Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, О сходимости Моско диффузионных форм Дирихле, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 277–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:03:40

© 2008 г.

ПУГАЧЁВ О. В.*

О СХОДИМОСТИ МОСКО
ДИФФУЗИОННЫХ ФОРМ ДИРИХЛЕ¹⁾

Рассматривается сходимость Моско форм Дирихле $\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla f|^2 d\mu_n$, где меры μ_n сходятся локально по вариации и не обязаны иметь полные носители.

Ключевые слова и фразы: диффузионные полугруппы, сходимость Моско, дифференцируемость мер, квадратичные формы, соболевские классы.

1. Сходимость Моско и ее приложения. Сходимость Моско впервые была введена в работе [1]. Основной результат [1] заключается в том, что сходимость Моско квадратичных форм на $L^2(\mu)$ эквивалентна сильной сходимости порожденных ими диффузионных полугрупп; из нее также вытекает слабая сходимость конечномерных распределений диффузионных процессов (см. [2]–[5]). Следующий шаг был сделан в работах [6] и [7], где рассматривались квадратичные формы на последовательности гильбертовых пространств. Приведенное в данной работе определение сходимости Моско (см. определение 1.2) соответствует именно этому более общему случаю.

Пусть X — локально выпуклое пространство (конечномерное или бесконечномерное). Пусть $\Omega = C([0, \infty) \rightarrow X)$ — пространство всех непрерывных траекторий (отображений из $[0, \infty)$ в X) и X_t — координатная функция на Ω , т.е. $X_t(\omega) = \omega(t)$. Марковский диффузионный процесс на X будем обозначать

$$\{\Omega, X_t, \mathcal{F}_t, P_x, x \in X\},$$

где $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ — возрастающее семейство σ -алгебр на Ω такое, что X_t измеримы относительно $\mathcal{F}_t$; P_x — вероятностная мера на Ω , а именно, распределение траекторий, стартующих из точки x . Пусть μ — вероятностная или неотрицательная σ -конечная мера на X , инвариантная

* МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: opugachev@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00536 и DFG 436 RUS 113/343/0(R).

относительно данного процесса, т.е., если взять на Ω меру

$$\mathcal{P}_\mu = \int_X P_x d\mu,$$

то все X_t , $t \geq 0$, будут иметь одинаковые распределения. Диффузионный процесс порождает полугруппу

$$\{T_t\}_{t \geq 0}: f \mapsto T_t f(x) = \int f(X_t) dP_x$$

на $L^2(\mu)$. Генератором полугруппы называется (неограниченный) неположительно определенный линейный оператор L с областью определения $D(L)$ такой, что

$$T_t = e^{tL} \quad \text{для } f \in D(L).$$

С генератором полугруппы ассоциирована неотрицательно определенная квадратичная форма $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, $D(\mathcal{E}) = D(L)$:

$$\mathcal{E}(f, g)_{L^2(\mu)} = -(f, Lg)_{L^2(\mu)} \quad \forall f, g \in D(\mathcal{E}) = D(L).$$

Пусть еще имеется последовательность диффузионных процессов

$$\{\Omega, X_t, \mathcal{F}_t, P_x^n, x \in X\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с соответствующими инвариантными мерами μ_n . Положим

$$\mathcal{P}_{\mu_n} = \int_X P_x^n d\mu_n.$$

Полугруппу, соответствующую форме $\mathcal{E}_n$, будем обозначать $\{T_{n,t}\}$. Если семейство мер $\{\mathcal{P}_{\mu_n}\}$ слабо компактно на Ω , то при некоторых незначительных ограничениях на меры μ_n сходимость Моско $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ влечет слабую сходимость $\mathcal{P}_{\mu_n} \rightarrow \mathcal{P}_\mu$ (см. [3]–[5]).

Основной результат работы [6] является обобщением теоремы Моско из [1].

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, $n = 1, 2, \dots$, — формы Дирихле соответственно на $L^2(\mu)$ и на $L^2(\mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско;
- 2) для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t}f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$.

Пусть μ — неотрицательная мера Радона на X . Неотрицательно определенной квадратичной формой на $L^2(\mu)$ называется функция $\mathcal{E}: L^2(\mu) \rightarrow [0; +\infty]$ со следующими свойствами:

- 1) для всяких $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mu)$ имеем $\mathcal{E}(tf) = t^2 \mathcal{E}(f)$;
- 2) для всяких $f, g \in L^2(\mu)$ имеем $\mathcal{E}(f+g) + \mathcal{E}(f-g) = 2\mathcal{E}(f) + 2\mathcal{E}(g)$.

Пусть $D(\mathcal{E})$ обозначает линейное пространство тех $f \in L^2(\mu)$, для которых $\mathcal{E}(f) < \infty$. На $D(\mathcal{E})$ квадратичная форма $\mathcal{E}$ порождает следующую билинейную форму $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$;

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}(f + g) - \mathcal{E}(f - g)), \quad \mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(f, f).$$

Квадратичная форма $\mathcal{E}$ на $L^2(\mu)$ называется марковской, если для всяких функции $f \in D(\mathcal{E})$ и неубывающей функции $Z: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, липшицевой с константой 1 и такой, что $Z(0) = 0$, имеем $Z \circ f \in D(\mathcal{E})$ и $\mathcal{E}(Z \circ f) \leq \mathcal{E}(f)$. Квадратичная форма $\mathcal{E}$ на $L^2(\mu)$ замкнута, если $D(\mathcal{E})$ полно по норме $\|f\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{\|f\|_{L^2(\mu)}^2 + \mathcal{E}(f)}$. Замкнутая марковская квадратичная форма называется формой Дирихле.

