)$ для любой $F \geq 0$ и тождество $\mathbf{E}_{\nu_0} F(X, Y) = \mathbf{E}_{\nu_0} F(\tilde{X}, \tilde{Y})$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0} \left(\mathbf{E}_{\nu_0} \left(1 \left(\#1(\tilde{X})_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & \leq C \mathbf{E}_{\nu_0} \left(\mathbf{E}_{\nu_0} \left(1 \left(\#1(\tilde{X})_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right) \mid \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right) \\ & = C \mathbf{E}_{\nu_0} 1 \left(\#1(\tilde{X})_R < \frac{1+\varepsilon}{2} n \right). \end{aligned}$$

7. Результаты работы [25] гарантируют либо экспоненциальную (в случае $p = 0$), либо полиномиальную (в случае $p = 1$) оценку последнего математического ожидания, а именно,

$$\mathbf{E}_{\mu_0} 1(\#1(X)_R < \varepsilon'' n) \leq \begin{cases} C_m n^{-m}, & p = 1 \quad \forall m > 0, \\ C \exp(-cn), & p = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Такое же неравенство справедливо для ν_0 и $\tilde{X}$. Это вытекает из следующих неравенств для момента останова $\hat{\tau} = \inf\{t \geq 0: |X_t| \leq R\}$ (см. [25])

и [26]; по поводу деталей, связанных с редукцией к простой одномерной диффузии, см. также доказательство теоремы 2 в следующем разделе):

$$\begin{cases} \mathbf{E}_x \hat{\tau}^k \leq C_m(1 + |x|^m) & (\forall m > 2k), \quad p = 1 \quad \forall k > 0, \\ \mathbf{E}_x \exp(\alpha \hat{\tau}) \leq C \exp(c|x|) & (\exists C, c, \alpha > 0), \quad p = 0, \end{cases} \quad (47)$$

в силу неравенства $\mathbf{P}_{\mu_0}\{\#1(X)_R < \varepsilon''n\} \leq \mathbf{P}_{\mu_0}\{\hat{\tau}_{\varepsilon''n} > n\}$ (где $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}$ и по индукции $\hat{\tau}_{n+1} := \inf\{t \geq \hat{\tau}_n: |X_t| \leq R\}$, $n \geq 1$) и в силу либо экспоненциального неравенства Бьенеме–Чебышёва (в случае $p = 0$), либо стандартных семимартингалных неравенств (в случае $p = 1$). В самом деле, по индукции в силу (47) и в силу экспоненциального неравенства Бьенеме–Чебышёва в каждом из рассматриваемых случаев имеем следующее.

Случай $p = 0$. Выполнено неравенство

$$\mathbf{P}_x\{\hat{\tau}_{\varepsilon''n} > n\} \leq \exp(-\alpha n + \varepsilon''n \ln C + c|x|),$$

где $C := \sup_{|x| \leq R} \mathbf{E} \exp(\alpha \hat{\tau})$ можно сделать сколь угодно близким к единице выбором достаточно большого R . Это дает экспоненциальную оценку для вероятности $\mathbf{P}_x\{\hat{\tau}_{\varepsilon''n} > n\}$.

Случай $p = 1$. Пусть $\varepsilon'' < \varepsilon''' < 1$, и пусть R настолько велико, что выполняется неравенство $\varepsilon'' \sup_{|x'| \leq R} \mathbf{E}_{x'}(\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_{k-1} | X_{\hat{\tau}_{k-1}}) < \varepsilon''' < 1$. Как показано в [26], для любого $k > 0$ и любого $m > 2k > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}_x\{\hat{\tau}_{\varepsilon''n} > n\} = \mathbf{P}_x\left\{\sum_{i=1}^{\varepsilon''n} (\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_{k-1}) > n\right\} \leq C_m(1 + |x|^m)((1 - \varepsilon''')n)^{-k}n^{k/2}.$$

Поясним: последнее неравенство выражает тот простой факт, что момент $\mathbf{E}_x(\sum_{i=1}^{\varepsilon''n} (\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_{k-1}) - \mathbf{E}(\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_{k-1} | \mathcal{F}_{\hat{\tau}_{k-1}}))^k$ растет не быстрее, чем $n^{k/2}$. Это и обеспечивает полиномиальную оценку для вероятности $\mathbf{P}_x\{\hat{\tau}_{\varepsilon''n} > n\}$ с любой степенной функцией.

