Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Власенко, Меры посещения для некоторых последовательностей случайных величин с убывающими нормировками, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 155–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:22:05

23. Baranov A. D. Isometric embeddings of the spaces K_Θ in the upper half-plane. — J. Math. Sci. (New York), 2001, v. 105, № 5, p. 2319–2329.

Поступила в редакцию
23.V.2002

© 2004 г.

ВЛАСЕНКО М. А.*

МЕРЫ ПОСЕЩЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С УБЫВАЮЩИМИ НОРМИРОВКАМИ¹⁾

Для последовательности одинаково распределенных случайных величин $\{x_n, n \geq 1\}$, удовлетворяющей определенному условию перемешивания, исследуются локальные меры посещения последовательностей $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с различными монотонно убывающими к 0 числовыми последовательностями $\{a_n, n \geq 1\}$. Получены достаточные условия того, что меры $\{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(x_k/a_k)^{-1}, n \geq 1\}$ являются локальными мерами посещения $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с вероятностью 1.

Ключевые слова и фразы: локальные меры посещения, перемешивание.

0. Введение. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Считающими мерами последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ называется последовательность мер $\nu_n = \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}, n \geq 1$.

Считающие меры содержат всю информацию о последовательности. Поэтому ее поведение на бесконечности может быть описано в терминах считающих мер. Однако они устроены так же сложно, как и сама последовательность. Естественно попытаться заменить считающие меры более простой последовательностью мер, которая по-прежнему характеризовала бы $\{x_n, n \geq 1\}$ на бесконечности. Следующие определения были введены в [1] и [3].

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность конечных на компактах мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ на борелевской σ -алгебре называется возрастающей, если $\lambda_{n+1}(\Delta) \geq \lambda_n(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ при всех n и $\lambda_n(\mathbf{R}) \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$.

Считающие меры последовательности действительных чисел являются примером возрастающей последовательности мер. Следующее определение обобщает понятие множества частичных пределов.

О п р е д е л е н и е 3. Для возрастающей последовательности мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ множество $\mathcal{M}_\lambda = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0: \lambda_n((x - \varepsilon; x + \varepsilon)) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$ называется ее предельным множеством, а элементы $\mathcal{M}_\lambda$ — точками роста последовательности $\{\lambda_n, n \geq 1\}$.

Предельным множеством считающих мер $\{\nu_n, n \geq 1\}$ последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ является множество ее частичных пределов. Пусть Δ — окрестность некоторого частичного предела. Тогда $\{x_n, n \geq 1\}$ посетит Δ бесконечно много раз; возрастающая последовательность чисел $\{\nu_n(\Delta), n \geq 1\}$ показывает динамику появления членов последовательности в Δ . Если нас не интересуют подробности этого процесса, то посещение множества Δ можно характеризовать произвольной последовательностью, эквивалентной $\nu_n(\Delta)$ при $n \rightarrow \infty$. Это и мотивирует следующее определение эквивалентности последовательностей мер.

О п р е д е л е н и е 4. Возрастающие последовательности мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ и $\{\mu_n, n \geq 1\}$ называются локально равносходящимися, если $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\mu \neq \emptyset$ и

* Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, 01601 Киев, Украина; e-mail: mariyka@imath.kiev.ua; url: <http://masha.org.ua>

для любых открытых множеств U_1 и U_2 таких, что пересечение U_1 с $\mathfrak{M}$ непусто и $\overline{U_1}$ компактно и содержится в U_2 , справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(U_2)}{\mu_n(U_1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_n(U_1)} \geq 1.$$

Обозначение: $\lambda_n \sim \mu_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 1. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ последовательность (см. [5]), $\{\nu_n, n \geq 1\}$ — ее считающие меры, λ — равномерное распределение на $[0, 1]$. Покажем, что $\nu_n \sim n\lambda$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, предельным множеством обеих последовательностей мер является отрезок $[0, 1]$. Если множества U_1 и U_2 такие, как в определении 4, то в силу компактности $\overline{U_1}$ существует открытое множество U с нулевой λ -мерой границы такое, что $\overline{U_1} \subset U \subset U_2$. Вследствие равномерной распределенности $\{x_n, n \geq 1\}$ на $[0, 1]$ меры ν_n/n слабо сходятся к λ , когда $n \rightarrow \infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U)/(n\lambda(U)) = 1$, и требования определения 4 для U_1 и U_2 выполнены.

Этот пример показывает, что асимптотику частоты посещения последовательностью окрестностей ее частичных пределов можно иногда охарактеризовать при помощи последовательности мер простого вида. В примере 1 окрестности всех частичных пределов посещаются одинаково часто.

Пример 2. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — последовательность из примера 1. Определим $\{y_n, n \geq 1\}$ таким образом:

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n \neq 2^l, l \in \mathbb{N}, \\ 2 - \frac{1}{n}, & n = 2^l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Множеством частичных пределов последовательности $\{y_n, n \geq 1\}$ является $[0, 1] \cup \{2\}$, причем для любой окрестности точки 2, не пересекающейся с $[0, 1]$, при больших n приблизительно $\log_2 n$ среди n первых членов последовательности посещает эту окрестность.

