Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Борисов, Замечание о распределении числа пересечений полосы случайным блужданием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 345–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 07:40:53

© 2008 г.

БОРИСОВ И. С.*

ЗАМЕЧАНИЕ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ¹⁾

В работе существенно обобщается результат из [1], где была приведена формула для распределения числа пересечений полосы траекторией случайного блуждания, порожденного бесконечной последовательностью частичных сумм независимых случайных величин с одним и тем же «двусторонним геометрическим» распределением.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, процесс частичных сумм, марковское свойство перескока.

Пусть $\{\xi_i; i \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с условиями

$$E\xi_1 \neq 0, \quad P\{\xi_1 > 0\} P\{\xi_1 < 0\} \neq 0. \quad (1)$$

Определим процесс частичных сумм на положительной полупрямой по формуле

$$S(t) := \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_i, \quad t \geq 0,$$

где сумма по пустому множеству индексов по определению полагается равной нулю. Этот случайный процесс описывает однородное по времени *случайное блуждание* частицы на числовой прямой с независимыми скачками $\{\xi_i\}$, происходящими через единичные промежутки времени.

Обозначим через η_1 и η_2 соответственно число пересечений *сверху вниз* и *снизу вверх* (более формально эти определения даны при доказательстве нижеследующей теоремы) траекторией $S(\cdot)$ полосы

$$D(N, M) := \{(t, s): t \geq 0, -M \leq s \leq N\},$$

где $N, M > 0$. Для блужданий с целочисленными скачками дополнительно предполагается, что N и M — натуральные числа. Отметим, что при выполнении (1) случайные величины η_1 и η_2 будут собственными, поскольку в этом случае рассматриваемое случайное блуждание с вероятностью 1 будет иметь ненулевой снос на бесконечность того или иного знака.

Поводом для написания настоящей заметки послужила статья [1], в которой было доказано, что если

$$P\{\xi_1 = k\} = a_1 q_1^k, \quad P\{\xi_1 = -k\} = a_2 q_2^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

то для всех натуральных k

$$P\{\eta_1 \geq k\} = c_1 d^k, \quad P\{\eta_2 \geq k\} = c_2 d^k, \quad (3)$$

где параметры c_i и d определяются распределением (2). При этом использовался достаточно громоздкий аналитический аппарат, основанный на представлении искомых вероятностей через компоненты факторизации функции двух комплексных переменных $1 - z\varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda)$ — преобразование Лапласа распределения ξ_1 .

Цель настоящей заметки — привести элементарное доказательство утверждения (3) для значительно более широкого, чем (2), класса распределений ξ_1 . При этом будет дана вероятностная интерпретация постоянных c_i и d .

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00810, 06-01-00738) и INTAS (грант 03-51-5018).

Отметим, что при выполнении (1) распределение случайной величины ξ_1 может быть представлено единственным образом в виде смеси распределений *положительной компоненты* ξ_1^+ и *неположительной компоненты* ξ_1^- , т.е. справедливо равенство по распределению

$$\xi_1 \stackrel{d}{=} \nu \xi_1^+ + (1 - \nu) \xi_1^-, \quad (4)$$

где ν — бернуллиевская случайная величина с некоторой вероятностью успеха (равной весу упомянутой смеси), $\xi_1^+ > 0$ и $\xi_1^- \leq 0$ почти наверное, причем все три случайные величины ξ_1^+ , ξ_1^- и ν предполагаются *независимыми*.

Мы сохраним термины *положительная* и *неположительная компоненты скачка* распределения и в случае, когда

$$\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_1^+ + \xi_1^-, \quad (5)$$

если только эти компоненты независимы. Понятно, что представление (5), нередко встречающееся в приложениях (например, в теории массового обслуживания), может быть переписано в виде (4), но с *другими* компонентами. Но в некоторых случаях те или иные компоненты в (4) и (5) могут совпадать. Например, скачок любого *полу-непрерывного сверху* случайного блуждания допускает указанные представления с одной и той же вырожденной положительной компонентой ξ_1^+ , равной единице почти наверное. При этом неположительные компоненты могут различаться: в отличие от (4) в представлении (5) в рассматриваемом примере случайная величина ξ_1^- , распределенная на множестве неположительных целых чисел, в силу (1) с необходимостью должна удовлетворять условию $P\{\xi_1^- = 0\} > 0$.

