Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Вероятности больших отклонений для сумм независимых случайных векторов на границе и вне крамеровской зоны. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 336–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:14:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2008 г.

БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ
НА ГРАНИЦЕ И ВНЕ КРАМЕРОВСКОЙ ЗОНЫ. I¹⁾

Настоящая работа, состоящая из двух частей, является продолжением работ [1]–[5] и посвящена изучению асимптотики вероятности попадания сумм независимых случайных векторов в малый куб с вершиной в точке x в области больших уклонений. В работах [1], [2] изучалась в основном задача о «регулярных уклонениях» (задача [A] в терминологии [1], [2]), когда относительные (нормированные) уклонения x/n (n — число слагаемых в сумме) находятся в области аналитичности функции уклонений слагаемого (так называемая крамеровская зона уклонений) и при этом $|x|/n \rightarrow \infty$ (сверхбольшие уклонения). В настоящей работе исследуется альтернативная задача о «нерегулярных уклонениях», когда x/n либо приближается к границе крамеровской зоны уклонений, либо удаляется от этой зоны (задача [B] в терминологии работ [1], [2]). В этом случае задачи о больших уклонениях во многом оставались не изученными.

В части I настоящей работы для уклонений, расположенных вблизи границы крамеровской области, искомую асимптотику удастся найти при весьма широких условиях в общем многомерном случае. Кроме того, в одномерном случае рассмотрены также уклонения, удаленные от крамеровской зоны. В этом случае требуются дополнительные условия правильного изменения распределений слагаемых на бесконечности.

Ключевые слова и фразы: функция уклонений, большие уклонения, нерегулярные большие уклонения, крамеровская зона уклонений, сверхбольшие уклонения, интегро-локальная теорема.

1. Введение. Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые d -мерные случайные векторы, имеющие общее распределение $\mathbf{F}$. Скалярное произведение и норму в d -мерном пространстве $\mathbf{R}^d$ обозначим соответственно $\langle \alpha, \beta \rangle$ и $|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}$. Подмножество векторов в $\mathbf{R}^d$ с целочисленными координатами обозначим $\mathbf{Z}^d$. Везде в настоящей работе будем предполагать выполненным условие невырожденности:

Для любого единичного вектора $e \in \mathbf{R}^d$ случайная величина $\langle e, \xi \rangle$ невырождена (ее распределение не сосредоточено в одной точке).

Преобразование Лапласа над распределением $\mathbf{F}$ и характеристическую функцию случайного вектора ξ обозначим соответственно $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \xi \rangle}$, $\lambda \in \mathbf{R}^d$; $f(t) = \varphi(it) =$

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ № 05-01-00810, 07-01-00595, 08-01-00962, НШ-8980.2006.1, РНШ.2.1.1.1379.

$\mathbf{E}e^{i(t, \xi)}$, $t \in \mathbf{R}^d$. Множество конечности функции $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ обозначим $\mathcal{A} = \{\lambda : A(\lambda) < \infty\}$. Везде в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что выполнено условие Крамера [C].

[C]. Множество $\mathcal{A}$ телесно, т.е. содержит в себе непустое открытое множество.

Функция уклонений, отвечающая случайному вектору ξ , определяется как преобразование Лежандра над функцией $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ (см. [19]):

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda) \}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d. \quad (1.1)$$

При выполнении условия [C] функция уклонений играет определяющую роль при описании вероятностей больших уклонений (в соответствующих областях) сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$, о чем свидетельствует теорема 1.1 в [1] (см. также [6], [9], [10], [11]).

Будем использовать следующие условия о структуре распределения $\mathbf{F}$ невырожденного случайного вектора ξ (более подробно об этих условиях см. § 1 в [1]).

[Z]. (Условие арифметичности.) $f(2\pi t) = 1$ для любого $t \in \mathbf{Z}^d$ и $|f(2\pi t)| < 1$ для любого $t \notin \mathbf{Z}^d$.

[R]. (Условие нерешетчатости.) $|f(t)| < 1$ для любого $t \in \mathbf{R}^d$, $t \neq 0$.

Обозначим $\Delta[x] = \{y = (y_1, \dots, y_d) : x_i \leq y_i < x_i + \Delta, 1 \leq i \leq d\}$ куб в пространстве $\mathbf{R}^d$ с вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$ и со стороной $\Delta > 0$. Интегро-локальными теоремами для сумм $S(n)$ мы называем (см. [1], [7], [10], [11]) утверждения об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ вероятности

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}, \quad (1.2)$$

где вектор $x = x(n)$ и положительное число $\Delta = \Delta(n)$ зависят, вообще говоря, от n . Пусть существует $a = \mathbf{E}\xi$. Поскольку $\mathbf{E}S(n) = an$, то количество $s = |x - an|$ при условии $\{S(n) \in \Delta[x]\}$, $\Delta < \text{const}$, характеризует уклонение суммы $S(n)$ от «наиболее вероятного» значения an . Если $s = O(\sqrt{n})$, то в случае конечного второго момента $\mathbf{E}|\xi|^2$ такие уклонения называют *нормальными уклонениями*; если $s \gg \sqrt{n}$, $s = o(n)$, то такие уклонения часто называют *умеренно большими уклонениями* сумм $S(n)$. Если $s = |x - an| = O(n)$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} (|x - an|/n) > 0$, то такие уклонения образуют «обычные» большие уклонения (или просто *большие уклонения*).