Определение 5. Произвольная возрастающая последовательность мер, локально равносходящаяся со считающими мерами последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$, называемая последовательностью локальных мер посещения $\{x_n, n \geq 1\}$.

Так, в примере 2 $\{\lambda_n = n\lambda + (\log_2 n)\delta_2, n \geq 1\}$ — локальные меры посещения $\{y_n, n \geq 1\}$.

Предложенное описание поведения числовых последовательностей оказывается очень выгодным в приложении к случайным последовательностям. Например, асимптотика посещения окрестностей частичных пределов, как и само множество частичных пределов, для произвольной последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин детерминированы: неслучайная последовательность мер $\{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}x_k^{-1}, n \geq 1\}$ есть ее локальные меры посещения с вероятностью 1 (см. [1], [2]). Здесь $\mathbf{P}$ обозначает вероятность, т.е. меру на вероятностном пространстве, где определены соответствующие случайные величины. Для зависимых случайных величин этот результат также верен в случае, когда последовательность стационарна и удовлетворяет определенным условиям перемешивания (теорема 2.2 в [3]). Аналогичные теоремы доказаны для схем линейных (см. [1]) и нелинейных (см. [2]) итераций.

В настоящей работе для последовательности случайных величин $\{x_n, n \geq 1\}$ исследуются локальные меры посещения $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с различными монотонно убывающими к 0 числовыми последовательностями $\{a_n, n \geq 1\}$. Эту задачу можно понимать как выявление характера сходимости к 0 подпоследовательностей исходной последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$.

1. Основные результаты. В п. 2 будет предложено достаточное условие для того, чтобы последовательность $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ имела локальные меры посещения $\{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(x_k/a_k)^{-1}, n \geq 1\}$ с вероятностью 1 (теорема 3). Применяя его, мы получим следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1, $\sup_{k \neq n} |\mathbf{E}x_k x_n| < 1$ и $\sup_n (\sum_{k=1}^n |\mathbf{E}x_k x_n|) < \infty$. Тогда для любого $a \in (0, 1)$ последовательность $\{n^a x_n, n \geq 1\}$ имеет локальные меры посещения $\{n^{1-a}((1-a)\sqrt{2\pi})^{-1}\lambda, n \geq 1\}$ с вероятностью 1, где λ — мера Лебега.

Рассмотрим пример использования этого результата.

Пример 3 (линейные итерации с нарастающим шумом). Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — независимые гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1, $\gamma \in (0, 1)$ и $a \in (0, 1)$. Последовательность $\{x_n, n \geq 1\}$, построенная по схеме $x_0 = 0$, $x_n = \gamma x_{n-1} + n^a \xi_n$ при $n \geq 1$, имеет с вероятностью 1 локальные меры посещения $\{n^{1-a} \sqrt{1-\gamma^2} ((1-a) \sqrt{2\pi})^{-1} \lambda, n \geq 1\}$.

Докажем это. Имеем $x_n = \sum_{k=1}^n \gamma^{n-k} k^a \xi_k$. Обозначим $a_n^2 = \mathbf{E} x_n^2 = \sum_{k=1}^n \gamma^{2(n-k)} k^{2a}$ и $y_n = x_n/a_n$ для всех n . Сначала покажем, что существует натуральное N такое, что $\{y_n, n \geq N\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Мы будем часто пользоваться следующей леммой из анализа. Пусть последовательности действительных чисел $\{z_n, n \geq 1\}$ и $\{v_n, n \geq 1\}$ таковы, что $\{v_n, n \geq 1\}$ строго монотонно возрастает к $+\infty$ и существует конечный или бесконечный $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z_{n-1})/(v_n - v_{n-1})$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n/v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z_{n-1})/(v_n - v_{n-1})$. Это утверждение носит название теоремы Штольца (см. [6]).

По теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{n^{2a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \gamma^{-2k} k^{2a}}{\gamma^{-2n} n^{2a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{-2n} n^{2a}}{\gamma^{-2n} n^{2a} - \gamma^{-2(n-1)} (n-1)^{2a}} = \frac{1}{1-\gamma^2}.$$

Зафиксируем произвольное $\beta \in (\gamma, 1)$. Тогда найдется натуральное N такое, что $a_n/a_{n+1} < \beta/\gamma$ при всех $n \geq N$. Значит, если $n > m \geq N$, то

$$\mathbf{E} y_m y_n = \frac{a_m}{a_n} \gamma^{n-m} = \left(\frac{a_m}{a_{m+1}} \gamma \right) \left(\frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} \gamma \right) \cdots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \gamma \right) < \beta^{n-m} \leq \beta,$$