Таким образом, в обоих случаях справедливо неравенство (46).

8. В силу (45) и (46) получаем оценку выражения в (43):

$$\mathbf{E}_{\mu_0}\left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}\left(\sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon n} 1_{\delta}(X, \tilde{X}) \mid Y, \tilde{Y}\right) \Big|_{\tilde{Y}=Y}\right) \leq \begin{cases} C_m n^{-m}, & p = 1, \\ C \exp(-cn), & p = 0 \end{cases}$$

(при любом $m > 0$ в случае $p = 1$). Объединяя ее с ранее установленными неравенствами (39)–(42), получаем окончательную оценку (10) (в случае $p = 0$, вообще говоря, с новой постоянной c в экспоненте). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

1(6). Мы продолжаем доказательство от оценок (37)–(42), что и отражает выбранный способ нумерации его этапов (1(6), 2(7) и т.п.).

В частности, уже использовалось предположение $h \in C^2$. Напомним, что теперь мы не можем использовать условие (A3), и оно и не использовалось в предыдущих пунктах (1–5). Применим формулу (8) к расширенному процессу $(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y})$:

$$\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) | Y, \tilde{Y}) = \frac{\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \gamma^{-1}(X, Y; \tilde{X}, \tilde{Y}) | Y, \tilde{Y})}{\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y, \tilde{Y})}. \quad (48)$$

Далее, с помощью неравенства Коши–Буняковского–Шварца для условных математических ожиданий оценим числитель в правой части (48):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) \gamma^{-1} | Y, \tilde{Y}) \\ & \leq (\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) | Y, \tilde{Y}))^{1/2} (\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}))^{1/2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Знаменатель будет рассмотрен отдельно.

Дальнейшие рассуждения используют следующую идею. Во-первых, по мере $\mathbf{P}^\gamma$ две пары процессов $(X, \tilde{X})$ и $(Y, \tilde{Y})$ независимы на отрезке $[0, t]$ (на самом деле даже все четыре компоненты здесь независимы), поэтому

$$\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) | Y, \tilde{Y}) = \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}) = \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \mathbf{1}_\delta(X, \tilde{X}),$$

что является неслучайным числом. Во-вторых, мы покажем, что *математическое ожидание* второго множителя в (49), деленного на знаменатель, относительно меры $\mathbf{P}$ (не $\mathbf{P}^\gamma$),

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0} \frac{(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y})^{1/2}}{\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y}} \\ & = \mathbf{E}_{\mu_0}^\gamma \gamma^{-1} \frac{(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y})^{1/2}}{\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y}}, \end{aligned} \quad (50)$$

не превосходит экспоненты $\exp(Ct)$ с некоторой постоянной C , которая зависит лишь от $\|h\|_B$, но не от R . Наконец, будет установлено, что если $\#1(\delta) < \varepsilon n$, то математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma \mathbf{1}_\delta(X, Y)$ может быть сделано меньше, чем $\exp(-Ct)$ с *любым* $C > 0$ посредством выбора подходящего R . Таким образом, мы получим экспоненциальную оценку для первой части суммы (39). Начнем реализацию этой программы.

2(7). Знаменатель в (50). Его надо оценить снизу. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma(\gamma^{-1} | Y, \tilde{Y}) |_{\tilde{Y}=Y} \\ & = \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma \left(\exp \left(\int_0^t h(X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(X_s) ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(\tilde{X}_s) ds \right) | Y, \tilde{Y} \right) |_{\tilde{Y}=Y} \\ & \geq e^{-Ct} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^\gamma \left(\exp \left(\int_0^t h(X_s) dY_s + \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s | Y, \tilde{Y} \right) \right) |_{\tilde{Y}=Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-Ct} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(\int_0^t h(X_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \\
&\quad \times \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(\int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \middle| \tilde{Y} \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \\
&\geq e^{-Ct} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \middle| \tilde{Y} \right) \right)^{-1} \Big|_{\tilde{Y}=Y}.
\end{aligned}$$