Если $s/n = n^{-1}|x - an| \rightarrow \infty$, то уклонения $|x - an|$ мы будем называть «сверх-большими уклонениями» сумм случайных векторов. Настоящая статья посвящена, главным образом, изучению больших и сверхбольших уклонений сумм $S(n)$ в случае, когда $\alpha = x/n$ лежит вблизи границы или вне крамеровской области уклонений, т.е. области аналитичности функции уклонений $\Lambda(\alpha)$.

Зная асимптотику (1.2) в интегро-локальной теореме, мы можем оценить соответствующие вероятности в интегральной теореме (более подробно об этом см. в [1]).

Следующие определения и свойства функций $A(\lambda)$, $\Lambda(\alpha)$ можно найти в [9]. Для краткости *градиент* и *матрицу вторых производных* функции $g = g(\lambda) : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^1$ условимся обозначать соответственно

$$g'(\lambda) := \text{grad } g(\lambda) \in \mathbf{R}^d, \quad g''(\lambda) = (g'(\lambda))' := \left(\frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right)_{i,j=1}^d. \quad (1.3)$$

В частности, $A'(\lambda) := \text{grad } A(\lambda) = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$, $A''(\lambda) = \varphi''(\lambda)/\varphi(\lambda) - (\varphi'(\lambda))^T \varphi'(\lambda)/\varphi^2(\lambda)$, где $(\cdot)^T$ — операция транспонирования матрицы (вектора).

Рассмотрим множество $\mathcal{A}' = \{\alpha = A'(\lambda) \in \mathbf{R}^d : \lambda \in \mathcal{A}\}$. Если выполнено условие [C], то это множество имеет непустую внутренность ($\mathcal{A}'$). Множество ($\mathcal{A}'$) и является по определению *крамеровской областью* или *областью аналитичности функции уклонений* $\Lambda(\alpha)$. Обозначим $\lambda(\alpha)$ вектор в $\mathcal{A}$, в котором достигается супремум в правой части соотношения (1.1), так что $\Lambda(\alpha) = \langle \lambda(\alpha), \alpha \rangle - A(\lambda(\alpha))$. Если $\Lambda(\alpha) < \infty$, то такой вектор существует (см. [9]). Для $\alpha \in (\mathcal{A}')$ вектор $\lambda(\alpha)$ лежит в открытом множестве ($\mathcal{A}$) и при этом

$$\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha). \quad (1.4)$$

Матрица вторых производных $\Lambda''(\alpha)$ положительно определена в области $(\mathcal{A}')$. Обратная к ней матрица совпадает с матрицей $A''(\lambda(\alpha))$:

$$\sigma^2(\alpha) := (\Lambda''(\alpha))^{-1} = A''(\lambda(\alpha)). \quad (1.5)$$

При этом матрица $\sigma^2(\alpha)$ является ковариационной матрицей для случайного вектора $\xi^{(\alpha)} := \xi_{\lambda(\alpha)}$, где распределение вектора ξ_{λ} определяется как преобразование Крамера в точке $\lambda \in \mathcal{A}$ над распределением $\mathbf{F}$ вектора ξ : $\mathbf{F}_{\lambda}(dy) := \mathbf{P}\{\xi_{\lambda} \in dy\} = e^{(\lambda, y)} \mathbf{P}\{\xi \in dy\} / \varphi(\lambda)$. Таким образом, распределение $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ вектора $\xi^{(\alpha)}$ имеет вид

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(dy) := \mathbf{F}_{\lambda(\alpha)}(dy) = \mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} \in dy\} = \frac{e^{(\lambda(\alpha), y)} \mathbf{P}\{\xi \in dy\}}{\varphi(\lambda(\alpha))}, \quad \alpha \in (\mathcal{A}'),$$

а соответствующее ему преобразование Лапласа — $\mathbf{E}e^{(\lambda, \xi^{(\alpha)})} = \varphi(\lambda(\alpha) + \lambda) / \varphi(\lambda(\alpha))$, $\alpha \in (\mathcal{A}')$. Важно отметить, что $\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \alpha$ (см. [9]). Определитель матрицы $\sigma(\alpha)$ обозначим $|\sigma(\alpha)| = \sqrt{|\sigma^2(\alpha)|}$, $\alpha \in (\mathcal{A}')$. Значение $|\sigma(\alpha)|$ равно объему преобразованного куба $\Delta[0]\sigma(\alpha) = \{x \in \mathbf{R}^d: x = y\sigma(\alpha), y \in \Delta[0]\}$ при $\Delta = 1$.