и условие $\sup_{n \neq m} |\mathbf{E} y_m y_n| \leq \beta$ выполняется для $\{y_n, n \geq N\}$. Выполнение второго условия теоремы 1 следует из того, что по теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=N}^n |\mathbf{E} y_m y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=N}^n \gamma^{-m} a_m}{\gamma^{-n} a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{-n} a_n}{\gamma^{-n} a_n - \gamma^{-(n-1)} a_{n-1}} = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Из теоремы 1 следует, что последовательность $\{n^a(1-\gamma^2)^{-1/2} y_n, n \geq 1\}$ имеет локальные меры посещения $\{n^{1-a} \sqrt{1-\gamma^2} ((1-a) \sqrt{2\pi})^{-1} \lambda, n \geq 1\}$ с вероятностью 1. Обозначим

$$\alpha_n = \frac{n^a}{a_n \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \lambda_n = \frac{n^{1-a} \sqrt{1-\gamma^2}}{(1-a) \sqrt{2\pi}} \lambda$$

для всех n . Теперь покажем, что последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ и $\{\alpha_n x_n, n \geq 1\}$ имеют с вероятностью 1 одинаковые локальные меры посещения. Теорема 1 является следствием теоремы 3 из п. 2, при доказательстве которой будет построено множество полной вероятности Ω_0 такое, что при каждом $\omega \in \Omega_0$ для каждого множества Δ , являющегося конечным объединением полуоткрытых интервалов с концами в рациональных точках, верно $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_\Delta(\alpha_k x_k) / \lambda_n(\Delta) = 1$. Пусть $\omega \in \Omega_0$, и пусть U_1 и U_2 — открытые множества из определения 4. Поскольку $\bar{U}_1$ — компакт, то найдется конечное объединение полуоткрытых интервалов с концами в рациональных точках Δ_1 такое, что $U_1 \subset \Delta_1$ и $\bar{\Delta}_1 \subset U_2$. Обозначим $U(\Delta_1, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \Delta_1} (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Поскольку $\bar{\Delta}_1$ — компакт, то для некоторого $\varepsilon > 0$ $U(\Delta_1, \varepsilon) \subset U_2$. И пусть конечное объединение полуоткрытых интервалов с концами в рациональных точках Δ_2 таково, что $U(\Delta_1, \varepsilon) \subset \Delta_2 \subset U_2$. В силу ограниченности Δ_1 и того, что $U(\Delta_1, \varepsilon) \subset \Delta_2$ и $\alpha_n \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$, существует натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geq N$ из $\{\alpha_n x_n \in \Delta_1\}$ следует $\{x_n \in \Delta_2\}$ и из $\{x_n \in \Delta_1\}$ следует $\{\alpha_n x_n \in \Delta_2\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_2}(x_k)}{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_1}(\alpha_k x_k)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_2}(\alpha_k x_k)}{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_1}(x_k)} \geq 1.$$

(Знаменатель в первом соотношении не равен нулю начиная с некоторого n , поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_{\Delta_1}(\alpha_k x_k) / \lambda_n(\Delta_1) = 1$. Тогда в силу первого соотношения не равен нулю начиная с некоторого n и знаменатель во втором.) Получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_2}(x_k)}{\lambda_n(\Delta_1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(\Delta_2)}{\sum_{k=1}^n I_{\Delta_1}(x_k)} \geq 1.$$

и требования определения 4 для U_1 и U_2 выполнены. Последовательность мер $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ является локально равносходящейся со считающими мерами последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ при каждом $\omega \in \Omega_0$, т.е. с вероятностью 1.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: существует множество полной вероятности Ω_0 такое, что для каждого $\omega \in \Omega_0$ и каждой непрерывной финитной функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\frac{\sqrt{2\pi}(1-a)}{\sqrt{1-\gamma^2} n^{1-a}} \sum_{k=1}^n f(x_k) \rightarrow \int_{\mathbf{R}} f(x) dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, в примере указано такое множество Ω_0 , что при каждом $\omega \in \Omega_0$ для каждого множества Δ , являющегося конечным объединением полуоткрытых интервалов с концами в рациональных точках, верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}(1-a)}{\sqrt{1-\gamma^2} n^{1-a}} \sum_{k=1}^n I_{\Delta}(x_k) = \lambda(\Delta).$$

Поскольку класс всех таких множеств Δ является определяющим слабую сходимость на любом компактном интервале действительной оси (см. [7]), отсюда следует наше утверждение для непрерывной финитной функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Теорема 2. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — одинаково распределенные случайные величины, распределение которых μ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ в некоторой окрестности 0. Причем существует конечный ненулевой предел

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(0) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\lambda}(x).$$

Пусть также выполнено условие на коэффициент перемешивания

$$\bar{\rho} := \sup_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ S^* = \{1, \dots, n\} - S}} \rho(\sigma(x_k, k \in S), \sigma(x_m, m \in S^*)) < 1,$$

где $\sigma(x_k, k \in S)$ обозначает σ -алгебру, порожденную соответствующими случайными величинами, и для двух σ -алгебр A и B

$$\rho(A, B) = \sup_{f \in L_2(A), g \in L_2(B)} |\text{corr}(f, g)|.$$

Тогда для любого $a \in (0, 1)$ последовательность $\{n^a x_n, n \geq 1\}$ имеет локальные меры посещения

$$\left\{ \frac{d\mu}{d\lambda}(0) n^{1-a} (1-a)^{-1} \lambda, n \geq 1 \right\}$$

с вероятностью 1.