Другими словами,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} (\gamma^{-1} \mid Y, \tilde{Y}) \Big|_{\tilde{Y}=Y} \right)^{-1} &\leq e^{+Ct} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \right) \\
&\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \middle| \tilde{Y} \right) \right) \Big|_{\tilde{Y}=Y}.
\end{aligned}$$

Напомним, что оба условных ожидания здесь являются непрерывными функциями Y и $\tilde{Y}$ и к обоим будет применено неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Имеем (с $p > 1$, $r = 2p$):

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \right)^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- p \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \right) \right)^{1/p} \\
&= \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(- p \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s \right) \right)^{1/p} \\
&= \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(- p \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s - r \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds + r \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(- 2p \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s - 2r \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \right)^{1/(2p)} \\
&\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(2r \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \right)^{1/(2p)} \\
&= \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(- 2p \int_0^t h(\tilde{X}_s) dY_s - \frac{4p^2}{2} \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \right)^{1/(2p)} \\
&\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \exp \left(2r \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \right)^{1/(2p)} \leq (e^{Ct})^{1/(2p)} = e^{Ct}
\end{aligned}$$

с некоторой новой константой C .

Аналогично (в действительности даже еще проще) оценивается выражение

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \middle| Y \right) \right)^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(- p \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \right) \right)^{1/p} \leq e^{Ct}.
\end{aligned}$$

3(8). Оценка числителя в (50). Его следует оценивать сверху. Имеем:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma}(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}) \big|_{\tilde{Y}=Y} \\
 &= \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(X_s) dY_s - \int_0^t h^2(X_s) ds \right) \right. \\
 &\quad \times \exp \left(2 \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s - \int_0^t h(\tilde{X}_s)^2 ds \right) \big| Y, \tilde{Y} \big) \big|_{\tilde{Y}=Y} \\
 &\leq e^{+Ct} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(X_s) dY_s + 2 \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \big| Y, \tilde{Y} \right) \big|_{\tilde{Y}=Y} \\
 &= e^{+Ct} \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \big| Y \right) \\
 &\quad \times \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(\int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \big| \tilde{Y} \right) \\
 &\leq e^{+Ct} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \big| Y \right) \right) \\
 &\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \big| \tilde{Y} \right) \right) \big|_{\tilde{Y}=Y}.
 \end{aligned}$$

Иными словами,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma}(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}) \big|_{\tilde{Y}=Y} &\leq e^{+Ct} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(X_s) dY_s \right) \big| Y \right) \right) \\
 &\quad \times \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma} \left(\exp \left(2 \int_0^t h(\tilde{X}_s) d\tilde{Y}_s \right) \big| \tilde{Y} \right) \right) \big|_{\tilde{Y}=Y}.
 \end{aligned}$$

Окончание оценки стандартно. Стало быть, получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{E}_{\mu_0}^{\gamma} \gamma^{-1} \frac{(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma}(\gamma^{-2} | Y, \tilde{Y}) \big|_{\tilde{Y}=Y})^{1/2}}{\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}^{\gamma}(\gamma^{-1} | Y, \tilde{Y}) \big|_{\tilde{Y}=Y}} \leq \exp(+Ct) \quad (51)$$

с некоторым неслучайным $C > 0$.

4(9). Оценка $\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \mathbf{1}_{\delta}(X, \tilde{X}) = \mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \mathbf{1}_{\delta}(Z)$. Подчеркнем, что мы ищем оценку данной *безусловной* вероятности, которую надо суметь сделать меньшей любой экспоненты, если величина R выбрана достаточно большой. Интуитивно это представляется достижимым в силу условия (A1), так как данное условие достаточно для экспоненциального бета-перемешивания; однако неясно, как именно достичь с помощью перемешивания *любой* экспоненциальной оценки на этом пути, и мы не будем прямо использовать бета-перемешивание.

Для заданной марковской диффузии $Z_t \in \mathbf{R}^{2d}$ построим сначала (вообще говоря, немарковский) одномерный процесс Ито с отражением, который мажорирует $|Z_t|$, и затем построим уже марковскую одномерную диффузию ζ_t , $t \geq 0$, мажорирующую этот процесс Ито, с помощью которой получится интересующая нас оценка сверху для величины $\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \mathbf{1}_{\delta}(Z)$.

