Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, Несколько асимптотических разложений в ЦПТ в многомерном случае, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 293–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:26:45

© 2008 г.

СЕНАТОВ В. В.*

НЕСКОЛЬКО АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЦПТ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ¹⁾

Получены асимптотические разложения в центральной предельной теореме в многомерном случае с явными оценками точности аппроксимации, которую они гарантируют. Рассматриваются нормированные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами четвертого и пятого порядка. При построении разложений используются многомерные аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, многомерные распределения, асимптотические разложения, многомерные аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита.

Цель данной работы — продемонстрировать несколько асимптотических разложений в ЦПТ в многомерных пространствах и дать явные оценки точности аппроксимации, которую гарантируют эти разложения.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, принимающие значения в действительном евклидовом d -мерном пространстве E^d . Пусть P — общее распределение этих случайных величин, P_n — распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, p_n — плотность P_n (если она существует), Φ — нормальный закон с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$ — плотность Φ . Здесь и далее $|x|$ означает как абсолютную величину числа x , так и норму вектора $x \in E^d$.

Предположим, что характеристическая функция

$$f(t) = \int e^{i(t,x)} P(dx), \quad t \in E^d,$$

распределения P такова, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int |f(t)|^\nu dt < \infty. \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: semenova@greatbook.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00583, 07-01-00362).

Здесь и далее (t, x) обозначает скалярное произведение векторов $t, x \in E^d$; если область интегрирования не указывается, то она совпадает со всем пространством E^d . Выполнение условия (1) гарантирует существование непрерывной и ограниченной плотности p_n для $n \geq \nu$, ее можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{-i(t,x)} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Нетрудно проверить, что выполнение условия (1) гарантирует выполнение (строгого) неравенства

$$\alpha(T) = \max\{|f(t)|: |t| \geq T\} < 1$$

для любого $T > 0$.

Асимптотические разложения, приведенные ниже, основаны на многомерных аналогах

$$H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

многочленов Чебышёва–Эрмита. Эти аналоги предложены в работе [1], они являются полилинейными функционалами, действие $H_l^{(2j)}(x)$ на $h_1, \dots, h_l \in E^d$ можно получать по формуле обращения

$$H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) \varphi(x) = \frac{i^{2j+l}}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} |t|^{2j} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_l) dt.$$

Для каждого $e \in E_d$, $|e| = 1$, обозначим

$$\alpha_k(e) = \int (x, e)^k P(dx) \quad (= \mathbf{E}(X_1, e)^k),$$

$$\beta_k(e) = \int |(x, e)^k| P(dx) \quad (= \mathbf{E}|(X_1, e)|^k),$$

$$|\alpha_k| = \sup_{|e|=1} |\alpha_k(e)|, \quad |\beta_k| = \sup_{|e|=1} |\beta_k(e)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|\theta_4| = \sup_{|e|=1} |\alpha_4(e) - 3|.$$

Всюду, где эти величины используются, предполагается, что они конечны. Отметим, что $\alpha_k(e)$ и $\beta_k(e)$ представляют собой k -й и k -й абсолютный моменты проекции распределения P на направление e ; записи $|\alpha_k|$ и $|\theta_4|$ являются единичными, мы нигде не будем использовать α_k и θ_4 без знака модуля. Отметим, что $|\alpha_k| = \beta_k$ для четных k .

Зафиксируем некоторое число $0 < \delta < 1$. С помощью известного приема симметризации нетрудно проверить, что если $\beta_4 < \infty$, то для всех $|t| \leq T$ справедливо неравенство $|f(t)| \leq \mu(t)$, где

$$\mu(t) = e^{-(1-\delta^2)|t|^2/2}, \quad T = \min\left(1, \delta\left(\frac{12}{\beta_4 + 3}\right)^{1/2}\right). \quad (2)$$

Положим

$$B_k = (2\pi)^{-d} \int |t|^k e^{-|t|^2/2} dt,$$

$$B_{k,n} = (2\pi)^{-d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt,$$

$$B_{k,n-1} = (2\pi)^{-d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt.$$

Для чисел B_k , $B_{k,n}$ и $B_{k,n-1}$ нетрудно получить явные выражения и оценки, но они нам не понадобятся. Очевидно, что при малых δ и больших n числа $B_{k,n}$ и $B_{k,n-1}$ близки к B_k .