2. Доказательства. Предлагаемый метод доказательства того, что последовательность $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ имеет с вероятностью 1 локальные меры посещения $\{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(x_k/a_k)^{-1}, n \geq 1\}$, использует следующие предположения:

(а) случайные величины $\{x_n, n \geq 1\}$ одинаково распределены (обозначим $\mu = \mathbf{P}x_1^{-1}$);

(б) $\{x_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет следующему условию перемешивания для некоторых натуральных p, m и положительных $\{q_i, r_i, 1 \leq i \leq m\}$, каждое из которых меньше $2p$: для каждого положительного γ существуют константы $\{C_i(\gamma), 1 \leq i \leq m\}$ такие, что для любого вложенного в $[-\gamma, \gamma]$ интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$ и для любого натурального n

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n (I_{\Delta}(x_k) - \mu(\Delta)) \right)^{2p} \leq \sum_{i=1}^m C_i(\gamma) n^{q_i} \mu(\Delta)^{r_i};$$

(с) последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$ монотонно убывает к 0;

(д) существует монотонно возрастающая функция $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что $f(x+1)/f(x) \rightarrow 1$, когда $x \rightarrow \infty$, $[f(n+1)] > [f(n)]$ для любого n ($[x]$ обозначает целую

часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x) и при всех $1 \leq i \leq m$ для произвольного числа α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^{2p-q_i} \mu([\alpha a_{[f(n+1)]}, \alpha a_{[f(n)]}])^{2p-r_i}} < \infty$$

(для $\alpha < 0$ границы отрезков нужно поменять местами).

Лемма 1. Пусть выполнены условия (а)–(d) и $\alpha > 0$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \mu([0, \alpha a_k]) = \infty$, то с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n I_{[0, \alpha]} \left(\frac{x_k}{a_k} \right) \sim \sum_{k=1}^n \mu([0, \alpha a_k]).$$

(И аналогично — для $\alpha < 0$).

Доказательство. Пусть $\{\nu_n, n \geq 1\}$ и $\{\mu_n, n \geq 1\}$ — считающие меры последовательностей $\{x_n, n \geq 1\}$ и $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ соответственно. Обозначим интервал $[0, \alpha)$ как Δ и для каждого натурального n интервалы $[\alpha a_{n+1}, \alpha a_n]$ как Δ_n . Тогда

$$\mu_n(\Delta) \equiv \sum_{k=1}^n I_{\Delta} \left(\frac{x_k}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^n \nu_k(\Delta_k) + \nu_n \left(\bigcup_{k>n} \Delta_k \right).$$

Введем также обозначения $D_n = [\alpha a_{[f(n+1)]}, \alpha a_{[f(n)]}]$ для каждого натурального n (будем считать, что $[f(1)] = 1$) и

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(\Delta) &= \sum_{k=1}^n \nu_{[f(k)]}(D_k) + \nu_{[f(n)]} \left(\bigcup_{k>n} D_k \right), \\ \tilde{\tilde{\mu}}_n(\Delta) &= \sum_{k=1}^n \nu_{[f(k+1)]}(D_k) + \nu_{[f(n+1)]} \left(\bigcup_{k>n} D_k \right), \\ \langle n \rangle &= \max\{m \in \mathbb{N} \mid [f(m)] \leq n\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\langle n \rangle \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $\tilde{\mu}_{\langle n \rangle}(\Delta) \geq \mu_n(\Delta) \geq \tilde{\mu}_{(n)}(\Delta)$, и если мы покажем, что с вероятностью единицы $\tilde{\mu}_n(\Delta)/\mathbf{E}\tilde{\mu}_n(\Delta) \rightarrow 1$ и $\tilde{\tilde{\mu}}_n(\Delta)/\mathbf{E}\tilde{\tilde{\mu}}_n(\Delta) \rightarrow 1$, а также $\mathbf{E}\tilde{\mu}_n(\Delta)/\mathbf{E}\tilde{\tilde{\mu}}_n(\Delta) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$, то получим отсюда, что с вероятностью единицы $\mu_n(\Delta)/\mathbf{E}\mu_n(\Delta) \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$, что и требуется доказать.

Из условия (b) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \left(\frac{\nu_{[f(n)]}(D_n)}{[f(n)] \mu(D_n)} - 1 \right)^{2p} < \sum_{i=1}^m C_i(\alpha a_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[f(n)]^{2p-q_i} \mu(D_n)^{2p-r_i}},$$