Процесс $\hat{Z}_t := |Z_t| \vee (R - 2)$ является (вообще говоря, немарковским) одномерным процессом Ито с отражением, имеющим конечный снос $\hat{\beta}_t$ и единичный коэффициент диффузии при $\hat{Z}_t > R - 2$. В самом деле,

$$\begin{aligned} d|Z_t|^2 &= dX_t^2 + d\tilde{X}_t^2 = 2 \sum_i X_t^i dX_t^i + \sum_i (dX_t^i)^2 + 2 \sum_i \tilde{X}_t^i d\tilde{X}_t^i + \sum_i (d\tilde{X}_t^i)^2 \\ &= \left(2d + 2 \sum_i X_t^i b^i(X_t) + 2 \sum_i \tilde{X}_t^i b^i(\tilde{X}_t) \right) dt \\ &\quad + 2 \sum_i X_t^i dW_t^i + 2 \sum_i \tilde{X}_t^i d\tilde{W}_t^i. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь не появляется локальное время, что справедливо, поскольку $2d$ -мерный процесс $(X_t, \tilde{X}_t)$ с независимыми компонентами, чьи распределения эквивалентны стандартной $2d$ -мерной винеровской мере, не может достичь начала координат за конечное время. Стало быть, $\mathbf{P}(|Z_t| > 0, t > 0) = 1$, и, применяя формулу Ито, мы получаем, снова без какого-либо локального времени,

$$\begin{aligned} d|Z_t| &= d(|Z_t|^2)^{1/2} = \frac{1}{2|Z_t|} d|Z_t|^2 - \frac{1}{8|Z_t|^3} (d|Z_t|^2)^2 \\ &= |Z_t|^{-1} \left(d + \sum_i X_t^i b^i(X_t) + \sum_i \tilde{X}_t^i b^i(\tilde{X}_t) \right) dt \\ &\quad + |Z_t|^{-1} \sum_i X_t^i dW_t^i + |Z_t|^{-1} \sum_i \tilde{X}_t^i d\tilde{W}_t^i - \frac{X_t^2 + \tilde{X}_t^2}{2|Z_t|^3} dt. \end{aligned}$$

Заметим, что на множестве $\{|Z_t| \geq R - 2 > 0\}$ величина $|Z_t|$ отделена от нуля. Следовательно, по формуле Ито–Танаки (см. [23]), примененной к $|Z_t| \vee (R - 2)$, мы получаем

$$d\hat{Z}_t = \hat{\beta}_t dt + \mathbf{1}(\hat{Z}_t > R - 2) d\widehat{W}_t + d\hat{\varphi}_t,$$

где

$$\widehat{W}_t := \int_0^t \left(|Z_s|^{-1} \sum_i X_s^i dW_s^i + |Z_s|^{-1} \sum_i \tilde{X}_s^i d\tilde{W}_s^i \right)$$

— стандартный винеровский процесс, (например, в силу характеристизационной теоремы Леви, см. [19, теорема 4.1]) и

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_t &= \left(\frac{(d + \sum_i X_t^i b^i(X_t) + \sum_i \tilde{X}_t^i b^i(\tilde{X}_t))}{|Z_t|} - \frac{X_t^2 + \tilde{X}_t^2}{2|Z_t|^3} \right) \\ &\quad \times \mathbf{1}(|X_t|^2 + |\tilde{X}_t|^2 > (R - 2)^2). \end{aligned}$$

Здесь, наконец, появляется $\hat{\varphi}_t$ — локальное время процесса $\hat{Z}_t$ в точке $R - 2$. Отметим, что если $|Z_t|$ достаточно велико, то $\hat{\beta}_t$ — отрицательная величина с большим абсолютным значением, что легко следует из условия (A1).