Теорема 1. Пусть распределение P таково, что $\beta_4 < \infty$ и для некоторого $\nu > 0$ выполнено условие (1). Тогда для любого $n \geq \max(\nu, 2)$ и всех $x \in E^d$ справедливо равенство

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int ((x, u)^3 - 3(x, u)(u, u)) P(du) + R, \quad (3)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_6}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} dt. \quad (4)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в правой части (3) совпадает с многочленом $H_3^{(0)}(x)(u, u, u)$; в одномерном случае этот интеграл распадается в произведение многочлена Чебышёва–Эрмита 3-го порядка и момента Чебышёва–Эрмита 3-го порядка распределения P (см. [2]).

В оценке (4) остаточной части разложения (3) несколько слагаемых убывают при росте n как $1/n$. Некоторые из этих слагаемых можно «перевести» (с соответствующими изменениями) в главную часть разложения плотности p_n , улучшив при этом оценку остаточной части (во всяком случае при больших n).

В следующих утверждениях нам понадобится величина

$$H_6(x; P) = \int \int H_6^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v) P(du) P(dv),$$

где

$$H_6^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v) = (x, u)^3(x, v)^3 - 3(u, u)(u, x)(v, x)^3 - 9(u, x)^2(u, v)(x, v)^2 - 3(u, x)^3(x, v)(v, v) + 9(u, u)(u, v)(x, v)^2 + 9(u, x)^2(u, v)(v, v) + 9(u, x)(u, u)(v, v)(x, v) + 18(u, x)(u, v)^2(x, v) - 6(u, v)^3 - 9(u, u)(u, v)(v, v).$$

Отметим, что в одномерном случае $H_6(x; P)$ распадается в произведение многочлена Чебышёва–Эрмита 6-го порядка и квадрата момента Чебышёва–Эрмита 3-го порядка распределения P .

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для всех $x \in E^d$ справедливо равенство

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) + \frac{\varphi(x)}{72n} H_6(x; P) + R, \quad (5)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dt, \quad (6)$$

и если величина $n \geq \max(\nu, 3)$ такова, что

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{d-1}{n} + \frac{d(d+2)}{24n} < 1,$$

то

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) - \frac{\varphi(x)}{8n} (|x|^4 - 2(d+2)|x|^2 + d(d+2)) + \frac{\varphi(x)}{72n} H_6(x; P) + R, \quad (7)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{48} \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{B_{6,n-1}}{12n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{128(1-\rho)} \frac{B_8}{n^2} + \frac{|\alpha_3|}{48} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \beta^{n-1}(T) \int_{|t| \geq T} e^{-|t|^2/2} \left| 1 - \frac{|t|^4}{8} \right| dt \quad (8)$$

и

$$\beta(T) = \max \left\{ e^{-|t|^2/2} \left| 1 - \frac{|t|^4}{8} \right| : |t| \geq T \right\} < 1.$$

Отметим, что многочлен $|x|^4 - 2(d+2)|x|^2 + d(d+2) = H_0^{(4)}(x)$ одномерном случае совпадает с многочленом Чебышёва–Эрмита четвертого порядка.

Теорема 3. Пусть распределение P таково, что $\beta_5 < \infty$, $\beta_4 < 9$ и для некоторого $\nu > 0$ выполнено условие (1). Тогда для всех $n \geq \max(\nu, 3)$ таких, что

$$\rho = \frac{|\theta_4|}{6} + \frac{|\theta_4|(d-1)}{3n} + \frac{|\theta_4|d(d+2)}{72n} < 1,$$