Мы будем говорить, что случайная величина ζ обладает *марковским перескоком*, если при всех тех $x > 0$ из *носителя* ее распределения, для которых $P\{\zeta \geq x\} > 0$, *условное распределение разности (величины перескока) $\zeta - x$ при условии $\zeta \geq x$ не зависит от x* . Ясно, что в силу очевидной симметрии рассматриваемой задачи мы можем ограничиться только изучением перескока *вправо*, при необходимости применяя вышеприведенное определение к случайной величине $-\zeta$. Хорошо известно, что указанным свойством обладают экспоненциальное и геометрическое распределения (см., например, [2]), поскольку эффект *отсутствия последствия* у распределения перескока (т.е. совпадение распределения исходной случайной величины с соответствующим условным распределением величины ее перескока через любой уровень) для этих двух семейств распределений влечет за собой отмеченное марковское свойство (но не наоборот!). Очевидно, этим же свойством обладают и вырожденные распределения на положительной полупрямой, а также любые смеси экспоненциального (или геометрического) распределения с вырожденным в нуле распределением. Более того, с помощью формулы полной вероятности можно легко убедиться в том, что марковский перескок имеют случайные величины, представимые в виде (4) или (5), если только положительная компонента обладает указанным свойством, а неположительная имеет *произвольное* распределение при условии согласования их носителей. Так что, говоря в нижеследующей теореме о марковском перескоке скачка случайного блуждания при выполнении (1), мы будем иметь в виду следующие три типа распределений ξ_1 :

(I) положительная компонента ξ_1^+ имеет геометрическое распределение (на множестве *натуральных чисел*), а ξ_1^- произвольно распределена на множестве *целых неположительных чисел*;

(II) $\xi_1^+ = 1$ почти наверное, а ξ_1^- имеет произвольное распределение на множестве целых неположительных чисел (полунепрерывное случайное блуждание);

(III) ξ_1^+ экспоненциально распределена, а ξ_1^- имеет произвольное распределение с носителем на замкнутой справа полуоси $(-\infty, 0]$.

Отметим, что класс (III) содержит *все распределения с непрерывной положительной компонентой* и марковским перескоком. Классы (I) и (II) с точностью до шага и сдвига решетки также описывают *все дискретные распределения* (которые, как нетрудно понять, будут с *необходимостью* решетчатыми) с указанным свойством перескока. Доказательства этих свойств по сути повторяют соответствующие рассуждения в [2], и поэтому мы их опускаем.

Основной результат настоящей заметки состоит в следующем.

Теорема. Пусть выполнено условие (1) и распределение скачка ξ_1 (или $-\xi_1$) случайного блуждания $S(t)$ принадлежит одному из классов (I)–(III). Тогда справедливы оба соотношения в (3).

Доказательство. В силу очевидной симметрии задачи ограничимся рассмотрением случая, когда распределение ξ_1 принадлежит одному из классов (I)–(III). Прежде всего введем необходимые обозначения. На множестве траекторий $S(\cdot)$, пересекающих уровень $N > 0$, определим

$$\tau_1^+ := \min\{t \geq 0: S(t) \geq N\}, \quad S_1(t) := S(\tau_1^+ + t) - S(\tau_1^+), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

На оставшихся элементарных исходах (траекториях) положим $\tau_1^+ = \infty$ и $S(\infty) = 0$. Построенные отображения вероятностного пространства на расширенную числовую прямую (с расширенной борелевской σ -алгеброй) будут измеримыми, и мы вправе говорить о них как о случайных величинах. Теперь положим $\chi_1^+ := \max\{S(\tau_1^+), N\} - N$. Такие случайные величины иногда называются *лестничными высотами* (см. [2, т. 2], [3]), которые для краткости мы также будем называть *перескоками* (через уровень N).