Рассмотрим процесс $\bar{Z}_t$ со значениями на $[R - 2, \infty)$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению с мгновенным

отражением на границе $R - 2$:

$$d\bar{Z}_t = \bar{\beta} dt + d\widehat{W}_t + d\widehat{\varphi}_t, \quad \bar{Z}_t \geq R - 2, \quad \bar{Z}_0 = \max(|X_0| \vee |\tilde{X}_0|, R - 2),$$

имеющий единичную диффузию и постоянный большой отрицательный снос,

$$\bar{\beta} := \sup_{|Z_t| > R-2} \hat{\beta}_t,$$

$\bar{\varphi}$ — локальное время процесса $\bar{Z}_t$ в точке $R - 2$. (Этот процесс автоматически является *строгим марковским*, например, в силу сильной единственности.)

Отметим, что

$$\mathbf{1}(|Z_t| \geq R - 2) \bar{\beta} \geq \mathbf{1}(|Z_t| > R - 2) \hat{\beta}_t.$$

Стандартная теорема сравнения показывает, что с единичной вероятностью при всех $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\hat{Z}_t \leq \bar{Z}_t.$$

Ради удобства читателя и поскольку для именно такой теоремы сравнения авторам не удалось найти подходящую ссылку, приведем доказательство, хотя оно действительно стандартно. Обозначим

$$g(x) = x^4 \mathbf{1}(x > 0).$$

Тогда $g \in C_b^2$, и в силу формулы Ито

$$\begin{aligned} dg(\hat{Z}_t - \bar{Z}_t) &= \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) d(\hat{Z}_t - \bar{Z}_t)^4 \\ &= \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) \frac{12}{2} (\hat{Z}_t - \bar{Z}_t)^2 (\mathbf{1}(\hat{Z}_t > R - 2) - 1)^2 dt + \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) \\ &\quad \times 4(\hat{Z}_t - \bar{Z}_t)^3 ((\hat{\beta}_t - \bar{\beta}) dt + (\mathbf{1}(\hat{Z}_t > R - 2) - 1) d\widetilde{W}_t + (d\widehat{\varphi}_t - d\bar{\varphi}_t)) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{1}(\hat{Z}_t > R - 2) - 1 = -\mathbf{1}(\hat{Z}_t \leq R - 2)$ и, почти наверное,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) (\hat{Z}_t - \bar{Z}_t)^3 (\hat{\beta}_t - \bar{\beta}) &\leq 0, \\ \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) \mathbf{1}(\hat{Z}_t \leq R - 2) &= 0, \\ \mathbf{1}(\hat{Z}_t > \bar{Z}_t) (\hat{Z}_t - \bar{Z}_t)^3 (d\widehat{\varphi}_t - d\bar{\varphi}_t) &\leq 0. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\mathbf{E}g(\hat{Z}_t - \bar{Z}_t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{P}(\hat{Z}_t \leq \bar{Z}_t, t \geq 0) = 1.$$

5(10). Теперь построим подходящую оценку для процесса $\bar{Z}$. Положим

$$\tau_0 := \inf\{s \geq 0: \bar{Z}_s \leq R - 1\}, \quad \inf(\emptyset) = n$$

(напомним, что $n = [t]$), и

$$\tau'_1 := \inf\{s > [\tau_0]_+ : \bar{Z}_s \geq R\},$$

где $[a]_+$ обозначает минимальное целое число, не меньшее, чем a , или, иными словами, $[a]_+ = -[-a]$;

$$\tau_1 := \inf\{s \geq \tau'_1 : \bar{Z}_s \leq R - 1\}$$

и т.д. Далее, положим $\tau_k - \tau'_k =: \ell_k$. Обозначим $N = \sup\{k: \tau'_k \leq n\}$. Заметим, что

$$\{\#1(Z) \leq \varepsilon' n\} \subset \{\#1(\bar{Z}) \leq \varepsilon' n\} = \{\#0(\bar{Z}) > (1 - \varepsilon') n\},$$

где

$$\#1(\bar{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} 1(Z_i \leq R; \sup_{i \leq s \leq i+1} Z_s < R + 1)$$

и, естественно, $\#0(\bar{Z}) = n - \#1(\bar{Z})$. Выберем $\varepsilon' < \frac{1}{8}$.