при всех $x \in E^d$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) \\ & + \frac{\varphi(x)}{24n} \left\{ \int \left((x, u)^4 - 6(x, u)^2(u, u) + 3(u, u)^2 \right) P(du) \right. \\ & \quad \left. - 3(|x|^4 - 2(d+2)|x|^2 + d(d+2)) \right\} \\ & + \frac{\varphi(x)}{72n} H_6(x; P) + R, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \left(\frac{\beta_5}{5!} + \frac{|\alpha_3|}{12} \right) \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} \\ & + \frac{|\alpha_4| + 4}{48} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{2(1-\rho)} \left(\frac{|\theta_4|}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2} \\ & + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt \\ & + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \beta^{n-1}(T) \int_{|t| \geq T} e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{|\theta_4|}{4!} |t|^4 \right) dt \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\beta(T) = \max \left\{ e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{|\theta_4|}{4!} |t|^4 \right) : |t| \geq T \right\} < 1.$$

Отметим, что подынтегральное выражение во втором интеграле в правой части (9) совпадает с $H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u)$. В одномерном случае величина в фигурных скобках в правой части (9) распадается в произведение многочлена Чебышёва–Эрмита четвертого порядка и момента Чебышёва–Эрмита четвертого порядка распределения P . Величина

$$\frac{1}{4!} \left\{ \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) P(du) - 3H_0^{(4)}(x) \right\},$$

которая, с точностью до обозначений, присутствует в правой части (9), совпадает (см. [1]) с

$$\begin{aligned} & \int \frac{HH_4(x, u)}{4!} P(du) \\ & = \int \left(\frac{H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u)}{4!} - \frac{H_2^{(2)}(x)(u, u)}{2! 2^1 \cdot 1!} + \frac{H_0^{(4)}(x)}{0! 2^2 \cdot 2!} \right) P(du), \end{aligned}$$

так как интегрирование $H_2^{(2)}(x)(u, u) = (x, x)(x, u)^2 - (d+4)(x, u)^2 - (x, x)(u, u) + (d+2)(u, u)$ по мере $P(du)$ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором дает многочлен $H_0^{(4)}(x)$. Стоит отметить также, что

$$\int (x, u)^4 P(du) - \mathbf{E}(x, X_1)^4 = |x|^4 \alpha_4(e_x), \quad \int (u, u)^2 P(du) = \mathbf{E}|X_1|^4,$$

а

$$\int (x, u)^2 (u, u) P(du) = |x|^2 \mathbf{E}(e_x, X_1)^2 |X_1|^2,$$

где $e_x = x/|x|$, $x \in E^d$, и последнее математическое ожидание есть некий смешанный момент четвертого порядка случайной величины X_1 , т.е. второй интеграл в правой части (9) связан с различными моментами четвертого порядка распределения P . Аналогичные слова можно сказать обо всех интегралах, участвующих в главных частях приведенных асимптотических разложений: все эти интегралы суть функции $|x|$ и различных моментных характеристик распределения P . Таким образом, как и в одномерном случае, мы вычисляем функцию $p_n(x)$ (разумеется, лишь с некоторой точностью) по нескольким, довольно грубым, моментным характеристикам распределения P .

Для доказательства сформулированных выше утверждений нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Для произведения $e^{|t|^2/2} f(t)$, где f — характеристическая функция распределения P , при всех $t \in E^d$ в случае, когда конечна величина β_4 , справедливы представления

$$e^{|t|^2/2} f(t) = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\beta_4 + 3}{4!} |t|^4 + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|\alpha_3|}{12} |t|^5$$

и

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/2} f(t) = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} - \frac{|t|^4}{8} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\beta_4}{4!} |t|^4 \\ + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|\alpha_3|}{12} |t|^5 + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|t|^6}{12}, \end{aligned}$$

а в случае, когда $\beta_5 < \infty$, для этого произведения справедливо представление

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/2} f(t) = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} + \frac{i^4 (\alpha_4(e_t) - 3) |t|^4}{4!} \\ + \gamma e^{|t|^2/2} \left(\frac{\beta_5}{5!} + \frac{|\alpha_3|}{12} \right) |t|^5 + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|\alpha_4| + 4}{48} |t|^6. \end{aligned}$$

Здесь и далее $e_t = t/|t|$, а γ обозначают непрерывные комплекснозначные функции такие, что $|\gamma| \leq 1$.