Основное утверждение работы [1] можно представить следующим образом:

Пусть выполнено условие Крамера [С] и вектор $x = x(n) \in \mathbf{R}^d$ зависит от n таким образом, что отношение $\alpha = x/n$ остается в области $(\mathcal{A}')$ аналитичности функции уклонений $\Lambda(\alpha)$. Тогда при некоторых дополнительных условиях справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + o(1)), \quad (1.6)$$

где $\Delta = \Delta_n$ сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$, и допустимый диапазон скоростей сходимости $\Delta_n \rightarrow 0$ определяют упомянутые выше дополнительные условия.

Из утверждения (1.6) видно, что в случае $\alpha = x/n \in (\mathcal{A}')$ интегро-локальная теорема для всех названных выше типов уклонений (нормальных, умеренно больших, больших и сверхбольших) имеет один и тот же вид (в этом состоит одно из достоинств интегро-локальных теорем).

Если $(\mathcal{A}')$ не совпадает с $\mathbf{R}^d$ и α находится вблизи границы $\partial\mathcal{A}'$ множества $\mathcal{A}'$ или вне этого множества, то единой формы для асимптотики $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$ при всех α не существует, а в ряде случаев для изучения этой асимптотики приходится вводить дополнительные условия на распределение $\mathbf{F}$. Мы начнем со случая, когда таких дополнительных условий не требуется. Через λ_+ и α_+ мы будем обозначать точки границ $\partial\mathcal{A}$ и $\partial\mathcal{A}'$ соответственно.

2. Многомерный случай. Большие уклонения вблизи границы крамеровской области в случае, когда вектор $A'(\lambda_+)$ и матрица $A''(\lambda_+)$ существуют. Пусть $\alpha_+ = A'(\lambda_+) \in \partial\mathcal{A}'$, где λ_+ — точка из $\partial\mathcal{A}$, соответствующая α_+ (ср. с леммой 6.1 в ч. II настоящей работы). В условиях этого пункта существует ковариационная матрица $\sigma^2(\alpha_+)$ случайного вектора $\xi^{(\alpha_+)} = \xi_{\lambda_+}$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть существует матрица $A''(\lambda_+)$. Тогда в нерешетчатом случае [R] при $y := x - n\alpha_+$, $|y| = o(n)$ и $0 < \Delta = \Delta_n \rightarrow 0$ достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, справедливо

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha_+)|} e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \langle \lambda_+, y \rangle} [e^{-y\Lambda''(\alpha_+) y^T / (2n)} + o(1)].$$

В арифметическом случае [Z] для целых x и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha_+)|} e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \langle \lambda_+, y \rangle} [e^{-y\Lambda''(\alpha_+) y^T / (2n)} + o(1)].$$

Остаточные члены $o(1)$ в этих соотношениях равномерны по y , $|y| = o(n)$.

Доказательство. В одномерном случае $d = 1$ теорема 2.1 доказана в [5]. В многомерном случае доказательство по существу остается тем же, но основано в случае [R] на использовании многомерной интегро-локальной теоремы Стоуна (см. [6], а также [16]), а в случае [Z] — теоремы Гнеденко (см. §§ 49, 50 монографии [14], а также [15], теорему 4.2.1 в [17] и теорему 8.4.1 в [18]). Теорема доказана.

Ясно, что из теоремы 2.1 легко получить интегро-локальные теоремы для вероятности попадания $S(n)$ в куб $\Delta[x]$ при $|x - \alpha_+ n| = O(\sqrt{n})$ и *любом фиксированном* $\Delta > 0$ (см. вывод следствия 6.1.1 из теоремы 6.1.4 в [5]).

Дальнейшее изложение связано с рассмотрением нормированных уклонений $\alpha = x/n$, удаленных от множества $\mathcal{A}'$, и распадается на ряд подразделов, в каждом из которых будут вводиться свои дополнительные условия на распределение $\mathbf{F}$. В пп. 3–5 будет рассматриваться *одномерный случай*. Искомая асимптотика будет изучаться для двух классов наиболее распространенных распределений. Во второй части работы изучается многомерный случай, но лишь для одного класса распределений.

3. Одномерный случай. Классы распределений $\mathcal{ER}$ и $\mathcal{ESe}$. В одномерном случае мы немного отойдем от принятых соглашений относительно обозначений λ_+ , α_+ и левые границы множеств $\partial\mathcal{A}$ и $\partial\mathcal{A}'$ будем обозначать соответственно λ_- , α_- , так что $(\mathcal{A}) = (\lambda_-, \lambda_+)$, где $\lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$, $\lambda_- = \inf\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$, и $(\mathcal{A}') = (\alpha_-, \alpha_+)$, где $\alpha_- := \inf_{\lambda_- < \lambda} [\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)] = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} [\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)]$, $\alpha_+ := \sup_{\lambda < \lambda_+} [\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)] = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} [\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)]$. Случай, когда $A'(\lambda_+) = \infty$ ($\alpha_+ = \infty$), рассматривался в [1]–[5] и многих предшествующих работах.