Далее будем предполагать, что μ_n, μ — радоновские неотрицательные меры на X . Будем обозначать вариацию меры символом $\|\cdot\|$. В конечномерном случае пусть $C = C_0^\infty(X)$ — класс гладких функций с компактными носителями на X ; в бесконечномерном случае пусть $C = \mathcal{F}\mathcal{C}_0^\infty(X)$ — класс гладких цилиндрических функций вида

$$f(x) = u(l_1(x), \dots, l_m(x)), \quad l_j \in X^*, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Напомним, что класс функций C является плотным в $L^2(\mu)$ по любой радоновской мере μ .

Будем говорить, что последовательность мер μ_n на X локально слабо сходится к мере μ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx)$$

для всякой непрерывной функции f на X с компактным носителем.

О п р е д е л е н и е 1.1. А) Последовательность функций $f_n \in L^2(\mu_n)$ *сильно сходится* к функции $f \in L^2(\mu)$, если:

- 1) $\int f_n(x) \varphi(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int f(x) \varphi(x) \mu(dx)$ для любой функции $\varphi \in C$;
- 2) $\|f_n\|_{L^2(\mu_n)} \rightarrow \|f\|_{L^2(\mu)}$.

Б) Последовательность функций $f_n \in L^2(\mu_n)$ *слабо сходится* к функции $f \in L^2(\mu)$, если для всякой последовательности функций $g_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $g \in L^2(\mu)$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) g_n(x) \mu_n(dx) = \int f(x) g(x) \mu(dx).$$

Заметим, что в случае $\mu_n = \mu$ определения 1.1 А), Б) равносильны соответственно сходимости по норме в $L^2(\mu)$ и слабой сходимости в $L^2(\mu)$ (см. [8]). Еще один очевидный факт: если $\mu_n \rightarrow \mu$ слабо (в конечномерном случае — локально слабо), то всякая функция $f \in C$ сходится к самой себе сильно в смысле определения 1.1.

О п р е д е л е н и е 1.2. Последовательность квадратичных форм $\mathcal{E}_n$ на $L^2(\mu_n)$ сходится по Моско к квадратичной форме $\mathcal{E}$ на $L^2(\mu)$, если выполнены следующие два условия:

(М1) для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, слабо сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_n) \geq \mathcal{E}(f);$$

(М2) для всякой функции $f \in L^2(\mu)$ найдется последовательность $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящаяся к f , такая, что

$$\mathcal{E}_n(f_n) \rightarrow \mathcal{E}(f).$$

2. Соболевские классы. Пусть квадратичная форма изначально задана на функциях класса C . Чтобы построить область определения $D(\mathcal{E})$ квадратичной формы $\mathcal{E}$ таким образом, чтобы она была замкнутой, используются конструкции соболевских классов (см. определение 2.2 ниже). Но сначала введем некоторые вспомогательные понятия.

Следующие определения локальной дифференцируемости мер являются обобщениями известных определений Скорохода и Фомина:

О п р е д е л е н и е 2.1. 1) Мера μ на локально выпуклом пространстве X называется *локально дифференцируемой вдоль вектора* $h \in X$ в смысле Скорохода, если меры $(\mu(\cdot + th) - \mu)/t$ локально слабо сходятся к некоторой знакопеременной мере, обозначаемой $d_h\mu$.

2) Мера μ называется *локально дифференцируемой вдоль вектора* $h \in X$ в смысле Фомина, если меры $(\mu(\cdot + th) - \mu)/t$ сходятся к $d_h\mu$ на каждом предкомпактном борелевском множестве.

В случае (локальной) дифференцируемости по Фомину мера $d_h\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ , соответствующая плотность обозначается через β_h^μ и называется *логарифмической производной* меры μ вдоль вектора h .

Пусть $H \subset X$ — линейное подпространство. В случае $X = \mathbf{R}^d$ пусть оно наделено евклидовой нормой, не обязательно совпадающей с нормой из $\mathbf{R}^d$. Если же X — бесконечномерное локально выпуклое пространство, то предположим, что H — гильбертово пространство (конечномерное или бесконечномерное сепарабельное), непрерывно вложенное в X . Для функций $f \in C$ будем обозначать символом $\nabla_H f$ градиент вдоль подпространства H .

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть μ — неотрицательная мера на локально выпуклом пространстве X ; квадратичная форма определена для функций $\varphi \in C$ формулой $\mathcal{E}(\varphi) = \int |\nabla_H \varphi|^2 d\mu$.

1) *Минимальным соболевским классом* $W_H^{1,2}(\mu)$ называется пополнение класса C по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

2) Если мера μ дифференцируема в смысле Фомина по всем векторам $h \in H$, то максимальным соболевским классом $\widehat{W}_H^{1,2}(\mu)$ называется класс тех функций $f \in L^2(\mu)$, для которых существуют обобщенные частные производные при всех $h \in H$, т.е. функции $\partial_h f \in L^2(\mu)$ такие, что для всякой функции $\varphi \in C$ верна формула интегрирования по частям

$$\int f(x) \partial_h \varphi(x) \mu(dx) = - \int \partial_h f(x) \varphi(x) \mu(dx) - \int f(x) \varphi(x) \beta_h^\mu(x) \mu(dx).$$

Класс $W_H^{1,2}(\mu)$ определен корректно в том и только том случае, если форма $\mathcal{E}$, заданная на C , замыкаема (см. [9]).

В общем случае $W_H^{1,2}(\mu) \subset \widehat{W}_H^{1,2}(\mu)$. Известно, что если мера μ дифференцируема в смысле Фомина по всем векторам $h \in H$ и при этом $\beta_h^\mu \in L^2(\mu)$, то классы $W_H^{1,2}(\mu)$ и $\widehat{W}_H^{1,2}(\mu)$ совпадают (см. [10]). В пространстве $\mathbf{R}^d$ нетрудно доказать, что это утверждение верно даже в случае локальной дифференцируемости по Фомину и $\beta_h^\mu \in L_{\text{loc}}^2(\mu)$.