Доказательство. Функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= \int e^{i(t,x)} P(dx) \\ &= \int \left(1 + i(t, x) + \frac{i^2}{2} (t, x)^2 + \frac{i^3}{3!} (t, x)^3 + \frac{\gamma}{4!} (t, x)^4 \right) P(dx) \\ &= 1 - \frac{(t, t)}{2} + \frac{i^3}{3!} \int (t, x)^3 P(dx) + \frac{1}{4!} \int \gamma(t, x)^4 P(dx) \\ &= 1 - \frac{(t, t)}{2} + \frac{i^3 |t|^3 \alpha_3(e_t)}{3!} + \frac{\gamma}{4!} |t|^4 \beta_4. \end{aligned}$$

Третье равенство в этой цепочке справедливо в силу того, что распределение P имеет нулевое среднее и единичный ковариационный оператор. Во избежание недоразумений отметим, что функции γ в левой и правой частях последнего равенства различны.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/2} f(t) &= e^{|t|^2/2} \left(1 - \frac{|t|^2}{2} + \frac{i^3 |t|^3 \alpha_3(e_t)}{3!} + \frac{\gamma}{4!} |t|^4 \beta_4 \right) \\ &= e^{|t|^2/2} \left(1 - \frac{|t|^2}{2} \right) + e^{|t|^2/2} \frac{i^3 |t|^3 \alpha_3(e_t)}{3!} + \frac{\gamma}{4!} e^{|t|^2/2} |t|^4 \beta_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Для любого $u > 0$

$$e^{-u} = 1 - e^{-\theta u} u,$$

где $0 < \theta < 1$. Умножая это равенство на e^u и заменяя u на $|t|^2/2$, мы видим, что второе слагаемое в правой части (11) равно

$$\frac{i^3 |t|^3 \alpha_3(e_t)}{3!} \left(1 + \gamma \frac{|t|^2}{2} e^{|t|^2/2} \right).$$

Для любого $u > 0$

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{e^{-\theta u} u^2}{2}, \quad (12)$$

где $0 < \theta < 1$. Умножая это равенство на e^u и заменяя u на $|t|^2/2$, мы видим, что первое слагаемое в правой части (11) равно

$$\left(1 - \frac{|t|^2}{2} \right) e^{|t|^2/2} = 1 + \frac{\gamma}{2} \frac{|t|^4}{4} e^{|t|^2/2}.$$

Теперь ясно, что

$$e^{|t|^2/2} f(t) = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\beta_4 + 3}{4!} |t|^4 + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|\alpha_3|}{12} |t|^5,$$

и первое утверждение леммы доказано.

Воспользовавшись равенством

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{3!} e^{-\theta u} u^3, \quad u > 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

вместо (12), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/2} f(t) &= 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} - \frac{|t|^4}{8} e^{|t|^2/2} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\beta_4}{4!} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\alpha_3(e_t)}{12} |t|^5 \\ &\quad + \frac{\gamma}{3!} e^{|t|^2/2} \left(\frac{|t|^2}{2} \right)^3 = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3!} - \frac{|t|^4}{8} + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{\beta_4}{4!} |t|^4 \\ &\quad + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|\alpha_3|}{12} |t|^5 + \gamma e^{|t|^2/2} \frac{|t|^6}{12}, \end{aligned}$$

и второе утверждение леммы доказано.

Доказательство третьего утверждения леммы проводится аналогично предыдущему, и мы его опускаем.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся зарядом (знакопеременной мерой) с характеристической функцией

$$g(t) = e^{-|t|^2/2} e^{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3/3!}.$$

Легко понять, что плотность q_n нормированной n -кратной свертки этого заряда можно вычислять по формуле обращения

$$q_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Поэтому при $n \geq \nu$

$$p_n(x) - q_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt + R, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} \left| f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} \left| g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| dt \\ & + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} dt, \quad (14) \end{aligned}$$

а $T > 0$ — та же величина, что в (2). Ясно, что при росте n величина $|R|$ убывает экспоненциально быстро.