Если $A'(\lambda_+) < \infty$ ($\alpha_+ < \infty$), то упомянутые выше нужные нам условия мы сформируем как условия принадлежности $\mathbf{F}$ одному из двух классов распределений $\mathcal{ER}$ и $\mathcal{ESe}$. Мы будем ассоциировать названные классы с известными классами правильно меняющихся и семиэкспоненциальных распределений (см. [3], [5], [2]).

Обозначим $\mathcal{R}$ класс всех правильно меняющихся функций (п.м.ф.), т.е. функций вида

$$l(t) = t^\beta L(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \rightarrow \infty$.

Через $\mathcal{Se}$ обозначим класс *семиэкспоненциальных функций*, т.е. функций $V(t)$, представимых в виде

$$V(t) = e^{-l(t)}, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

где $l(t) \in \mathcal{R}$ или $-l(t) \in \mathcal{R}$, $\beta = \beta(l) \in [0, 1]$, $l(t) = o(t)$ и, кроме того, выполнено следующее условие регулярности: при $t \rightarrow \infty$, $v = o(t)$

$$l(t+v) - l(t) = v \frac{\beta(l)}{t} (1 + o(1)) + o(1). \quad (3.3)$$

Известно (см., например, [8], [5]), что достаточным для выполнения (3.3) является следующее условие:

[D₁]. Функция $L(t)$ в случае [R] для всех $t \geq t_0$ при некотором $t_0 > 0$ дифференцируема и $L'(t) = o(L(t)/t)$ при $t \rightarrow \infty$. В случае [Z] при целых $t \rightarrow \infty$ $L(t+1) - L(t) = o(L(t)/t)$.

Теми же символами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Se}$ мы будем обозначать классы правильно меняющихся и семиэкспоненциальных распределений, т.е. распределений, для которых соответственно $V(t) \in \mathcal{R}$ и $V(t) \in \mathcal{Se}$, где $V(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\}$. Здесь с необходимостью $\beta = \beta(l) \leq 0$ для $V(t) \in \mathcal{R}$ и $l(t) > 0$ для $V(t) \in \mathcal{Se}$.

Если ξ является случайной величиной с арифметическим распределением, то условимся, что аргумент t в (3.1), (3.2) принимает лишь целочисленные значения.

Правильно меняющиеся и семиэкспоненциальные распределения мы называем *регулярными*. Следуя [2], [5], введем теперь в рассмотрение классы экспоненциально убывающих распределений, ассоциированные с классами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Se}$.

1. Класс $\mathcal{ER}$ распределений, для которых $V(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda_+ t} l(t)$, $t \geq 0$, где $\lambda_+ \in (0, \infty)$, $l \in \mathcal{R}$, $\beta = \beta(l) < 0$.

2. Класс $\mathcal{ESe}$ распределений, для которых $V(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda_+ t - l(t)}$, $t \geq 0$, где $\lambda_+ \in (0, \infty)$, функция $l \in \mathcal{R}$ удовлетворяет (3.3), $\beta = \beta(l) \in [0, 1]$, $l(t) = o(t)$, но, в отличие от (3.2), функция $l(t)$ может быть и отрицательной п.м.ф.

Заметим, что в классе $\mathcal{ER}$ условие $\lambda_+ < \infty$, $\alpha_+ < \infty$, в рамках которого мы находимся, будет выполняться, если $\int_1^\infty tl(t) dt < \infty$ (иначе будет $\alpha_+ = \infty$). Ясно, что названный интеграл сходится, если $\beta < -2$, и расходится, если $\beta > -2$. Аналогично, для класса $\mathcal{ESe}$ при $\beta > 0$ мы должны рассматривать лишь положительные функции $l(t)$, поскольку для отрицательных функций $l(t)$ выполняется $\alpha_+ = \infty$.

Распределения из классов $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$ мы называем *регулярными экспоненциально убывающими* распределениями.

4. Предельные теоремы в одномерном случае для класса $\mathcal{ER}$. В этом пункте везде предполагается, что $\beta = \beta(l) < -2$, что влечет за собой конечность α_+ . Случай $\beta \in (-3, -2)$ изучен в [5] (теоремы 6.2.1–6.2.4).

Если $\beta < -3$, то $\varphi''(\lambda_+) < \infty$, будет конечной дисперсия $b^2 := D\xi_{\lambda_+} = \varphi''(\lambda_+)/\varphi(\lambda_+) - (\varphi'(\lambda_+)/\varphi(\lambda_+))^2$ и теорему 2.1 (об области уклонений, близких к границе $\partial\mathcal{A}'$) и теоремы 6.1.4 и 6.2.2 в [5] (об области уклонений, удаленных от $\mathcal{A}'$) можно дополнить следующим утверждением, которое восполняет пробел между утверждениями названного теорем (в области «умеренных» уклонений $x - n\alpha_+$). Через $I_B(t)$ обозначим индикатор множества $B \subseteq \mathbb{R}$.