Далее, условие $\#0(\bar{Z}) > (1 - \varepsilon') n$ означает, что по меньшей мере $(1 - \varepsilon') n$ интервалов единичной длины с концами в целых точках из семейства $\{[0, 1], \dots, [n - 1, n]\}$ содержат хотя бы одну точку, в которой $\bar{Z} \geq R$; и, конечно, всякий раз с единичной вероятностью не только одну такую точку, а целую окрестность, в которой выполнено неравенство $\bar{Z} \geq R$. Существуют всего три возможности для любого такого интервала I : 1) либо хотя бы один период, в котором $\bar{Z} \geq R$, начинается в этом интервале; 2) либо такой период заканчивается в этом интервале (конечно, 2) и 1) могут случиться и вместе на одном интервале); 3) не выполнено ни 1), ни 2), но $\bar{Z} \geq R$ на всем интервале I . Число интервалов I типов 1) и 2), посчитанных вместе, не превосходит $2N$ (так как всего-то этих интервалов не более N по определению этого числа). Значит, на множестве $N < n/8$ число интервалов I типа 3) не меньше, чем $6n/8$, а стало быть, на том же множестве $\sum \ell_k \geq 6n/8$. Мы показали, что

$$\left\{ \#0(\bar{Z}) > \frac{7n}{8} \right\} \subset \left\{ N \geq \frac{n}{8} \right\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{n/8} \ell_k(\bar{Z}) \geq \frac{6n}{8} \right\}.$$

Оцениваем

$$\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{k=1}^{n/8} \ell_k(\bar{Z}) \geq \frac{6}{8} n \right) \leq \exp \left(- \frac{6cn}{8} \right) \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \prod_{k=1}^{n/8} \exp(c\ell_k(\bar{Z})) \right).$$

Отметим, что при фиксированном $c > 0$, выбором достаточно большого R мы можем сделать величину $\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(\exp(c\ell_k(\bar{Z})) \mid \bar{Z}_{\tau_{k-1}})$ сколь угодно близкой к единице, притом равномерно относительно $k \geq 1$ и ω . Здесь используется вторая часть условия (A1) для борьбы с $k = 1$. Стало быть, сначала зафиксируем большое c , а затем достаточно большое R , так что, скажем,

$$\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \left(\sum_{k=1}^{n/8} \ell_k(\bar{Z}) \geq \frac{6}{8} n \right) \leq \exp \left(- \frac{5cn}{8} \right).$$

Наконец,

$$\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} \left(N \geq \frac{n}{8} \right) = \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} (\tau'_{n/8}(\bar{Z}) \leq n).$$

Напомним, что $\tau'_{k+1} = \inf\{t \geq [\tau_k]_+ : \bar{Z}_t \geq R\}$, и покажем, что при большом R событие $\{\tau'_{n/8}(\bar{Z}) \leq n\}$ весьма маловероятно. Действительно, введем обозначение

$$q := \sup_{0 \leq s \leq 1} \mathbf{P} \left(\sup_{[s]_+ \leq t \leq [s]_+ + 1} \bar{Z}_t \geq R \text{ или } \bar{Z}_{[s]_+ + 1} > R - 1 \mid \bar{Z}_s = R - 1 \right);$$

эта величина может быть сделана произвольно малой, если выбрать R достаточно большим. Идея состоит в том, что если при $\bar{Z}_s = R - 1$ произошло событие $0(\bar{Z})_{[s]_+}$, то непременно либо $\sup_{[s]_+ \leq t \leq [s]_+ + 1} \bar{Z}_t \geq R$, либо $\bar{Z}_{[s]_+ + 1} > R - 1$. На самом деле, первое из них происходит обязательно, а второе добавлено по техническим причинам.