3. Новые результаты в $\mathbf{R}^d$. В этом пункте доказываются две теоремы (3.1 и 3.2) о сходимости Моско форм Дирихле $\int |\nabla f|^2 d\mu_n$ к форме $\int |\nabla f|^2 d\mu$ в случае, когда меры μ_n сходятся локально по вариации к мере μ , при различных дополнительных условиях. Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. Пусть μ_n, μ — неотрицательные локально конечные меры на $\mathbf{R}^d$; μ_n сходятся к μ локально по вариации. Пусть борелевские функции $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и f равномерно ограничены. Если $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо в смысле определения 1.1, то можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $f_{n_k} \rightarrow f$ локально слабо в $L^2(\mu)$.

Доказательство. Пусть $|f_n| \leq M$. Докажем для подпоследовательности сходимость

$$\int f_n g d\mu \rightarrow \int f g d\mu \quad (1)$$

для функции $g \in L^2(\mu)$ с носителем в шаре K . Поскольку $V = \mu(K) < \infty$, получаем $\|f_n\|_{L^2(\mu|_K)} \leq M\sqrt{V}$. По теореме Банаха–Алаоглу из этого следует, что существует подпоследовательность (которую вновь обозначим через $\{f_n\}$), сходящаяся слабо в $L^2(\mu|_K)$ к некоторой функции $f_0 \in L^2(\mu|_K)$. Теперь докажем, что $f_0 = f$ μ -почти всюду на K . Если бы это было не так, существовала бы функция $\psi \in C$ с носителем в K , принимающая значения в $[0; 1]$, такая, что

$$\int (f - f_0) \psi d\mu \neq 0.$$

Но с другой стороны, из слабой сходимости $f_n \rightarrow f$ в смысле определения 1.1 и слабой сходимости $f_n \rightarrow f_0$ в $L^2(\mu|_K)$ мы имеем

$$\int f_n \psi d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \psi d\mu; \quad \int f_n \psi d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f_0 \psi d\mu,$$

откуда следует

$$\int (f - f_0) \psi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \psi d(\mu_n - \mu) = 0,$$

так как функция $f_n \psi$ ограничена и $\mu_n \rightarrow \mu$ по вариации на K . Итак, $f_0 = f$ на K μ -почти всюду, т.е. $f_n \rightarrow f$ слабо в $L^2(\mu|_K)$, откуда вытекает (1) для всех $g \in L^2(\mu)$ с носителями в K . Взяв шары $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbf{R}^d$, будем строить подпоследовательности $\{f_n\}$ со свойством (1) для $\text{supp } g \subset K_j$, $j = 1, 2, \dots$; затем диагональным методом построим общую подпоследовательность со свойством (1) для всех $g \in L^2(\mu)$ с компактными носителями. Лемма 3.1 доказана.

В случае конечной меры μ локальная слабая сходимость в $L^2(\mu)$ равносильна слабой сходимости в $L^2(\mu)$.

Лемма 3.2. Пусть μ — неотрицательная локально конечная мера на $\mathbf{R}^d$. Пусть функция $\rho: \mathbf{R}^d \rightarrow (0; 1]$ принадлежит классу C^∞ и имеет ограниченный логарифмический градиент. Предположим, что квадратичная форма

$$\mathcal{E}(\varphi)|_{\varphi \in C} = \int |\nabla_H \varphi|^2 d\mu$$

замыкаема в $L^2(\mu)$. Тогда квадратичная форма

$$\mathcal{E}^\rho(\varphi)|_{\varphi \in C} = \int |\nabla_H \varphi|^2 \rho d\mu$$

замыкаема в $L^2(\rho \cdot \mu)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_n \in C$, $\varphi_n \rightarrow 0$ в $L^2(\rho\mu)$ и $\nabla_H \varphi_n \rightarrow v$ в $L^2(\rho\mu, H)$. Нужно доказать, что ρ μ -почти всюду выполнено равенство $v = 0$. Рассмотрим последовательность функций $\psi_n = \varphi_n \sqrt{\rho} \in C$. Для них имеем:

$$\psi_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\mu);$$

$$\nabla_H(\psi_n - \psi_m) = \sqrt{\rho} \nabla_H(\varphi_n - \varphi_m) + (\varphi_n - \varphi_m) \frac{\nabla_H \rho}{2\sqrt{\rho}},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int |\nabla_H(\psi_n - \psi_m)|^2 d\mu &\leq 2 \int |\nabla_H(\varphi_n - \varphi_m)|^2 \rho d\mu \\ &+ \frac{1}{2} \int \left(\frac{|\nabla_H \rho|}{\rho} \right)^2 (\varphi_n - \varphi_m)^2 \rho d\mu \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n > m \rightarrow \infty$. В силу замыкаемости $\mathcal{E}$ отсюда следует, что $\nabla_H \psi_n \rightarrow 0$ в $L^2(\mu, H)$. Но из этого вытекает, что

$$\nabla_H \varphi_n = \rho^{-1/2} \left(\nabla_H \psi_n - \psi_n \frac{\nabla_H \rho}{2\rho} \right) \rightarrow 0$$

в $L^2(\rho\mu|_K, H)$ на всяком компакте K , на котором $\min_K \rho > 0$. Поскольку все $\mathbf{R}^d$ покрывается такими компактами, мы получаем, что μ -почти всюду $v = 0$. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.1. Пусть меры μ_n, μ на $\mathbf{R}^d$ неотрицательны и локально конечны; пусть $\mu_n \geq \mu$; $\mu_n \rightarrow \mu$ локально слабо при $n \rightarrow \infty$. Пусть при некоторой положительной константе β выполнена оценка

$$\mu\{|x| \leq R\} \leq e^{\beta R} \quad \forall R > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим квадратичные формы $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbf{N}$, и $\mathcal{E}$, заданные на C формулами

$$\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu_n(dx) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu(dx)$$