где все ряды сходятся в силу условия (d). Тогда, применяя неравенство Чебышева и лемму Бореля–Кантелли, нетрудно установить, что с вероятностью 1 $\nu_{[f(n)]}(D_n)/([f(n)] \mu(D_n)) \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$. По теореме Штольца с вероятностью 1 $\sum_{k=1}^n \nu_{[f(k)]}(D_k) \sim \sum_{k=1}^n [f(k)] \mu(D_k)$ при $n \rightarrow \infty$. Из условия (d) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^{2p-q_i} \mu(\bigcup_{k>n} D_k)^{2p-r_i})^{-1} < \infty$ для $1 \leq i \leq m$, откуда точно так же получаем, что $\nu_{[f(n)]}(\bigcup_{k>n} D_k)/([f(n)] \mu(\bigcup_{k>n} D_k)) \rightarrow 1$ с вероятностью 1, когда $n \rightarrow \infty$. Тогда с вероятностью 1

$$\frac{\tilde{\mu}_n(\Delta)}{\mathbf{E}\tilde{\mu}_n(\Delta)} = \frac{\sum_{k=1}^n \nu_{[f(k)]}(D_k) + \nu_{[f(n)]}(\bigcup_{k>n} D_k)}{\sum_{k=1}^n [f(k)] \mu(D_k) + [f(n)] \mu(\bigcup_{k>n} D_k)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из условия (d) следует

(е) $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n+1)^{2p-q_i} \mu(D_n)^{2p-r_i})^{-1} < \infty$ для $1 \leq i \leq m$.

Доказательство того, что $\tilde{\mu}_n(\Delta)/\mathbf{E}\tilde{\mu}_n(\Delta) \rightarrow 1$ с вероятностью единицы, когда $n \rightarrow \infty$, проводится аналогично с помощью условий (b) и (е).

По теореме Штольца $\sum_{k=1}^n [f(k+1)] \mu(D_k) \sim \sum_{k=1}^n [f(k)] \mu(D_k)$, и тогда также $\mathbf{E}\tilde{\mu}_n(\Delta)/\mathbf{E}\tilde{\tilde{\mu}}_n(\Delta) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Далее рассмотрим случай, когда распределение μ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ в окрестности 0, причем существует конечный ненулевой

предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\lambda}(x)$. Это условие уже позволяет оценить скорость сходимости к 0 подпоследовательностей $\{x_n, n \geq 1\}$. Асимптотически они могут сходиться не быстрее любого сходящегося ряда. То есть для последовательностей $\{a_n, n \geq 1\}$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, последовательность $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ с вероятностью 1 не имеет предельных точек. Это следует из леммы Бореля–Кантелли, поскольку сейчас $P\{|x_n|/a_n < C\} \sim C \frac{d\mu}{d\lambda}(0) a_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Сделанное предположение позволяет обратить результат леммы 1 в утверждение о локальных мерах посещения (теорема 3). Но прежде отметим, что в этом случае условие (d) можно сформулировать проще:

(d') существует монотонно возрастающая функция $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что $f(x+1)/f(x) \rightarrow 1$, когда $x \rightarrow \infty$, $[f(n+1)] > [f(n)]$ для любого n и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^{2p-q_i} (a_{[f(n)]} - a_{[f(n+1)]})^{2p-r_i}} < \infty \quad \text{для всех } 1 \leq i \leq m.$$

Теорема 3. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — одинаково распределенные случайные величины, распределение μ которых абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ в окрестности 0, причем существует конечный ненулевой предел

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(0) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\lambda}(x),$$

и выполнено (b). Пусть также $\{a_n, n \geq 1\}$ — монотонно убывающая последовательность действительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, и выполнено (d').

Тогда с вероятностью 1 последовательность $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ имеет локальные меры посещения

$$\left\{ \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda, n \geq 1 \right\}.$$

Доказательство. Для $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^n \mu([0, \alpha a_k]) \sim \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda([0, \alpha]), \quad n \rightarrow \infty$$

(поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ и потому применима теорема Штольца). То же самое имеет место для $\alpha < 0$. Тогда мы можем применить лемму 1, и с вероятностью 1

$$\mu_n([0, \alpha]) \sim \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda([0, \alpha]), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\{\mu_n, n \geq 1\}$ — считающие меры последовательности $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$. Для произвольного интервала $[\alpha, \beta]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n([\alpha, \beta])}{\frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)} &= \frac{\mu_n([0, \beta])}{\frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)} - \frac{\mu_n([0, \alpha])}{\frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)} \\ &\rightarrow \lambda([0, \beta]) - \lambda([0, \alpha]) = \lambda([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Точно так же для произвольного множества Δ , являющегося объединением конечного числа полуоткрытых интервалов,

$$\mu_n(\Delta) \sim \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda(\Delta), \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее следуем доказательству теоремы 1 в [1]. Пусть E — множество всех конечных объединений полуоткрытых интервалов с концами в рациональных точках. Для каждого Δ из E положим

$$\Omega_{\Delta} = \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta) \left(\frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda(\Delta) \right)^{-1} = 1 \right\}.$$

По доказанному Ω_Δ — множества полной вероятности. Положим $\Omega_0 = \bigcap_{\Delta \in E} \Omega_\Delta$. Тогда, поскольку E — счетное множество, Ω_0 — множество полной вероятности. Мы покажем, что для всех ω из Ω_0

$$\mu_n \sim \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

в смысле определения 4.