Обозначим через $\mathcal{B}(k)$, $k = 1, 2, \dots$, σ -алгебру событий, порожденную траекториями $S(\cdot)$ до момента $t = k$ включительно, а через $\mathcal{B}(\tau_1^+)$ — минимальную σ -алгебру, содержащую события вида $B \cap \{\tau_1^+ = k\}$ при всех $B \in \mathcal{B}(k)$ и $k < \infty$. Кроме того, пусть $\mathcal{B}_1$ обозначает σ -алгебру событий, порожденных траекториями случайного процесса $S_1(t)$ при $t \geq 0$. Наконец, положим $\mathcal{P}(A) := \mathbf{P}\{\xi_1 - 1 \in A \mid \xi_1 \geq 1\}$. На основном вероятностном пространстве зададим также случайную величину χ^* (*собственный перескок*) с распределением $\mathcal{P}(A)$, не зависящую от последовательности $\{\xi_i\}$.

С помощью формулы полной вероятности (при фиксации момента перескока и положения траектории $S(\cdot)$ в момент, предшествующий перескоку) и марковского свойства перескока у скачка рассматриваемого случайного блуждания элементарно доказывается следующее утверждение.

Лемма. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для всех борелевских подмножеств A неотрицательной полуоси справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}\{\chi_1^+ \in A \mid \tau_1^+ = k\} = \mathcal{P}(A) \quad \text{при всех натуральных } k,$$

$$\mathbf{P}\{B \cap \{\chi_1^+ \in A\} \cap C\} = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(C) \mathcal{P}(A) \quad \text{при всех } B \in \mathcal{B}(\tau_1^+) \text{ и } C \in \mathcal{B}_1.$$

Далее, аналогично (6) определяем

$$\tau_1^- := \min\{t > \tau_1^+ : S(t) \leq -M\}, \quad \tau_2^+ := \min\{t > \tau_1^- : S(t) \geq N\},$$

$$\tau_2^- := \min\{t > \tau_2^+ : S(t) \leq -M\}, \quad \chi_2^+ := \max\{S(\tau_2^+), N\} - N,$$

где минимальный элемент пустого множества по-прежнему полагается равным ∞ . Продолжая неограниченно этот процесс построения, мы зададим на одном вероятностном пространстве последовательности случайных величин (вообще говоря, не собственных) $\{\tau_j^+, \tau_j^-; j \geq 1\}$, а также собственные случайные величины $\{\chi_j^+\}$ — последовательные перескоки исходного случайного блуждания $S(t)$ через «верхний» уровень после очередного пересечения «нижнего». При этом первое утверждение леммы переписывается в виде

$$\mathbf{P}\{\chi_j^+ \in A \mid \tau_j^+ = k\} = \mathbf{P}\{\chi^* \in A\} = \mathcal{P}(A) \quad \text{при всех натуральных } j \text{ и } k,$$

а соответствующий аналог второго утверждения леммы влечет следующие рекуррентные соотношения:

$$\mathbf{P}\{\tau_j^- < \infty\} = \mathbf{P}\{\tau_j^+ < \infty\} \mathbf{P}\{\chi^* + \inf_{t \geq 0} S(t) \leq -N - M\}, \quad j \geq 1, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\{\tau_j^+ < \infty\} = \mathbf{P}\{\tau_{j-1}^+ < \infty\} \mathbf{P}(B), \quad j > 1,$$

где событие B состоит в том, что траектории случайного процесса $\chi^* + S(t)$ при $t \geq 0$ сначала пересекают уровень $-N - M$, а затем нулевой уровень. Очевидно, отсюда сразу следует соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \geq k\} = \mathbf{P}\{\tau_k^- < \infty\} = c_1 d^k, \quad k \geq 1,$$