Первое слагаемое в правой части (13) равно

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \\ & = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-|t|^2/(2n)} \\ & \quad \times \left(e^{|t|^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{|t|^2/(2n)} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt. \quad (15) \end{aligned}$$

В силу первого утверждения леммы при всех $t \in E^d$

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} + \gamma e^{|t|^2/(2n)} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{|t|^4}{n^2} \\ & \quad + \gamma e^{|t|^2/(2n)} \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{|t|^5}{n^{5/2}}, \end{aligned}$$

и очевидно, что

$$e^{|t|^2/(2n)} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} \right\} = 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{|t|^6}{n^3}.$$

Отсюда и из (2) следует, что правая часть (15) не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{n}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{|t|^4}{n^2} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{|t|^5}{n^{5/2}} \right) dt \\ & + \frac{n}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{|t|^6}{n^3} \right) dt \\ & = \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сумма правых частей (14) и (16) дает оценку величины $|p_n(x) - q_n(x)|$ для всех $x \in E^d$.

Очевидно, что функцию $q_n(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right) dt + R, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-|t|^2/2} \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{|t|^6}{n} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_6}{n}.$$

Ясно, что первое слагаемое в правой части (17) равно

$$\begin{aligned} & \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \frac{i^3}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \alpha_3(e_t) |t|^3 dt \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \frac{i^3}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left(\int (t, u)^3 P(du) \right) dt \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \int \left(\frac{i^3}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, u)^3 dt \right) P(du) \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) \varphi(x) P(du). \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Первое из утверждений этой теоремы сразу получается, если мы воспользуемся более точным, чем при доказательстве теоремы 1, асимптотическим разложением плотности $q_n(x)$:

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{i^6 \alpha_3^2(e_t) |t|^6}{(3! \sqrt{n})^2} \right) dt + R, \end{aligned}$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-|t|^2/2} \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{|t|^9}{n^{3/2}} dt = \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}}.$$

Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \frac{1}{2} \frac{i^6 \alpha_3^2(e_t) |t|^6}{(3! \sqrt{n})^2} dt \\ &= \frac{1}{72n} \frac{i^6}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left(\int (t,u)^3 P(du) \right) \left(\int (t,v)^3 P(dv) \right) dt. \end{aligned}$$

Применяя дважды теорему Фубини, мы видим, что правая часть этого равенства есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{72n} \iint \left(\frac{i^6}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t,u)^3 (t,v)^3 dt \right) P(du) P(dv) \\ &= \frac{1}{72n} \iint H_6^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v) \varphi(x) P(du) P(dv). \end{aligned}$$

Теперь равенство (5) и оценка (6) очевидны.

Для доказательства соотношений (7) и (8) рассмотрим заряд с характеристической функцией

$$g(t) = e^{-|t|^2/2} e^{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3/3!} \left(1 - \frac{|t|^4}{8} \right). \quad (18)$$

Действуя точно так же, как при доказательстве теоремы 1, нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} |p_n(x) - q_n(x)| &\leq \frac{n}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-|t|^2/(2n)} \\ &\quad \times \left| e^{|t|^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{|t|^2/(2n)} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ &\quad + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} \left| g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где q_n — плотность n -кратной нормированной свертки заряда с характеристической функцией (18). Очевидно, что последнее слагаемое в правой части (19) не превосходит

$$\frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \beta^{n-1}(T) \int_{|t| \geq T} e^{-|t|^2/2} \left| 1 - \frac{|t|^4}{8} \right| dt,$$

где $\beta(T) = \max\{e^{-|t|^2/2} |1 - |t|^4/8| : |t| \geq T\} < 1$, и ясно, что оно при росте n убывает экспоненциально быстро.