Пусть $\omega \in \Omega_0$. Предельным множеством последовательности мер

$$\left\{ \frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda, n \geq 1 \right\}$$

является **R**. Для произвольных $x \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$ в E найдется содержащий x полуоткрытый интервал Δ такой, что $\Delta \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Тогда, по построению Ω_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta) = \infty$. То есть **R** является предельным множеством последовательности мер $\{\mu_n, n \geq 1\}$ при данном ω . Пусть U_1 и U_2 — открытые множества из определения 4. Поскольку $\bar{U}_1$ — компакт, то в E найдется множество Δ такое, что $\bar{U}_1 \subset \Delta \subset U_2$. По построению Ω_0 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta) \left(\frac{d\mu}{d\lambda}(0) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \lambda(\Delta) \right)^{-1} = 1$, и требования определения 4 для U_1 и U_2 выполнены. Теорема доказана.

В качестве примеров использования теоремы 3 докажем теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — последовательность из условия теоремы. Зафиксируем $\gamma > 0$, и пусть множество $\Delta \subset [-\gamma, \gamma]$. Для всех n положим $\eta_n = I_\Delta(x_n) - \sigma(\Delta)$, где $\sigma = P x_1^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{E} \eta_k \eta_n = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta \times \Delta} e^{(x^2+y^2)/2} h(x, y, \mathbf{E} x_k x_n) dx dy,$$

где

$$h(x, y, r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp \left(- \frac{r^2(x^2+y^2) - 2rxy}{2(1-r^2)} \right) - 1,$$

и справедлива оценка $\mathbf{E} \eta_k \eta_n \leq \max_{(x,y) \in [-\gamma, \gamma]^2} |h(x, y, \mathbf{E} x_k x_n)| \sigma(\Delta)^2$. Можно показать, что для $|r| < 1$ верно соотношение $\max_{(x,y) \in [-\gamma, \gamma]^2} |h(x, y, r)| = \max(|h(-\gamma, \gamma, r)|, |h(\gamma, \gamma, r)|) \sim \gamma^2 |r|$ при $r \rightarrow 0$. Тогда для любого $0 < r_0 < 1$ существует константа $A(\gamma, r_0)$ такая, что если $|r| \leq r_0$, то $\max_{(x,y) \in [-\gamma, \gamma]^2} |h(x, y, r)| \leq A(\gamma, r_0) |r|$. Получаем оценку $\mathbf{E} \eta_k \eta_n \leq A(\gamma, \sup_{l \neq m} |\mathbf{E} x_l x_m|) \sigma(\Delta)^2$ при $k \neq n$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \eta_k \right)^2 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \eta_k^2 + 2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{E} \eta_l \eta_k \leq n \sigma(\Delta) \\ &\quad + 2nA \left(\gamma, \sup_{l \neq m} |\mathbf{E} x_l x_m| \right) \sup_n \left(\sum_{k=1}^n |\mathbf{E} x_k x_n| \right) \sigma(\Delta)^2, \end{aligned}$$

откуда следует условие (b) с $p = 1, m = 1, q_1 = 1, r_1 = 1$.

Условие (d') для $a_n = n^{-a}$ при $0 < a < 1$ получается с функцией $f(x) = x^m$, где $m > 2/(1-a)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $\gamma > 0$, и пусть множество $\Delta \subset [-\gamma, \gamma]$. Определим также $\eta_n = I_\Delta(x_n) - \mu(\Delta)$ для всех n . Обозначим

$$\bar{\rho}_\eta := \sup_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ S^* = \{1, \dots, n\} - S}} \rho(\sigma(\eta_k, k \in S), \sigma(\eta_m, m \in S^*)).$$

Очевидно, $\bar{\rho}_\eta \leq \bar{\rho}$, так как σ -алгебры, порожденные элементами $\{\eta_n, n \geq 1\}$, беднее порожденных элементами $\{x_n, n \geq 1\}$. Поскольку $\bar{\rho}_\eta < 1$, то к последовательности $\{\eta_n, n \geq 1\}$ применима лемма 3 из [4], согласно которой существует константа $C(\bar{\rho}_\eta)$ такая, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \eta_k \right)^4 \leq C(\bar{\rho}_\eta) \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \eta_k^4 + \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \eta_k^2 \right)^2 \right) \leq C(\bar{\rho}) (n\mu(\Delta) + n^2\mu(\Delta)^2),$$

т.е. условие (b) выполнено с $p = 2$, $m = 2$, $q_1 = r_1 = 1$, $q_2 = r_2 = 2$.

Условие (d') для $a_n = n^{-a}$ при $0 < a < 1$ получается с функцией $f(x) = x^m$, где $m > 2/(1-a)$. Теорема доказана.

Приведем еще пример негауссовской последовательности, удовлетворяющей условию перемешивания (b).

П р и м е р 4. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, где λ — мера Лебега. Положим $x_n(\omega) = \{\omega + \sqrt{n}\}$ для каждого n , где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Мы покажем, что последовательность $\{x_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условию (b) с $p = 1$, $m = 1$, $q_1 = \frac{3}{2}$, $r_1 = 1$.