соответственно, причем $D(\mathcal{E}_n)$ таковы, что C плотно в $D(\mathcal{E}_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$. Предположим, что $\mathcal{E}$ замкнута. Тогда $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при доказательстве (M1) достаточно рассмотреть случай, когда f_n и f равномерно ограничены. Действительно, пусть $Z_M(t) = \min\{\max\{-M; t\}; M\}$, тогда для $f \in D(\mathcal{E})$ имеем $|\nabla_H(Z_M \circ f)| \leq |\nabla_H f|$, и поскольку $Z_M \circ Z_{M+1} \equiv Z_M$, то имеем μ -почти всюду $|\nabla_H(Z_M \circ f)|^2 \nearrow |\nabla_H f|^2$ при $M \rightarrow \infty$. По теореме Б. Леви получаем $\mathcal{E}(Z_M \circ f) \nearrow \mathcal{E}(f)$. Если мы докажем, что $\mathcal{E}(Z_M \circ f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(Z_M \circ f_n)$ при всяком $M \in \mathbf{N}$, то получим

$$\mathcal{E}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{E}(Z_M \circ f) \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(Z_M \circ f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_n).$$

Итак, пусть $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо, $|f_n| \leq M$, $|f| \leq M$.

Поскольку $\mu_n \geq \mu$, имеем вложения $L^2(\mu_n) \subset L^2(\mu)$ и $D(\mathcal{E}_n) \subset D(\mathcal{E})$. Кроме того, так как $\mu_n \geq \mu$, то из локальной слабой сходимости $\mu_n \rightarrow \mu$ вытекает локальная сходимость мер по вариации, ибо для всякого шара K

$$\|(\mu_n - \mu)|_K\| = \inf_{\varphi} \int \varphi d(\mu_n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где инфимум берется по непрерывным функциям $\varphi: X \rightarrow [0; 1]$ таким, что $\varphi|_K = 1$.

По лемме 3.1 выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая локально слабо сходится к f в $L^2(\mu)$. Рассмотрим конечные меры

$$\rho_t \mu, \quad \text{где} \quad \rho_t = \exp\left(t - \sqrt{t^2 + 2\beta^2|x|^2}\right), \quad t \in \mathbf{N},$$

а константа β взята из (2). Тогда $f_{n_k} \rightarrow f$ слабо в $L^2(\rho_t \mu)$. Действительно, если $g \in L^2(\rho_t \mu)$, то $\psi = g \sqrt{\rho_t} \in L^2(\mu)$ и существует последовательность гладких функций ψ_m с компактными носителями, сходящаяся к ψ

в $L^2(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int (f_{n_k} - f) g \rho_t d\mu &= \int (f_{n_k} - f) \sqrt{\rho_t} \psi d\mu \\ &\leq \int (f_{n_k} - f) \sqrt{\rho_t} \psi_m d\mu + 2M \|\sqrt{\rho_t}\|_{L^2(\mu)} \|\psi_m - \psi\|_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое m , что $\|\psi_m - \psi\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon / (4M \|\sqrt{\rho_t}\|_{L^2(\mu)})$. При достаточно больших k выполнено неравенство

$$\int (f_{n_k} - f) \sqrt{\rho_t} \psi_m d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому

$$\int (f_{n_k} - f) \sqrt{\rho_t} \psi d\mu < \varepsilon.$$

Поскольку по лемме 3.2 квадратичная форма $\mathcal{E}^t(\varphi)|_{\varphi \in C} = \int |\nabla_H \varphi|^2 \rho_t d\mu$ на $L^2(\rho_t \mu)$ замыкаема, $f \in D(\mathcal{E}^t)$ и поскольку для замыкаемой формы мы имеем $\mathcal{E}^t \rightarrow \mathcal{E}^t$ по Моско (см. [1]), то мы получаем

$$\mathcal{E}^t(f) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}^t(f_{n_k}) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_{n_k}).$$

Тогда по теореме Б. Леви $\mathcal{E}(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}^t(f) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_{n_k})$. Далее,

$$\mathcal{E}_{n_k}(f_{n_k}) - \mathcal{E}(f_{n_k}) = \int |\nabla_H f_{n_k}|^2 d(\mu_{n_k} - \mu) \geq 0,$$

и мы получаем

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{n_k}(f_{n_k}) \geq \mathcal{E}(f). \quad (3)$$

Поскольку из всякой подпоследовательности $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность со свойством (3), то это свойство выполнено и для всей последовательности функций $\{f_n\}$. Таким образом, условие (M1) доказано.

Чтобы доказать (M2), заметим, что $\mathcal{E}_n(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ для всякой функции $\varphi \in C$, и применим следующую лемму [3, лемма 2.8]: *если для квадратичных форм $\mathcal{E}_n$ на $L^2(\mu_n)$ и $\mathcal{E}$ на $L^2(\mu)$ выполнено условие (M1), то для выполнения (M2) является достаточным условие*

$$\mathcal{E}_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \tilde{C},$$

где $\tilde{C} \subset D(\mathcal{E}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\mathcal{E}_n)$ — некоторый класс функций, плотный в $D(\mathcal{E})$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *Если выполнены условия теоремы 3.1 и, кроме того, формы $\mathcal{E}_n$ замкнуты, то*

1) *для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t} f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$;*

2) *диффузионные процессы, ассоциированные с $\mathcal{E}_n$, слабо сходятся к диффузионному процессу, ассоциированному с $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 1.1 с учетом того, что форма $\mathcal{E}$ замкнута по условию; второе вытекает из [3, гл. 7].

Как правило, при доказательстве сходимости Моско градиентных форм Дирихле $\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla f(x)|^2 \mu_n(dx)$ в $\mathbf{R}^d$ доказывают сходимость частных форм Дирихле

$$\mathcal{E}_n^i(f) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \mu_n(dx), \quad i = 1, \dots, d.$$

Однако возможна ситуация, когда формы $\mathcal{E}_n$ сходятся по Моско, а $\mathcal{E}_n^i$ не сходятся. Приведем пример такого рода. Пусть λ^d обозначает d -мерную меру Лебега на $\mathbf{R}^d$.