В силу второго утверждения леммы и очевидных равенств

$$\begin{aligned} e^{|t|^2/(2n)} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} \right\} - \frac{|t|^4}{8n^2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} \right\} \\ &= 1 + \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! n^{3/2}} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{|t|^6}{n^3} - \frac{|t|^4}{8n^2} + \frac{|t|^4}{8n^2} \gamma \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{|t|^3}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

выражение под знаком модуля в первом слагаемом в правой части (19) не превосходит

$$e^{|t|^2/(2n)} \frac{\beta_4}{4!} \frac{|t|^4}{n^2} + e^{|t|^2/(2n)} \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{|t|^5}{n^{5/2}} + e^{|t|^2/(2n)} \frac{|t|^6}{12n^3} + \frac{|\alpha_3|^2}{72} \frac{|t|^6}{n^3} + \frac{|\alpha_3|}{48} \frac{|t|^7}{n^{7/2}}.$$

Легко понять, что это слагаемое не превосходит

$$\frac{\beta_4}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{|\alpha_3|}{72} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{B_{6,n-1}}{12n^2} + \frac{|\alpha_3|^2}{72} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{|\alpha_3|}{48} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}}.$$

Получим теперь асимптотическое разложение плотности

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} \left(1 - \frac{|t|^4}{8n^2} \right)^n dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} \left(1 - \frac{|t|^4}{8n} \right) dt + R, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$|R| \leq \sum_{j=2}^n C_n^j \frac{B_{4j}}{8^j n^{2j}}. \quad (21)$$

Нетрудно проверить, что при любом $j \geq 1$ отношение $B_{4(j+1)}/B_{4j}$ равно

$$\int |t|^{4j+4} e^{-|t|^2/2} dt \left(\int |t|^{4j} e^{-|t|^2/2} dt \right)^{-1} = (4j+d+2)(4j+d),$$

поэтому в сумме

$$\sum_{j=2}^n C_n^j \left(\frac{A}{n^2} \right)^j B_{4j} = \sum_{j=2}^n b_j, \quad (22)$$

где A — произвольное положительное число, отношение b_{j+1}/b_j равно

$$\begin{aligned} &\frac{n-j}{j+1} \frac{A}{n^2} (4j+d+2)(4j+d) \\ &= \frac{A}{n^2} \frac{n-j}{j+1} (16j(j+1) + 8(d-1)j + d(d+2)) \\ &\leq A \left(16 \frac{(n-j)j}{n^2} + 8 \frac{d-1}{n} + \frac{d(d+2)}{3n} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

при $j \geq 2$. Поскольку максимум функции $(n-x)x$, $0 \leq x \leq n$, равен $n^2/4$, то правая часть неравенства (23) не больше $4A + 8A(d-1)/n + Ad(d+2)/(3n) = \rho$ и ясно, что если $\rho < 1$, то сумму (22) можно оценить суммой геометрической прогрессии со знаменателем ρ , поэтому она не превосходит

$$\frac{1}{1-\rho} C_n^2 \left(\frac{A}{n^2} \right)^2 B_8 \leq \frac{A^2}{2(1-\rho)} \frac{B_8}{n^2}.$$

Отсюда следует, что правая часть (21) не превосходит

$$\frac{1}{128(1-\rho)} \frac{B_8}{n^2}, \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{d-1}{n} + \frac{d(d+2)}{24n},$$

а эта величина по условию теоремы меньше единицы.

Рассмотрим, наконец, первое слагаемое в правой части (20). Ясно, что оно равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} dt \\ & - \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \frac{|t|^4}{8n} \right\} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Первое слагаемое, как мы уже видели, равно

$$\varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) + \frac{\varphi(x)}{72n} H_6(x; P) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}}.$$

Легко понять, что второе слагаемое в (24) равно

$$-\frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \frac{|t|^4}{8n} dt + R = -\frac{\varphi(x)}{8n} H_0^{(4)}(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{|\alpha_3|}{48} \frac{B_7}{n^{3/2}}.$$

Из полученных соотношений следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству предыдущих утверждений. Рассмотрим заряд с характеристической функцией

$$g(t) = e^{-|t|^2/2} e^{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3/3!} \left(1 + \frac{\theta_4(e_t) |t|^4}{4!} \right), \quad (25)$$