Теорема 4.1. Пусть $F \in \mathcal{ER}$ при $\beta < -3$. Тогда для любого фиксированного $C < \infty$ в области $y := x - n\alpha_+ \geq -C\sqrt{n}$ верны следующие утверждения.

I. В нерешетчатом случае [R] для любых $\Delta = \Delta_n > 0$, стремящихся к 0 достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$P\{S(n) \in \Delta[x]\} \sim \Delta e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2 n)} + n \frac{\lambda_+}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{\mathbb{R}_+}(y - \sqrt{n}) \right]. \quad (4.1)$$

II. В арифметическом случае [Z] для $x \in \mathbb{Z}$ справедливо соотношение

$$P\{S(n) = x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2 n)} + n \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{\mathbb{R}_+}(y - \sqrt{n}) \right].$$

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда в нерешетчатом случае [R] при любых $\Delta \geq \Delta_n > 0$, где Δ_n стремится к 0 достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, справедливо

$$P\{S(n) \in \Delta[x]\} \sim (1 - e^{-\lambda_+ \Delta}) \lambda_+ e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{\lambda_+ b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2 n)} + n \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{\mathbb{R}_+}(y - \sqrt{n}) \right].$$

В частности, при $\Delta = \infty$ получаем

$$P\{S(n) \geq x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{\lambda_+ b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2 n)} + n \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{\mathbb{R}_+}(y - \sqrt{n}) \right].$$

В арифметическом случае [Z] для целых x имеем

$$P\{S(n) \geq x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{(1 - e^{-\lambda_+}) b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2 n)} + n \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{\mathbb{R}_+}(y - \sqrt{n}) \right].$$

Следствие 4.1 почти очевидным образом вытекает из теоремы 4.1 (см. вывод следствия 6.1.1 из теоремы 6.1.4 и следствия 6.2.2 из теоремы 6.2.2 в [5]).

З а м е ч а н и е 4.1. Из теоремы 4.1 и следствия 4.1 видно, что в условиях этих утверждений асимптотика $P\{S(n) \in \Delta[x]\}$ может быть получена из асимптотики $P\{S(n) \geq x\}$, т.е. интегро-локальная теорема может быть получена из интегральной.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.1. Рассмотрим преобразование Крамера в точке λ_+ над распределением F : $F_{\lambda_+}(dv) := P\{\xi_{\lambda_+} \in dv\} = e^{\lambda_+ v} P\{\xi \in dv\}/\varphi(\lambda_+)$. Соответствующее ему преобразование Лапласа имеет вид $E e^{\lambda \xi_{\lambda_+}} = \varphi(\lambda_+ + \lambda)/\varphi(\lambda_+)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Рассматривая такое же преобразование над распределением $S(n)$, получим

$$P\{S(n) \in dv\} = \varphi^n(\lambda_+) e^{-\lambda_+ v} P\{S_{\lambda_+}(n) \in dv\}, \quad (4.2)$$

где, как нетрудно убедиться, $S_{\lambda_+}(n) \stackrel{d}{=} \xi_{\lambda_+}(1) + \dots + \xi_{\lambda_+}(n)$, т.е. $S_{\lambda_+}(n)$ можно рассматривать как сумму независимых копий случайной величины ξ_{λ_+} . Первые два сомножителя в правой части (4.2) можно записать в виде $e^{-n(\lambda_+ \alpha_+ - \ln \varphi(\lambda_+)) - \lambda_+(v - n\alpha_+)} = e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+(v - n\alpha_+)}$; поэтому

$$\mathbf{P}\{S(n) \in dv\} = e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+(v - n\alpha_+)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in dv\}. \quad (4.3)$$

В случае [R] рассмотрим произвольную последовательность $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, обозначив $\Delta_n[x] = [x, x + \Delta_n)$ и интегрируя (4.3) по $v \in \Delta_n[x]$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta_n[x]\} &= e^{-n\Lambda(\alpha_+)} \int_{\Delta_n[x]} e^{-\lambda_+(v - n\alpha_+)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in dv\} \\ &\sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+(x - n\alpha_+)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in \Delta_n[x]\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В арифметическом случае [Z] при целых x соотношение (4.4) принимает вид:

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+(x - n\alpha_+)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) = x\}. \quad (4.5)$$