Пример 3.1. В работе [12] было построено множество на плоскости вида

$$S = Q_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

где $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ — открытые квадраты, $\overline{Q_k} \subset Q_0$ и $\overline{Q_k} \cap \overline{Q_j} = \emptyset$ при $k, j \in \mathbf{N}$, обладающее следующим свойством: если $\mu = \lambda^2|_S$, то квадратичная форма

$$\mathcal{E}(\varphi)|_{\varphi \in C} = \int |\nabla \varphi|^2 d\mu$$

замыкаема, но форма

$$\mathcal{E}^1(\varphi)|_{\varphi \in C} = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 d\mu$$

не замыкаема. Аналогичные формы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n^1$, соответствующие мере

$$\mu_n = \lambda^2|_{S_n}, \quad S_n = Q_0 \setminus \bigcup_{k=1}^n Q_k,$$

замыкаемы. Пусть $D(\mathcal{E}) = W^{1,2}(\mu)$, $D(\mathcal{E}_n) = W^{1,2}(\mu_n)$. Тогда выполнены условия теоремы 3.1, следовательно, $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско. Но формы Дирихле $\mathcal{E}_n^1$ не будут сходитьсся по Моско к $\mathcal{E}^1$: какую бы $D(\mathcal{E}^1)$ мы ни выбирали, форма $\mathcal{E}^1$ не будет замкнутой.

В работе [13] пример из [12] был обобщен на $\mathbf{R}^d$ таким образом, что $\mathcal{E}$ замыкаема, но ни одна из форм $\mathcal{E}^i$ не замыкаема. Следовательно, можно построить такие меры $\mu_n \searrow \mu$, что $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско, но $\mathcal{E}_n^i \not\rightarrow \mathcal{E}^i$ при всех $i = 1, \dots, d$.

Теорема 3.2. Пусть на $\mathbf{R}^d$ заданы неотрицательные локально конечные меры μ и μ_n , $n = 1, 2, \dots$. Пусть меры μ_n локально дифференцируемы по Скороходу по всем векторам $h \in H \subset \mathbf{R}^d$, а мера μ локально дифференцируема по Фомину по всем векторам $h \in H$, причем $\beta_h^\mu \in L_{\text{loc}}^2(\mu)$. Предположим, что $\mu_n \rightarrow \mu$ и $d_h \mu_n \rightarrow d_h \mu$ локально по вариации.

Рассмотрим квадратичные формы

$$\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu_n(dx),$$

для которых $D(\mathcal{E}_n)$ таковы, что C плотно в $D(\mathcal{E}_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$ и

$$\mathcal{E}(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu(dx), \quad D(\mathcal{E}) = W_H^{1,2}(\mu).$$

Тогда $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско.

Доказательство. Проверим (M1). Пусть $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо. Так же, как в теореме 3.1, достаточно рассмотреть случай $|f_n| \leq M$, $|f| \leq M$. Если $f_n \notin D(\mathcal{E}_n)$, то $\mathcal{E}_n(f_n) = +\infty$. Поэтому, исключив такие f_n из последовательности, мы не изменим значение $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_n)$. Итак, пусть $f_n \in D(\mathcal{E}_n)$. Подберем функции $h_n \in C$, $|h_n| \leq M$, такие, что $\|h_n - f_n\|_{\mathcal{E}_n} < 1/n$; тогда

$$\|h_n - f_n\|_{L^2(\mu_n)} < \frac{1}{n}, \quad |\mathcal{E}_n(h_n) - \mathcal{E}_n(f_n)| < \frac{1}{n^2},$$

следовательно, $h_n \rightarrow f$ слабо и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_n)$. Значит, можно рассматривать h_n вместо f_n . Нам нужно доказать, что

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(h_n) \geq \mathcal{E}(f).$$

Нетривиален лишь случай $L < \infty$. Выберем из $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ подпоследовательность (которую вновь обозначим через $\{h_n\}_{n=1}^\infty$), для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(h_n) = L$. Выбрав по лемме 3.1 подпоследовательность, предположим, что $h_n \rightarrow f$ локально слабо в $L^2(\mu)$.

Поскольку $\beta_h^\mu \in L_{\text{loc}}^2(\mu)$ при всех $h \in H$, мы имеем $D(\mathcal{E}) = W_H^{1,2}(\mu) = \widehat{W}_H^{1,2}(\mu)$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ ($m \leq d$) — ортонормированный базис подпространства H ; обозначим $\Delta_H \varphi = \sum_{i=1}^m \partial_{e_i}^2 \varphi$. Покажем, что для всякой функции $f \in L^2(\mu)$ верна формула

$$\sqrt{\mathcal{E}(f)} = \sup \left\{ - \int f \Delta_H g d\mu - \sum_{i=1}^m \int f \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu) : g \in C, \mathcal{E}(g) = 1 \right\}. \quad (4)$$

Если $f \in D(\mathcal{E})$, то

$$\begin{aligned} - \int f \Delta_H g d\mu - \sum_{i=1}^m \int f \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu) &= \sum_{i=1}^m \int \partial_{e_i} f \partial_{e_i} g d\mu = \mathcal{E}(f, g) \\ &\leq \sqrt{\mathcal{E}(f) \mathcal{E}(g)} = \sqrt{\mathcal{E}(f)}, \end{aligned}$$

причем равенство достигается в пределе при $\|g - (\mathcal{E}(f))^{-1/2} f\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0$. С другой стороны, если супремум (4) конечен, то при $i = 1, \dots, m$ линейный функционал

$$F_i(v) = - \int f \partial_{e_i} v d\mu - \int f v d(d_{e_i} \mu)$$

непрерывен по норме $L^2(\mu)$ на подпространстве C , состоящем из функций v , для которых $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x + t e_i) dt \equiv 0$. Доопределим $F_i(v) = 0$ для $v \in C$ с $\partial_{e_i} v \equiv 0$, тогда F_i непрерывен по норме $L^2(\mu)$ на всем C . Следовательно, существует функция $w_i \in L^2(\mu)$ такая, что $F_i(v) = \int w_i v d\mu$, т.е. w_i является обобщенной производной $\partial_{e_i} f$ функции f . Таким образом, $f \in D(\mathcal{E})$.