где $\theta_4(e_t) = \alpha_4(e_t) - 3$. Используя ту же технику, что применялась ранее, а также третье утверждение леммы, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} |p_n(x) - q_n(x)| & \leq \left(\frac{\beta_5}{5!} + \frac{|\alpha_3|}{12} \right) \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_4| + 4}{48} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} \\ & + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt \\ & + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \beta^{n-1}(T) \int_{|t| \geq T} e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{|\theta_4|}{4!} |t|^4 \right) dt, \end{aligned}$$

где q_n — плотность n -кратной нормированной свертки заряда с характеристической функцией (25) и

$$\beta(T) = \max \left\{ e^{-|t|^2/2} \left(1 + \frac{|\theta_4|}{4!} |t|^4 \right) : |t| \geq T \right\} < 1.$$

Последнее неравенство заведомо выполнено, если $\beta_4 < 9$.

Асимптотическое разложение плотности q_n получается точно так же, как при доказательстве второй части теоремы 2, т.е.

$$q_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \exp \left\{ \frac{i^3 \alpha_3(e_t) |t|^3}{3! \sqrt{n}} \right\} \times \left(1 + \frac{\theta_4(e_t) |t|^4}{4! n} \right) dt + R, \quad (26)$$

где

$$|R| \leq \sum_{j=2}^j \left(\frac{|\theta_4|}{4! n^2} \right)^j B_{4j}, \quad (27)$$

и нетрудно понять, что при

$$\rho = \frac{|\theta_4|}{6} + \frac{|\theta_4|(d-1)}{3n} + \frac{|\theta_4|d(d+2)}{72n} < 1$$

правая часть (27) не превосходит

$$\frac{1}{2(1-\rho)} \left(\frac{|\theta_4|}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2}.$$

Отметим, что при $\beta_4 < 9$ справедливо неравенство $|\theta_4| < 6$.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что первое слагаемое в правой части (26) есть

$$\varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) + \frac{\varphi(x)}{72n} H_6(x; P) + \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \frac{\alpha_4(e_t)}{4!} \frac{|t|^4}{n} dt - \frac{\varphi(x)}{8n} H_0^{(4)}(x) + R, \quad (28)$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{3!} \left(\frac{|\alpha_3|}{3!} \right)^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_7}{n^{3/2}},$$

а второй интеграл в (28) равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left(\frac{1}{4! n} \int (t, u)^4 P(du) \right) dt \\ &= \frac{1}{4! n} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, u)^4 dt \right) P(du) \\ &= \frac{1}{4! n} \int H_4(x)(u, u, u, u) \varphi(x) P(du). \end{aligned}$$

Действуя аналогично тому, как мы действовали при переходе от теоремы 1 к теореме 2, можно получить разложения, остаточные члены которых оцениваются лучше, чем в теореме 3, во всяком случае при больших n . При этом в главных частях разложений появятся величины, связанные с многочленами Чебышёва–Эрмита девятого и седьмого порядков. В случае, когда конечна величина β_6 , можно получить

разложение, главная часть которого содержит величины, связанные с многочленами Чебышёва–Эрмита пятого, седьмого и девятого порядков. Эти величины при росте n убывают как $1/n^{3/2}$, а остаточная часть — как $1/n^2$. Эти разложения оказываются очень громоздкими, что связано, главным образом, с тем, что громоздкими являются величины, связанные с многочленом Чебышёва–Эрмита девятого порядка. Быть может, стоит отметить, что многочлен $H_9^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_9)$ является суммой 2620 (!) различных слагаемых, многочлен $H_6^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_6)$ есть сумма 76, а $H_4^{(0)}(x)(h_1, h_2, h_3, h_4)$ — сумма 10 слагаемых. Явный вид многочлена $H_4^{(0)}(x)(h_1, h_2, h_3, h_4)$ приведен в [1]. Количество слагаемых в многочлене $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ совпадает с суммой абсолютных величин коэффициентов в одномерном многочлене Чебышёва–Эрмита l -го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Об одном многомерном аналоге разложения Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 52, в. 3, с. 603–610.
2. Сенатов В. В. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценками остаточных членов. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 51, в. 4, с. 810–816.

Поступила в редакцию
3.X.2007