Тогда в силу строго марковского свойства процесса $\bar{Z}$ и известного комбинаторного тождества $\sum_{k_1 + \dots + k_m = r} 1 = C_{r+m}^m$ для любых фиксированных m и r можно заключить, что вероятность $\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} (\tau_{n/8}(\bar{Z}) \leq n)$ не допускает следующую оценку, где $m := [n/8]$ и все $k_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} (\tau_{n/8}(\bar{Z}) \leq n) &\leq \sum_{k_1 + \dots + k_m \leq n} q^m 1^{k_1 + \dots + k_m} \leq q^m \sum_{r=0}^n \sum_{k_1 + \dots + k_m = r} 1 \\ &= q^m \sum_{r=0}^n C_{r+m}^m \leq q^m \sum_{r=0}^n 2^{r+m} \leq q^m 2^{n+m+1} \\ &= \exp \left(\left(\frac{9n}{8} \right) \ln 2 + (\ln q) \left[\frac{n}{8} \right] + \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Обсудим первое неравенство в этой цепочке соотношений. Если $\tau_{n/8}(\bar{Z}) \leq n$, то найдется по крайней мере $n/8$ интервалов, где выполнено $\bar{Z} \geq R$, но не любых, где это неравенство выполнено, а только образованных по специальным правилам (см. определение моментов τ и τ' выше). После следующего возвращения на уровень $R - 1$ и начиная со следующего целого момента времени, скажем, с $s = m$ (до которого никакие новые превышения любых уровней не считаются), наш процесс пытается или пересечь уровень R на интервале $[m, m + 1]$, или же превысить уровень $R - 1$ в точке $m + 1$. Если какая-либо из этих двух возможностей реализовалась, мы ждем ближайшего момента останова τ' , который, возможно, еще не наступил, и затем повторяем всю процедуру. Условие $\tau_{n/8}(\bar{Z}) \leq n$ гарантирует, что такое произойдет раньше или позже, по крайней мере, $n/8$ раз до n . Обозначим через k_m число единичных интервалов, до того как указанное событие произойдет m -й раз после $(m - 1)$ -го. Тогда вероятность $\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0} (\tau_{n/8}(\bar{Z}) \leq n)$ можно оценить сверху суммой $\sum_{k_1 + \dots + k_m \leq n} q^m 1^{k_1 + \dots + k_m}$, где каждая (условная) вероятность, что указанное событие не произойдет, просто заменена единицей,

а (также условная) вероятность, что оно произойдет, оценена сверху числом q .

Более формально, рассмотрим новую последовательность моментов остановки, где m — целое:

$$\tilde{\tau}_{k+1} := \inf\{t > [\tau_k]_+ : \bar{Z}_t \geq R\} \wedge \inf\{m \geq [\tau_k]_+ : \bar{Z}_m \geq R - 1\}.$$

Отметим, что в этом определении использованы «старые» моменты остановки τ_k . Естественно, для всякого k справедливо $\tilde{\tau}_k \leq \tau'_k$, и, в частности, $\tilde{\tau}_{n/8} \leq \tau'_{n/8}$. Поэтому $\mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}(\tau_{n/8} \leq n) \leq \mathbf{P}_{\mu_0, \nu_0}(\tilde{\tau}_{n/8} \leq n)$. Далее, неравенство $\tilde{\tau}_{n/8} \leq n$ влечет событие, состоящее в том, что суммарная длина объединения интервалов $\bigcup_{k=0}^{-1+n/8} [\tau_k, [\tilde{\tau}_{k+1}]_-]$ не превышает n . Следовательно, тем более, сумма всех длин единичных интервалов с целочисленными концами из этого объединения также не превышает n . Мы оцениваем сверху каждую (условную) вероятность того, что на очередном таком интервале произойдет останов, числом q , а противоположную вероятность — просто единицей. Тогда полная вероятность данного события оценивается сверху суммой $\sum_{k_1+\dots+k_m \leq n} q^m 1^{k_1+\dots+k_m}$, и окончание оценки приведено выше. Выбирая q достаточно малым, мы получаем экспоненциальную оценку $\exp(-Ct)$ первого члена в (41) со сколь угодно большим $C > 0$ (напомним, что $n = [t]$):

$$\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0} \sum_{\delta: \#1(\delta) < \varepsilon' n} \left(\mathbf{E}_{\mu_0, \nu_0}(1_\delta(X, Y) \mid Y, \tilde{Y}) \mid_{\tilde{Y}=Y} \right) \leq C_0 \exp(-Ct). \quad (52)$$

Объединяя (52) с неравенствами (39)–(42), а также с (51), получаем окончательную оценку (11). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Доказательство подсказывает, что вторая часть условия (A1) может быть ослаблена до некоторых полиномиальных моментов для обеих начальных мер. По-видимому, это повлечет полиномиальную окончательную оценку разности двух фильтров. В самой теореме 2, вероятно, экспоненциальные моменты для обеих мер с «любым $c > 0$ » можно заменить на «некоторое достаточно большое c ».