Пусть $g \in C$, $\mathcal{E}(g) = 1$. Тогда $\mathcal{E}_n(g) \rightarrow 1$, следовательно, $\mathcal{E}_n(h_n, g) \leq \sqrt{\mathcal{E}_n(h_n) \mathcal{E}_n(g)} \leq \sqrt{L + \varepsilon}$ при достаточно больших n . С другой стороны,

$$\mathcal{E}_n(h_n, g) = - \int h_n \Delta_H g d\mu_n(dx) - \sum_{i=1}^m \int h_n \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu_n).$$

Поскольку $h_n \rightarrow f$ слабо и $\Delta_H g \rightarrow \Delta_H g$ сильно в смысле определения 1.1, получаем $\int h_n \Delta_H g d\mu_n(dx) \rightarrow \int f \Delta_H g d\mu(dx)$. Далее,

$$\begin{aligned} & \left| \int h_n \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu_n) - \int f \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu) \right| \\ & \leq \left| \int h_n \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu_n - d_{e_i} \mu) \right| + \left| \int (h_n - f) \partial_{e_i} g d_{e_i} \mu \right|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое не превосходит $M \sup |\nabla_H g| \cdot \|(d_{e_i} \mu_n - d_{e_i} \mu)|_{\text{supp } g}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Второе слагаемое также стремится к нулю, поскольку $h_n \rightarrow f$ локально слабо в $L^2(\mu)$, а функция $\partial_{e_i} g$ ограничена и имеет компактный носитель, следовательно, $\partial_{e_i} g d_{e_i} \mu \in L^2(\mu)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & - \int f \Delta_H g d\mu - \sum_{i=1}^m \int f \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \int h_n \Delta_H g d\mu_n - \sum_{i=1}^m \int h_n \partial_{e_i} g d(d_{e_i} \mu_n) \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(h_n, g) \leq \sqrt{L + \varepsilon}, \end{aligned}$$

и по формуле (4) мы получаем $\mathcal{E}(f) \leq L + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно было взять сколь угодно малым, получаем $\mathcal{E}(f) \leq L$, что завершает доказательство свойства (M1). Чтобы доказать (M2), воспользуемся леммой [3, лемма 2.8], заметив, что $\mathcal{E}_n(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ для всякой функции $\varphi \in C$. Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.2. Если выполнены условия теоремы 3.2 и, кроме того, формы $\mathcal{E}_n$ замкнуты, то для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t} f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$; а диффузионные процессы, ассоциированные с $\mathcal{E}_n$, слабо сходятся к диффузионному процессу, ассоциированному с $\mathcal{E}$.

4. Бесконечномерный случай. Обобщим результаты, полученные в предыдущем пункте, для бесконечномерного локально выпуклого пространства. Поскольку в этом случае нет аналога меры Лебега, мы ограничимся конечными радоновскими мерами.

Лемма 4.1. Пусть X — локально выпуклое пространство; μ_n, μ — неотрицательные конечные радоновские меры; $\mu_n \rightarrow \mu$ по вариации. Пусть борелевские функции $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и f равномерно ограничены. Если $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо в смысле определения 1.1, то можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f слабо в $L^2(\mu)$.

Доказательство такое же, как в лемме 3.1, только вместо шара K берем все пространство X .

Теорема 4.1. Пусть меры μ_n, μ на локально выпуклом пространстве X неотрицательны и конечны; пусть $\mu_n \geq \mu$ и $\mu_n \rightarrow \mu$ слабо при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим квадратичные формы

$$\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu_n(dx),$$

для которых $D(\mathcal{E}_n)$ таковы, что C плотно в $D(\mathcal{E}_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$ и

$$\mathcal{E}(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu(dx),$$

где H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X . Предположим, что форма $\mathcal{E}$ замкнута. Тогда $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско.

Доказательство. Пусть $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо; $|f_n| \leq M, |f| \leq M$. Поскольку $\mu_n \geq \mu$, имеем вложения $L^2(\mu_n) \subset L^2(\mu)$ и $D(\mathcal{E}_n) \subset D(\mathcal{E})$. Кроме того, поскольку $\mu_n \geq \mu$, то из слабой сходимости $\mu_n \rightarrow \mu$ вытекает сходимость мер по вариации. По лемме 4.1 выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая слабо сходится к f в $L^2(\mu)$. Так как $\mathcal{E}$ замкнута, то $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_{n_k}) \geq \mathcal{E}(f)$. Далее,

$$\mathcal{E}_{n_k}(f_{n_k}) - \mathcal{E}(f_{n_k}) = \int |\nabla_H f_{n_k}|^2 d(\mu_{n_k} - \mu) \geq 0,$$

и мы получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{n_k}(f_{n_k}) \geq \mathcal{E}(f). \quad (5)$$

Поскольку из всякой подпоследовательности $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность со свойством (5), то это свойство выполнено и для всей последовательности функций $\{f_n\}$. Таким образом, условие (M1) доказано. Свойство (M2) следует из того, что $\mathcal{E}_n(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ для всякой функции $\varphi \in C$. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. Если выполнены условия теоремы 4.1 и формы $\mathcal{E}_n$ замкнуты, то

1) для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t}f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$;

2) диффузионные процессы, ассоциированные с $\mathcal{E}_n$, слабо сходятся к диффузионному процессу, ассоциированному с $\mathcal{E}$.

Теперь обобщим на бесконечномерный случай теорему 3.2.