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ и для каждого n : $\eta_n = \mathbf{I}_\Delta(x_n) - \lambda(\Delta)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{I}_\Delta(x_n) \mathbf{I}_\Delta(x_k) &= \begin{cases} 0, & \lambda(\Delta) < |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|, \\ \lambda(\Delta) - |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|, & \lambda(\Delta) \geq |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|, \end{cases} \\ &= (\lambda(\Delta) - |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|)_+, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} \eta_n \eta_k = (\lambda(\Delta) - |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|)_+ - \lambda(\Delta)^2.$$

Согласно [5], последовательность $\{\{\sqrt{n}\}, n \geq 1\}$ является равномерно распределенной, причем

$$D_N := \sup_{I \in \mathcal{B}([0,1])} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_I(\{\sqrt{k}\}) - \lambda(I) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Пусть C — такая константа, что $D_N \leq C/\sqrt{N}$ при всех N . Для всякой непрерывной функции g , имеющей на $[0, 1]$ ограниченную вариацию $V(g)$, справедливо неравенство Коксмса (см. [5])

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(\{\sqrt{k}\}) - \int_0^1 g(x) dx \right| \leq V(g) D_N.$$

Рассмотрим $g(x) = (\lambda(\Delta) - |\{\sqrt{n}\} - x|)_+$. Тогда $\int_0^1 g(x) dx \leq \lambda(\Delta)^2$, $V(g) \leq 2\lambda(\Delta)$.

$$\int_0^1 g(x) dx \leq \lambda(\Delta)^2, \quad V(g) \leq 2\lambda(\Delta).$$

Из неравенства Коксмса с $N = n-1$ для такой функции g получим оценку $\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda(\Delta) - |\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{k}\}|)_+ \leq (n-1)(\lambda(\Delta)^2 + 2\lambda(\Delta)C/\sqrt{n-1})$.

Тогда $\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E} \eta_k \eta_n \leq 2\lambda(\Delta)C\sqrt{n-1}$ и существует такая константа D , что для всех n и Δ

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \eta_k \right)^2 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \eta_k^2 + 2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{E} \eta_l \eta_k \leq n(\lambda(\Delta) - \lambda(\Delta)^2) \\ &\quad + 2 \sum_{k=2}^n 2\lambda(\Delta) \sqrt{k-1} \leq D \lambda(\Delta) n^{3/2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 4 показывает, что условие перемешивания (b) для последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$ не влечет стремления к 0 корреляции членов последовательности при росте разности их номеров, как это было в примере 3.

3. О классах возможных нормировок $\{a_n, n \geq 1\}$. Пусть $\{x_n, n \geq 1\}$ — одинаково распределенные случайные величины, распределение μ которых абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ в некоторой окрестности 0, причем существует конечный ненулевой предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\lambda}(x)$. Рассмотренный нами метод нахождения локальных мер посещения последовательности $\{x_n/a_n, n \geq 1\}$ исходит из того, что для $\{x_n, n \geq 1\}$ выполняется определенное условие перемешивания (b), параметры которого и определяют класс монотонно убывающих к 0 последовательностей $\{a_n, n \geq 1\}$, к которым применимы наши рассуждения (условие (d')). Однако пока мы не выяснили, каким образом можно проверить принадлежность последовательности $\{a_n, n \geq 1\}$ этому классу. А также, в связи со сделанным в предыдущем

пункте замечанием о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, интересен ответ на вопрос: все ли последовательности $\{a_n, n \geq 1\}$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, принадлежат этому классу?

Чтобы избежать громоздких записей, будем считать, что класс последовательностей $\{a_n, n \geq 1\}$ определяется условием

(d'') существует монотонно возрастающая функция $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что $f(x+1)/f(x) \rightarrow 1$, когда $x \rightarrow \infty$, $[f(n+1)] > [f(n)]$ для любого n и $\sum_{n=1}^{\infty} \{f(n)^c (a_{[f(n)]} - a_{[f(n+1)]})^d < \infty\}^{-1}$.

(Числа c и d положительны.)

Лемма 2. Для того чтобы последовательность $\{a_n = n^{-a} \ln^{-b} n; n \geq 1\}$ с $a > 0$ удовлетворяла условию (d''), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a < \frac{c}{d}, \\ a = \frac{c}{d}, \quad b < -\frac{1}{d}. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим $g(x) = x^{-a} \ln^{-b} x$. Из условия (d'') следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^c g(f(n))^d)^{-1} < \infty$. Начиная с некоторого значения аргумента, функция $h(x) = (x^{c+1} g(x)^d)^{-1} = (\ln^{bd} x) / x^{1+c-da}$ монотонна. Если она монотонно возрастает, то монотонно возрастают члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^c g(f(n))^d)^{-1}$, что невозможно. Значит, $h(x)$ монотонно убывает. Из того, что $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^c g(f(n))^d)^{-1} < \infty$, и условия на f следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n+1) - f(n)) / (f(n)^{c+1} g(f(n))^d)$. Тогда $\int_1^{\infty} h(x) dx < \infty$, откуда следует, что или $1+c-da > 1$, или $1+c-da = 1, bd < -1$.