Для вычисления правых частей в (4.4), (4.5) нам понадобятся интегро-локальные теоремы для сумм $S_{\lambda_+}(n) = \xi_{\lambda_+}(1) + \dots + \xi_{\lambda_+}(n)$. В нерешетчатом случае [R] хвост $V_+(t) := \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\}$ имеет вид

$$V_+(t) = \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda_+ \xi}; \xi \geq t)}{\varphi(\lambda_+)} = \frac{-\int_t^\infty e^{\lambda_+ u} d(e^{-\lambda_+ u} l(u))}{\varphi(\lambda_+)} = \frac{l(t)}{\varphi(\lambda_+)} + \frac{\lambda_+ \int_t^\infty l(u) du}{\varphi(\lambda_+)}.$$

В силу теоремы 1 в [13] (с. 322), при $\beta < -1$ и $t \rightarrow \infty$

$$\int_t^\infty l(u) du \sim \frac{1}{|\beta + 1|} t^{\beta+1} L(t).$$

Таким образом, в нерешетчатом случае функция $V_+(t)$ имеет вид

$$V_+(t) = t^\gamma L_+(t), \quad (4.6)$$

где $\gamma := \beta + 1 < -2$, $L_+(t) \sim \lambda_+ / (\varphi(\lambda_+) |\gamma|) L(t)$ — м.м.ф.

В арифметическом случае [Z] для целых t справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} = t\} &= \frac{e^{\lambda_+ t} \mathbf{P}\{\xi = t\}}{\varphi(\lambda_+)} = \frac{e^{\lambda_+ t} [\mathbf{P}\{\xi \geq t\} - \mathbf{P}\{\xi \geq t+1\}]}{\varphi(\lambda_+)} \\ &= \frac{l(t) - e^{-\lambda_+} l(t+1)}{\varphi(\lambda_+)} \sim \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} l(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Поэтому в этом случае справедливо

$$V_+(t) := \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\} = \sum_{k \geq t} \frac{l(k) - e^{-\lambda_+} l(k+1)}{\varphi(\lambda_+)} = t^\gamma L_+(t), \quad (4.8)$$

где $\gamma := \beta + 1 < -2$, $L_+(t) \sim (1 - e^{-\lambda_+}) / (\varphi(\lambda_+) |\gamma|) L(t)$ — м.м.ф.

В силу (4.6), (4.8) в рассматриваемом случае $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta < -3$, распределение ξ_{λ_+} лежит в классе $\mathcal{R}$ с показателем $\gamma = \beta + 1 < -2$. При этом левый хвост распределения случайной величины ξ_{λ_+} убывает экспоненциально быстро. Поэтому $b^2 = \mathbf{D}\xi_{\lambda_+} < \infty$.

Кроме того, из представления (4.6) вытекает, что в нерешетчатом случае для любого фиксированного $\Delta > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \in \Delta[t]\} = \frac{\lambda_+}{\varphi(\lambda_+)} \Delta l(t) (1 + o(1)). \quad (4.9)$$

Для арифметического распределения $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ аналогом (4.9) является соотношение (см. (4.7)) $\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} = t\} = [(1 - e^{-\lambda_+}) / \varphi(\lambda_+)] l(t) (1 + o(1))$ для $t \rightarrow \infty$, $t \in \mathbf{Z}$.

При выполнении этих условий справедлива интегро-локальная теорема, действующая «на всей полуоси» (см. теоремы 2.1, 2.2 в [12]), из которой вытекает следующая интегро-локальная теорема для сумм $S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+$.

Лемма 4.1. Пусть $F \in \mathcal{ES}$ при $\beta < -3$. Тогда в нерешетчатом случае [R] для любых фиксированных $\Delta > 0$ и $C < \infty$ в области $y := x - n\alpha_+ \geq -C\sqrt{n}$ справедливо соотношение

$$P\{S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+ \in \Delta[y]\} \sim \Delta \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/(2b^2n)} + n \frac{\lambda_+}{\varphi(\lambda_+)} l(y) I_{R_+}(y - \sqrt{n}) \right]. \quad (4.10)$$

В арифметическом случае [Z] соотношение (4.10) сохраняется при целых x , $\Delta = 1$ и при замене в правой части (4.10) множителя λ_+ на $(1 - e^{-\lambda_+})$.

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. В случае [Z] требуемое утверждение непосредственно вытекает из (4.5) и леммы 4.1. В случае [R] заметим, что поскольку лемма 4.1 верна для любого фиксированного $\Delta > 0$, то она будет верна и для последовательности $\Delta = \Delta_n$, сходящейся к 0 при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно. Применяя это утверждение к (4.4), получим (4.1). Теорема 4.1 доказана.

5. Предельные теоремы для класса $\mathcal{ES}$ в одномерном случае. Для $F \in \mathcal{ES}$ правый хвост $V(t)$ распределения F имеет вид $V(t) = e^{-\lambda_+ t - l(t)}$, где $l(t) = t^\beta L(t)$, $L(t)$ — м.м.ф. при $t \rightarrow \infty$ и для функции $l(t)$ выполнено соотношение (3.3). Везде ниже мы будем предполагать, что $\beta \in (0, 1)$.