Теорема 4.2. Пусть на локально выпуклом пространстве X задана радоновская вероятностная мера μ . Предположим, что гильбертово пространство

$$H(\mu) = \{h \in X: \exists \beta_h^\mu \in L^2(\mu)\} \quad \text{с нормой} \quad \|h\|_{H(\mu)} = \|\beta_h^\mu\|_{L^2(\mu)}$$

непрерывно вложено в X и плотно в нем; пусть $H \subset H(\mu)$ — гильбертово подпространство с той же нормой. Пусть неотрицательные радоновские меры μ_n дифференцируемы по Скороходу по всем векторам $h \in H$. Предположим, что $\mu_n \rightarrow \mu$ и $d_h \mu_n \rightarrow d_h \mu$ по вариации. Рассмотрим квадратичные формы

$$\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu_n(dx);$$

пусть $D(\mathcal{E}_n)$ таковы, что C плотно в $D(\mathcal{E}_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$. Пусть

$$\mathcal{E}(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \mu(dx), \quad D(\mathcal{E}) = W_H^{1,2}(\mu).$$

Тогда $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско.

Доказательство. Пусть $\{h_i\}_{i=1}^D$ ($D \leq \infty$) — ортонормированный базис подпространства H ; дополним его до ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$ пространства $H(\mu)$. Если $e \in H(\mu)$, то линейный функционал $\widehat{e}(h) = (e, h)_{H(\mu)}$, непрерывный на $H(\mu)$, однозначно продолжается до непрерывного функционала $\widehat{e} \in X^*$. Обозначим символом $\tilde{C}$ класс функций вида

$$f(x) = u(\widehat{e}_{\alpha_1}(x), \dots, \widehat{e}_{\alpha_m}(x)), \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Класс $\tilde{C}$ плотен в C по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Проверим (M1), рассуждая аналогично теореме 3.2. Пусть $L^2(\mu_n) \ni f_n \rightarrow f \in L^2(\mu)$ слабо. Можно считать, что $|f_n| \leq M$, $|f| \leq M$, $f_n \in C$ и что существует предел $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(h_n) < \infty$. Нам нужно доказать, что $L \geq \mathcal{E}(f)$.

Согласно лемме 4.1, существует подпоследовательность такая, что $f_n \rightarrow f$ слабо в $L^2(\mu)$, обозначим ее снова через $\{f_n\}$. Поскольку

$\beta_h^\mu \in L^2(\mu)$ при всех $h \in H$, мы имеем $D(\mathcal{E}) = W^{1,2}(\mu) = \widehat{W}^{1,2}(\mu)$. Для функций $\varphi \in \tilde{C}$ положим

$$\Delta_H \varphi = \sum_{i=1}^D \partial_{h_i}^2 \varphi \quad (6)$$

(число ненулевых слагаемых в такой сумме конечно). Для всякой функции $f \in L^2(\mu)$ верна формула

$$\sqrt{\mathcal{E}(f)} = \sup \left\{ - \int f \Delta_H g \, d\mu - \sum_{i=1}^D \int f \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu) : g \in \tilde{C}, \mathcal{E}(g) = 1 \right\}. \quad (7)$$

Она доказывается так же, как (4) в теореме 3.2.

Пусть $g \in \tilde{C}$, $\mathcal{E}(g) = 1$. Тогда $\mathcal{E}_n(g) \rightarrow 1$, следовательно,

$$\mathcal{E}_n(f_n, g) \leq \sqrt{\mathcal{E}_n(f_n) \mathcal{E}_n(g)} \leq \sqrt{L + \varepsilon}$$

при достаточно больших n . С другой стороны,

$$\mathcal{E}_n(f_n, g) = - \int f_n \Delta_H g \, \mu_n(dx) - \sum_{i=1}^D \int f_n \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu_n).$$

Здесь число ненулевых слагаемых во второй сумме также конечно. Поскольку $f_n \rightarrow f$ слабо и $\Delta_H g \rightarrow \Delta_H g$ сильно в смысле определения 1.1, мы получаем сходимость $\int f_n \Delta_H g \, \mu_n(dx) \rightarrow \int f \Delta_H g \, \mu(dx)$. Далее,

$$\begin{aligned} & \left| \int f_n \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu_n) - \int f \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu) \right| \\ & \leq \left| \int f_n \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu_n - d_{h_i} \mu) \right| + \left| \int (f_n - f) \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu) \right|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое не превосходит $M \sup |\nabla_H g| \|d_{h_i} \mu_n - d_{h_i} \mu\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Второе слагаемое стремится к нулю, поскольку $f_n \rightarrow f$ слабо в $L^2(\mu)$, а функция $\partial_{h_i} g$ ограничена, следовательно, $\partial_{h_i} g \beta_{h_i}^\mu \in L^2(\mu)$. Итак,

$$- \int f \Delta_H g \, d\mu - \sum_{i=1}^D \int f \partial_{h_i} g \, d(d_{h_i} \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_n, g) \leq \sqrt{L + \varepsilon}.$$

Таким образом, по формуле (7) мы получаем $\mathcal{E}(f) \leq L + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно было взять сколь угодно малым, получаем $\mathcal{E}(f) \leq L$, что завершает доказательство свойства (M1). Свойство (M2) вытекает из того, что $\mathcal{E}_n(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ для всякой функции $\varphi \in C$. Теорема 4.2 доказана.

Следствие 4.2. Если выполнены условия теоремы 4.2 и формы $\mathcal{E}_n$ замкнуты, то для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t} f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$. Кроме того, диффузионные процессы, ассоциированные с $\mathcal{E}_n$, слабо сходятся к диффузионному процессу, ассоциированному с $\mathcal{E}$.

Применим теорему 4.2 к случаю, когда меры μ и μ_n абсолютно непрерывны относительно некоторой гауссовской меры γ .