где $d := P(B)$ и $c_1 := P\{\tau_1^+ < \infty\} P\{\chi^* + \inf_{t \geq 0} S(t) \leq -N - M\} / P(B)$. Аналогичное распределение имеет и величина η_2 , поскольку

$$\begin{aligned} P\{\eta_2 \geq k\} &= P\left\{\tau_1^+ < \infty, \inf_{0 \leq t \leq \tau_1^+} S(t) > -M\right\} P(B)^k \\ &+ P\left\{\tau_1^+ < \infty, \inf_{0 \leq t \leq \tau_1^+} S(t) \leq -M\right\} P(B)^{k-1}. \end{aligned}$$

Так что в формуле для распределения η_2 в (3) нужно положить

$$c_2 := P\left\{\tau_1^+ < \infty, \inf_{0 \leq t \leq \tau_1^+} S(t) > -M\right\} + \frac{P\{\tau_1^+ < \infty, \inf_{0 \leq t \leq \tau_1^+} S(t) \leq -M\}}{P(B)}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В зависимости от знака $E\xi_1$ (т.е. от направления сноса траектории $S(t)$) постоянные c_i в приведенных формулах допускают уточнение. Скажем, если $E\xi_1 > 0$, то событие $\{\tau_1^+ < \infty\}$ будет *достоверным* (см. [2, т. 2], [3]) и его (а также его вероятность) следует удалить в формулах для c_i . Если же $E\xi_1 < 0$, то в определении c_1 мы имеем $P\{\chi^* + \inf_{t \geq 0} S(t) \leq -N - M\} = 1$.

З а м е ч а н и е 2. Если одновременно обе случайные величины ξ_1 и $-\xi_1$ обладают марковскими перескоками (скажем, как в (2)), то вычисление параметров c_i и d распределений в вышеприведенных формулах сводится к известным простым задачам о пересечении уровня и вариантам двуграничной «задачи о разорении» для рассматриваемого случайного блуждания. При этом соответствующие вероятности могут быть вычислены сравнительно элементарно без привлечения аппарата факторизационных тождеств (см. [3]) или теории восстановления (с использованием интегрального уравнения Винера–Хопфа, как, например, в [2, т. 2]).

В качестве примера продемонстрируем, как в условиях замечания 2 можно вычислить параметры c_1 и d . Прежде всего отметим, что в рассматриваемом случае величина d (в силу упомянутых свойств перескоков вправо и влево) допускает следующее представление:

$$d = P\left\{\chi^* + \inf_{t \geq 0} S(t) \leq -N - M\right\} P\left\{\chi_-^* + \sup_{t \geq 0} S(t) \geq N + M\right\},$$

где случайная величина χ_-^* (собственный перескок *влево*), не зависящая от χ^* и случайного процесса $S(\cdot)$, определяется так же, как χ^* , но для случайной величины $-\xi_1$. Иначе говоря, для вычисления компонент c_1 и d нужно знать лишь вероятности пересечения уровня рассматриваемым случайным блужданием, что составляет содержание известных граничных задач. Наша цель — привести элементарный вывод уже известных соотношений (см., например, [2], [3]).

Мы ограничимся вычислением вероятности

$$Q(x) := P\left\{\sup_{t \geq 0} S(t) \geq x\right\} \quad \text{при любых } x > 0,$$

к которой, очевидно, все сводится. При этом мы будем требовать марковское свойство перескока только у ξ_1 , но не у $-\xi_1$, т.е. приводимые ниже рассуждения справедливы для любого представителя классов (I)–(III). Кроме того, мы уточним моментное условие в (1), предположив, что $E\xi_1 < 0$, поскольку в противном случае, как уже было отмечено, $Q(x) \equiv 1$.