Достаточность. Мы покажем, что $\{a_n, n \geq 1\}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяет условию (d'') с $f(x) = e^{x^\alpha}$. Для этого сначала убедимся, что $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^c |g'(f(n))|^d f'(n)^d)^{-1} < \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Имеем

$$g'(x) = -\left(\frac{a}{x^{a+1} \ln^b x} + \frac{b}{x^{a+1} \ln^{b+1} x} \right) \sim -\frac{a}{x^{a+1} \ln^b x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{x^\alpha},$$

и тогда при $n \rightarrow \infty$

$$f^c(n) |g'(f(n))|^d f'(n)^d \sim e^{cn^\alpha} \frac{a^d}{e^{(a+1)dn^\alpha} n^{bd\alpha}} \alpha^d n^{d(\alpha-1)} e^{dn^\alpha} = (\alpha a)^d n^{d(\alpha-1-\alpha b)} e^{(c-ad)n^\alpha}.$$

Действительно, при условии (1) такое α найдется.

Очевидно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^c (g([f(n)]) - g([f(n+1)]))^d} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^c (g(f(n)) - g(f(n+1) - 1))^d},$$

а сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)^c (g(f(n)) - g(f(n+1)))^d)^{-1}$. Действительно, для достаточно больших n

$$\frac{g(f(n+1) - 1) - g(f(n+1))}{g(f(n)) - g(f(n+1))} < \frac{g'(f(n+1) - 1)}{g'(f(n)) f'(n+1)} < \frac{1}{f'(n+1)},$$

а $f'(x) \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow \infty$. В силу монотонности f, f' и g'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^c (g(f(n)) - g(f(n+1)))^d} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)^c |g'(f(n+1))|^d f'(n)^d}.$$

Поскольку, как и для функции f , для ее производной справедливо $f'(x+1)/f'(x) \rightarrow 1$, когда $x \rightarrow \infty$, то сходимость последнего ряда следует из доказанного выше. Лемма доказана.

Тогда критерием принадлежности $\{a_n = n^{-a} \ln^{-b} n; n \geq 1\}$ классу, для которого выполняется (d'), будет

$$\begin{cases} \begin{cases} a < \frac{2p - q_i}{2p - r_i}, \\ a = \frac{2p - q_i}{2p - r_i}, \end{cases} & b < -\frac{1}{2p - r_i}, \\ 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Так, в условии теоремы 1 можно было делить $\{x_n, n \geq 1\}$ на все последовательности вида $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$, где $a < 1$, и на последовательности вида $\{n^{-1} \ln^b n, n \geq 1\}$ с $b > 1$. Для теоремы 2 — на $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$ с $a < 1$ и на $\{n^{-1} \ln^b n, n \geq 1\}$ с $b > \frac{1}{2}$. В примере 4 условия будут таковы: $a < \frac{1}{2}$ для $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$ или $b > 1$ для $\{n^{-1/2} \ln^b n, n \geq 1\}$.

Автор выражает благодарность Андрею Анатолиевичу Дороговцеву за постановку задачи и полезные советы при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороговцев А. А. Некоторые характеристики последовательностей итераций со случайными возмущениями. — Укр. матем. журн., 1996, т. 48, № 8, с. 1047–1063.
2. Дороговцев А. А. Меры посещения и эргодическая теорема для последовательности итераций со случайными возмущениями. — Укр. матем. журн., 1999, т. 51, № 1, с. 123–127.
3. Dorogovtsev A. A., Denis'evskij N. A. Path-wise behavior of stationary sequences. — Theory Stochastic Process., 1996, v. 2 (18), № 3–4, p. 17–26.
4. Bryc W., Smoleński W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables. — Proc. Amer. Math. Soc., 1993, v. 119, № 2, p. 629–635.
5. Кейперс Л., Нидерпрейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1965, 408 с.
6. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Ч. 1. Киев: Лыбидь, 1993.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
9.II.2000

Исправленный вариант
30.VII.2001

© 2004 г.

ГРАНОВСКИЙ Б. Л.*, ЗЕЙФМАН А. И.**

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ СПЕКТРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДНЕГО ПОЛЯ¹⁾

Находится нижняя граница спектра инфинитезимальной матрицы для моделей среднего поля в случае, когда число взаимодействующих частиц стремится к бесконечности.

Проводится также сравнение асимптотического поведения нижней границы спектра и спектральной лакуны, при этом находится класс моделей среднего поля, для которого границы спектра принимают экстремальные значения. Результаты получены с помощью метода, предложенного в 80-х годах вторым автором.

* Department of Mathematics, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, 32000 Israel; e-mail: mar18aa@techunix.technion.ac.il

** Вологодский госпедуниверситет и Вологодский научно-координационный центр ЦЭМИ РАН, ул. Орлова, 6, Вологда, Россия; e-mail: zai@uni-vologda.ac.ru

¹⁾ Работа первого автора поддержана Фондом содействия исследованиям Техниона. Работа над статьей начата во время визита второго автора в Технион в апреле 1997 г. при финансовой поддержке математического факультета Техниона.