Теорема 4.3. Пусть на локально выпуклом пространстве X задана радоновская гауссовская мера γ такая, что ее пространство Камерона–Мартина $H(\gamma)$ (см. [14]) плотно и непрерывно вложено в X ; пусть $H \subset H(\gamma)$ — гильбертово подпространство с той же нормой.

Пусть ρ_0, ρ_n — неотрицательные функции из $L^1(\gamma)$, причем $\sqrt{\rho_0} \in W_{H(\gamma)}^{1,2}(\gamma)$, а функции ρ_n имеют обобщенные производные-меры $d_h \rho_n$ по всем векторам $h \in H$, т.е.

$$\int \partial_h \varphi \cdot \rho_n d\gamma = - \int \varphi d(d_h \rho_n) - \int \varphi \rho_n \beta_h^\gamma d\gamma \quad \forall \varphi \in C = \mathcal{FC}_0^\infty(X).$$

Предположим, что $\rho_n \rightarrow \rho_0$ в $L^{1+\varepsilon}(\gamma)$ и $d_h \rho_n \rightarrow \partial_h \rho_0 \gamma$ по вариации.

Рассмотрим квадратичные формы

$$\mathcal{E}_n(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \rho_n \gamma(dx),$$

где $D(\mathcal{E}_n)$ таковы, что C плотно в $D(\mathcal{E}_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$, и

$$\mathcal{E}(f) = \int |\nabla_H f(x)|^2 \rho_0 \gamma(dx), \quad D(\mathcal{E}) = W_H^{1,2}(\rho_0 \gamma).$$

Тогда $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}$ по Моско.

Доказательство. Мера $\mu = \rho_0 \gamma$ дифференцируема по Фомину вдоль всякого вектора $h \in H$, причем

$$d_h \mu = (\partial_h \rho_0 + \rho_0 \beta_h^\gamma) \gamma.$$

Известно, что квадратичная форма

$$\mathcal{E}(\varphi) \Big|_{\varphi \in \mathcal{FC}_0^\infty} = \int |\nabla_H \varphi|^2 \rho_0 d\gamma$$

замыкаема в $L^2(\rho_0 \gamma)$ (см. [9]) при условии $\sqrt{\rho_0} \in W^{1,2}(\gamma)$. Кроме того, соответствующие минимальный и максимальный соболевские классы совпадают (см. [15] и [16, следствие 5.4]). Меры $\mu_n = \rho_n \gamma$ сходятся по вариации к мере μ и дифференцируемы по Скороходу вдоль всех $h \in H$, причем

$$d_h \mu_n = d_h \rho_n + \rho_n \beta_h^\gamma \gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|d_h \mu_n - d_h \mu\| &\leq \|d_h \rho_n - \partial_h \rho_0 \gamma\| + \|(\rho_n - \rho_0) \beta_h^\gamma\|_{L^1(\gamma)} \leq \|d_h \rho_n - \partial_h \rho_0 \gamma\| \\ &\quad + \|(\rho_n - \rho_0)\|_{L^{1+\varepsilon}(\gamma)} \|\beta_h^\gamma\|_{L^{(1+\varepsilon)/\varepsilon}(\gamma)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $d_h \mu_n \rightarrow d_h \mu$ по вариации. Все условия теоремы 4.2 выполнены.

Следствие 4.3. Если выполнены условия теоремы 4.3 и формы $\mathcal{E}_n$ замкнуты, то для всякой последовательности функций $f_n \in L^2(\mu_n)$, сильно сходящейся к $f \in L^2(\mu)$, функции $T_{n,t}f_n$ сильно сходятся к $T_t f$ при каждом $t > 0$, а диффузионные процессы, ассоциированные с $\mathcal{E}_n$, слабо сходятся к диффузионному процессу, ассоциированному с $\mathcal{E}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mosco U. Composite media and asymptotic Dirichlet forms. — J. Funct. Anal., 1994, v. 123, № 2, p. 368–421.
2. Kolesnikov A. V. Convergence of Dirichlet forms with changing speed measures on $\mathbf{R}^d$. — Forum. Math., 2005, v. 17, № 2, p. 225–259.
3. Kolesnikov A. V. Mosco convergence of Dirichlet forms in infinite dimensions with changing reference measures. — J. Funct. Anal., 2006, v. 230, № 2, p. 382–418.
4. Röckner M., Zhang T. S. Uniqueness of generalized Schrödinger operators, II. — J. Funct. Anal., 1994, v. 119, № 2, p. 455–467.
5. Cattiaux P., Fradon M. Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness. — J. Funct. Anal., 1996, v. 138, № 1, p. 243–272.
6. Жиков В. В. О весовых соболевских пространствах. — Матем. сб., 1998, т. 189, № 8, с. 27–58.
7. Kuwae K., Shioya T. Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry. — Comm. Anal. Geom., 2003, v. 11, № 4, p. 599–673.
8. Богачев В. И. Основы теории меры, т. 1, 2. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, 584 с., 688 с.
9. Ma Z.-M., Röckner M. Introduction to the Theory of (Nonsymmetric) Dirichlet Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 209 p.
10. Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. — J. Math. Sci. (New York), 1997, v. 87, № 4, p. 3577–3731.
11. Camar-Eddine M., Seppecher P. Closure of the set of diffusion functionals with respect to the Mosco-convergence. — Math. Models Methods Appl. Sci., 2002, v. 12, № 8, p. 1153–1176.
12. Пугачев О. В. О замыкаемости классических форм Дирихле на плоскости. — Докл. АН, 2001, т. 380, № 3, с. 315–318.
13. Pugachev O. V. On closability of classical Dirichlet forms. — J. Funct. Anal., 2004, v. 207, № 2, p. 330–343.
14. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
15. Röckner M., Zhang T. S. Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications. — J. Funct. Anal., 1992, v. 105, № 1, p. 187–231.
16. Eberle A. Uniqueness and Nonuniqueness of Semigroups Generated by Singular Diffusion Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1999 (Lecture Notes in Math., v. 1718).

Поступила в редакцию
19.XI.2007