Первый автор благодарен кафедре математики Университета Мэна, Ле Ман (Le Mans), и РФФИ (грант № 05-01-00449) за поддержку работы. Текст оказался довольно техническим, что является благодатной почвой для потенциальных ошибок и неточностей; их число авторам удалось, по крайней мере, уменьшить благодаря замечаниям анонимного рецензента, которому мы также искренне признательны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atar R., Zeitouni O. Exponential stability for nonlinear filtering. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1997, v. 33, № 6, p. 697–725.
2. Baxendale P., Chigansky P., Liptser R. Asymptotic stability of the Wonham filter: ergodic and nonergodic signals. — SIAM J. Control Optim., 2004, v. 43, № 2, p. 643–669.

3. *Budhiraja A., Ocone D.* Exponential stability in discrete-time filters for bounded observation noise. — *Systems Control Lett.*, 1997, v. 30, № 4, p. 185–193.
4. *Budhiraja A., Ocone D.* Exponential stability for discrete-time filtering for nonergodic signals. — *Stochastic Process. Appl.*, 1999, v. 82, № 2, p. 245–257.
5. *Chigansky P., Liptser R.* Stability of nonlinear filters in nonmixing case. — *Ann. Appl. Probab.*, 2004, v. 14, № 4, p. 2038–2056.
6. *Clark J. M. C., Crisan D.* On a robust version of the integral representation formula of nonlinear filtering. — *Probab. Theory Related Fields*, 2005, v. 133, № 1, p. 43–56.
7. *Del Moral P., Guionnet A.* On the stability of interacting processes with applications to filtering and genetic algorithms. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 2001, v. 37, № 2, p. 155–194.
8. *Gulinsky O. V., Veretennikov A. Yu.* Large deviations for discrete-time processes with averaging. Utrecht: VSP, 1993, 186 p.
9. *Калманн Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987, 318 с.
10. *Kleptsyna M. L., Veretennikov A. Yu.* On discrete time ergodic filters with wrong initial data. — *Probab. Theory Related Fields*, 2008, v. 141, № 3–4, p. 411–444.
11. *Krasnosel'skii M. A., Lifshits Je. A., Sobolev A. V.* Positive Linear Systems. The Method of Positive Operators. Berlin: Heldermann, 1986, 255 p.
12. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
13. *Krylov N. V.* Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order. Dordrecht: Reidel, 1987, 462 p.
14. *Крылов Н. В.* О регулярности условных вероятностей для случайных процессов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т. 18, в. 1, с. 151–155.
15. *Крылов Н. В., Сафонов М. В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. — *Изв. АН СССР*, 1980, т. 44, № 1, с. 161–175.
16. *Kunita H.* Asymptotic behavior of the nonlinear filtering errors of Markov processes. — *J. Multivariate Anal.*, 1971, v. 1, p. 365–393.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
18. *Le Gland F., Oudjane N.* A robustification approach to stability and to uniform particle approximation of nonlinear filters: the example of pseudo-mixing signals. — *Stochastic Process. Appl.*, 2003, v. 106, № 2, p. 279–316.
19. *Лунцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
20. *Ocone D., Pardoux E.* Asymptotic stability of the optimal filter with respect to its initial condition. — *SIAM J. Control Optim.*, 1996, v. 34, № 1, p. 226–243.
21. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. New York–London: Academic Press, 1967, 276 p.
22. *Stannat W.* Stability of the filter equation for a time-dependent signal on $\mathbb{R}^d$. — *Appl. Math. Optim.*, 2005, v. 52, № 1, p. 39–71.
23. *Tanaka H.* Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 1963, № 1, p. 251–257.
24. *Веретенников А. Ю.* Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами, разрывными по времени. — *Матем. заметки*, 1982, т. 31, № 4, с. 278–283.
25. *Веретенников А. Ю.* Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
26. *Веретенников А. Ю.* О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.

Поступила в редакцию
16.III.2006