Для того, чтобы сформулировать интегро-локальную теорему, нам понадобятся ряд обозначений. Для центрированной случайной величины $\xi_{\lambda_+} - \alpha_+$ все моменты конечны. Поэтому мы можем построить «отрезок ряда Крамера» с любым числом κ привлекаемых для этого моментов. Положим, например, $\kappa := 2[(1 - \beta)^{-1}] + 2$. Для такого κ построим отрезок ряда Крамера $\Lambda_{(\kappa)}(\alpha) := \sum_{j=2}^{\kappa} (\alpha^j v_j / j!)$, где $v_2 = 1/\gamma_2$, $v_3 = -\gamma_3/\gamma_2^3$, $v_4 = -(\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2)/\gamma_2^5$ и т.д., γ_k — семиинвариант порядка k случайной величины $\xi_{\lambda_+} - \alpha_+$ (алгоритм вычисления коэффициентов v_i в терминах γ_k приведен, например, в [8]). Введем в рассмотрение п.м.ф. $l_+(t) = t^\beta L_+(t)$, $L_+(t) = L(t) + \ln(\varphi(\lambda_+) \beta l(t)/t) - \ln c$, где $c := \lambda_+$ в случае [R] и $c := 1 - e^{-\lambda_+}$ в случае [Z]. Обозначим далее $\sigma_1(t) := \inf\{u: l_+(u)/u^2 \leq 1/t\}$. Функция $\sigma_1(t)$ определяет так называемую «крамеровскую зону» уклонений суммы $S_{\lambda_+}(n)$ и допускает представление $\sigma_1(t) = t^{1/(2-\beta)} L_1(t)$, где $L_1(t)$ — м.м.ф. при $t \rightarrow \infty$ (см. [8]). Далее, обозначим $M(y, n) := \inf_{0 \leq t \leq y/(2-\beta)} \{l_+(\alpha_+ + y - t) + n \Lambda_{(\kappa)}(t/n)\}$. Справедливо следующее утверждение, дополняющее теорему 2.1.

Теорема 5.1. Пусть $F \in \mathcal{ES}$ при $\beta \in (0, 1)$. Тогда для любого фиксированного $C < \infty$ в области $y := x - n\alpha_+ = s\sigma_1(n) \geq -C\sqrt{n}$ верны следующие утверждения.

I. В нерешетчатом случае [R] для любых $\Delta = \Delta_n > 0$, стремящихся к 0 достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$P\{S(n) \in \Delta[x]\} \sim \Delta e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(y/n)} + n I_{R_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta l_+(y)}{y} e^{-M(y, n)} \right],$$

в котором $m(s)$ — положительная непрерывная на $[0, \infty)$ функция, стремящаяся к 1 при $s \rightarrow \infty$ (точное определение этой функции см. в [8]).

II. В арифметическом случае [Z] для $x \in \mathbb{Z}$ и $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$P\{S(n) = x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(y/n)} + n I_{R_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta l_+(y)}{y} e^{-M(y, n)} \right],$$

в котором функция $m(s)$ имеет прежний смысл.

Следствие 5.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда в нерешетчатом случае [R] при любых $\Delta \geq \Delta_n > 0$, где Δ_n стремится к 0 достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, в области $y := x - n\alpha_+ = s\sigma_1(n) \geq -C\sqrt{n}$ справедливо

$$P\{S(n) \in \Delta[x]\} \sim (1 - e^{-\lambda_+ \Delta}) \times e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \left[\frac{1}{\lambda_+ b\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(y/n)} + n I_{R_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta l_+(y)}{\lambda_+ y} e^{-M(y, n)} \right].$$

В частности, при $\Delta = \infty$ получаем

$$\mathbf{P}\{S(n) \geq x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \times \left[\frac{1}{\lambda_+ b \sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_\kappa(y/n)} + n\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta_{l_+}(y)}{\lambda_+ y} e^{-M(y, n)} \right].$$

В арифметическом случае $[\mathbf{Z}]$ для целых $x \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\mathbf{P}\{S(n) \geq x\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \lambda_+ y} \times \left[\frac{1}{(1 - e^{-\lambda_+}) b \sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_\kappa(y/n)} + n\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta_{l_+}(y)}{(1 - e^{-\lambda_+}) y} e^{-M(y, n)} \right].$$

Следствие 5.1 очевидным образом вытекает из теоремы 5.1 (см. пояснения по поводу вывода следствия 4.1 из теоремы 4.1).