В самом деле, с помощью формулы полной вероятности и вышеприведенной леммы нетрудно получить при любых $x, \delta > 0$ следующее тождество:

$$Q(x + \delta) = Q(x) \left(P\{\chi^* \geq \delta\} + \int_{[0, \delta)} Q(\delta - t) P\{\chi^* \in dt\} \right). \quad (8)$$

Скажем, если распределение ξ_1 принадлежит классу (III), то из (8) легко выводим дифференциальное уравнение $Q'(x) = \alpha(Q(0^+) - 1)Q(x)$, где $Q(0^+) := \lim_{x \rightarrow 0+0} Q(x) = P\{\sup_{t \geq 0} S(t) > 0\}$. Отсюда немедленно следует, что

$$Q(x) = Q(0^+) \exp\{-\alpha(1 - Q(0^+))x\} \quad (9)$$

при всех $x \geq 0$; здесь α — показатель экспоненциального распределения положительной компоненты ξ_1^+ . Для вычисления величины $Q(0^+)$ можно вновь воспользоваться формулой полной вероятности (с учетом экспоненциального представления (9)):

$$1 - Q(0^+) = \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{\xi_1 \in dx\}(1 - Q(|x|)) = p - pQ(0^+) \varphi^-(\alpha(1 - Q(0^+))), \quad (10)$$

где $p := \mathbf{P}\{\xi_1 \leq 0\}$, а $\varphi^-(s)$ — преобразование Лапласа распределения случайной величины $|\xi_1^-|$. Полагая $z := \alpha(1 - Q(0^+))$, получаем из (10) уравнение для нахождения $Q(0^+)$:

$$\varphi^-(z) = f(z), \quad (11)$$

где $f(x) := p^{-1} - (p^{-1} - 1)(1 - z/\alpha)^{-1}$. Нетрудно видеть, что это уравнение в интервале $(0, \alpha)$ имеет единственное решение. Это следует из соотношений $\varphi^-(0) = f(0) = 1$, $(\varphi^-(0))' = -\mathbf{E}|\xi_1^-| < f'(0) = -(p^{-1} - 1)/\alpha$, поскольку $\mathbf{E}\xi_1 = (1 - p)/\alpha - p\mathbf{E}|\xi_1^-| < 0$, а также того факта, что $\varphi^-(z)$ — положительная выпуклая функция, а $f(z)$ — вогнутая функция, меняющая свой знак при $z \rightarrow \alpha - 0$. Отметим также, что уравнение (11) для нахождения $Q(0^+)$ эквивалентно соответствующему уравнению в [3, с. 236], записанному в терминах преобразования Лапласа распределения скачка ξ_1 . Основанное на методике теории восстановления вычисление функции $Q(x)$ для класса (III) также можно найти в [2, т. 2, с. 457].

Для арифметических распределений из классов (I) и (II) тождество (8) превращается в простое рекуррентное соотношение

$$Q(k+1) = Q(k)(\mathbf{P}\{\chi^* \geq 1\} + Q(1)\mathbf{P}\{\chi^* = 0\}) \quad (12)$$

для любого целого $k \geq 0$, которое также приводит к показательному распределению $Q(k)$ с уравнением для $Q(1) = Q(0^+)$, аналогичным (10). Отметим, что для полунепрерывного случайного блуждания (класс (II)) мы имеем $\mathbf{P}\{\chi^* = 0\} = 1$, и из (12) получаем, что $Q(k) = Q(1)^k$ для любого натурального k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лотов В. И., Орлова Н. Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. — Матем. сб., 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2. М.: Мир, 1984, 528 с.; 752 с.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М: Эдиториал УРСС, 1999, 470 с.

Поступила в редакцию
21.VI.2006

Исправленный вариант
10.I.2008

© 2008 г.

ДЖАОШВИЛИ В.*, ПУРТУХИЯ О.*

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ОКОНЕ-ХАУСМАНА-КЛАРКА ДЛЯ КОМПЕНСИРОВАННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА¹⁾

Для компенсированного пуассоновского процесса определены пространства соболевского типа $D_{p,1,\alpha}^{CP}(1 \leq p \leq 2)$ и для функционалов

* Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, ул. Университетская 2; Институт математики им. А. Размадзе, ул. М. Алексидзе, 1, Тбилиси 0193, Грузия, e-mail: o.purtukhia@math.sci.tsu.ge

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Грузинского национального фонда науки, грант № 337/07, 06.223.3-104