Доказательство теоремы 5.1. Правый хвост распределения случайной величины ξ_{λ_+} в случае $[\mathbf{R}]$ имеет вид $V_+(t) = \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\} = -[\int_t^\infty e^{\lambda_+ y} d(e^{-\lambda_+ y - l(y)})]/\varphi(\lambda_+)$. Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$V_+(t) = \frac{e^{-l(t)} + \lambda_+ \int_t^\infty e^{-l(y)} dy}{\varphi(\lambda_+)}. \quad (5.1)$$

Обозначим $V^I(t) := \int_t^\infty e^{-l(u)} du$. Известно, что для любого $\delta > 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см., например, [5]) $V^I((1 + \delta)t) = o(e^{-l(t)})$. Следовательно, можно выбрать $\delta = \delta_t > 0$, $\delta_t = o(1)$ таким образом, что по-прежнему

$$V^I((1 + \delta_t)t) = o(e^{-l(t)}). \quad (5.2)$$

Заметим далее, что если δ_t стремится к 0 достаточно медленно, то, кроме того, в силу (3.3)

$$\int_t^{(1+\delta_t)t} e^{-l(u)} du \sim \frac{t}{\beta l(t)} e^{-l(t)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Из (5.1)–(5.3) следует, что $V_+(t) \sim \lambda_+ t e^{-l(t)}/\varphi(\lambda_+) \beta l(t) = e^{-l_+(t)}$ при $t \rightarrow \infty$. При этом из (5.1) вытекает, что $\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \in \Delta[t]\} \sim \Delta \lambda_+ e^{-l(t)}/\varphi(\lambda_+)$ при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $\Delta > 0$.

Обратимся теперь к случаю $[\mathbf{Z}]$. В этом случае для $t \in \mathbf{Z}$, $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} = t\} = \frac{e^{\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} \mathbf{P}\{\xi = t\} = \frac{e^{-l(t)} - e^{-\lambda_+ - l(t+1)}}{\varphi(\lambda_+)}.$$

Используя соотношение (3.3), получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} = t\} \sim \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} e^{-l(t)}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\} \sim \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} \sum_{k=t}^\infty e^{-l(k)}. \quad (5.4)$$

Нетрудно показать, далее, что $\sum_{k=t}^\infty e^{-l(k)} \sim t e^{-l(t)}/\beta l(t)$. Поэтому в случае $[\mathbf{Z}]$ наряду с (5.4) для $t \in \mathbf{Z}$, $t \rightarrow \infty$ получаем $V_+(t) := \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\} \sim (1 - e^{-\lambda_+}) t e^{-l(t)}/[\varphi(\lambda_+) \beta l(t)] =: e^{-l_+(t)}$.

Установленные свойства функции $V_+(t)$ позволяют воспользоваться интегрально-локальными теоремами, действующими «на всей полуоси» для сумм семизкспоненциальных слагаемых (см. теоремы 2.3, 2.4 в [8]), из которых вытекает следующая лемма.

Лемма 5.1. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ESe}$ при $\beta \in (0, 1)$. Тогда в нерешетчатом случае $[\mathbf{R}]$ при любых $C < \infty$, $\Delta > 0$ в области $y := x - n\alpha_+ = s\sigma_1(n) \geq -C\sqrt{n}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+ \in \Delta[y]\} \sim \Delta \left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_\kappa(y/n)} + n\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(y - \sqrt{n}) m(s) \frac{\beta_{l_+}(y)}{y} e^{-M(y, n)} \right], \quad (5.5)$$

в котором $m(s)$ — положительная непрерывная на $[0, \infty)$ функция, сходящаяся к 1 при $s \rightarrow \infty$ (точное определение этой функции см. в [8]).

В арифметическом случае $[Z]$ соотношение (5.5) сохранится при целых $x \in Z$ и $\Delta = 1$.

Дальнейшее доказательство теоремы 5.1 с помощью леммы 5.1 по существу не отличается от доказательства теоремы 4.1 с помощью леммы 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, № 2, с. 260–294.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, № 4, с. 641–673.
3. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно меняющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
4. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. II. Регулярные экспоненциально убывающие распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 209–230.
5. Боровков А. А., Боровков К. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука (в печати).
6. Stone C. On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1965/66). V. II, Part 2. Berkeley: Univ. of California Press, 1966, p. 217–224.
7. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий. — Матем. заметки, 2006, т. 79, № 4, с. 468–482.
8. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семизэкспоненциальными распределениями. — Сиб. матем. журн., 2006, т. 47, № 6, с. 1218–1257.
9. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 223 с.
10. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, № 1, с. 3–17.
11. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, № 1, с. 5–29.
12. Могульский А. А. Интегро-локальная теорема, действующая на всей полуоси, для сумм случайных величин с правильно меняющимися распределениями. — Сиб. матем. журн., 2008, т. 49, № 4, с. 837–854.
13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967, 752 с.
14. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гохтехиздат, 1949, 264 с.
15. Рвачева Е. Л. Об областях притяжения многомерных распределений. — Ученые Записки Львовского Гос. ун-та, 1958, т. 6, с. 5–44.
16. Shepp L. A. A local limit theorem. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 419–423.
17. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
18. Bingham N. H., Goldie C. H., Teugels J. L. Regular Variations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p. (Encyclopedia Math. Appl., v. 27).
19. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.

Поступила в редакцию
6.IV.2008