Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Джаошвили, О. Г. Пуртухия, Обобщение формулы Оконе–Хаусмана–Кларка для компенсированного пуассоновского процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 349–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:36:39

при всех $x \geq 0$; здесь α — показатель экспоненциального распределения положительной компоненты ξ_1^+ . Для вычисления величины $Q(0^+)$ можно вновь воспользоваться формулой полной вероятности (с учетом экспоненциального представления (9)):

$$1 - Q(0^+) = \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{\xi_1 \in dx\}(1 - Q(|x|)) = p - pQ(0^+) \varphi^-(\alpha(1 - Q(0^+))), \quad (10)$$

где $p := \mathbf{P}\{\xi_1 \leq 0\}$, а $\varphi^-(s)$ — преобразование Лапласа распределения случайной величины $|\xi_1^-|$. Полагая $z := \alpha(1 - Q(0^+))$, получаем из (10) уравнение для нахождения $Q(0^+)$:

$$\varphi^-(z) = f(z), \quad (11)$$

где $f(x) := p^{-1} - (p^{-1} - 1)(1 - z/\alpha)^{-1}$. Нетрудно видеть, что это уравнение в интервале $(0, \alpha)$ имеет единственное решение. Это следует из соотношений $\varphi^-(0) = f(0) = 1$, $(\varphi^-(0))' = -\mathbf{E}|\xi_1^-| < f'(0) = -(p^{-1} - 1)/\alpha$, поскольку $\mathbf{E}\xi_1 = (1 - p)/\alpha - p\mathbf{E}|\xi_1^-| < 0$, а также того факта, что $\varphi^-(z)$ — положительная выпуклая функция, а $f(z)$ — вогнутая функция, меняющая свой знак при $z \rightarrow \alpha - 0$. Отметим также, что уравнение (11) для нахождения $Q(0^+)$ эквивалентно соответствующему уравнению в [3, с. 236], записанному в терминах преобразования Лапласа распределения скачка ξ_1 . Основанное на методике теории восстановления вычисление функции $Q(x)$ для класса (III) также можно найти в [2, т. 2, с. 457].

Для арифметических распределений из классов (I) и (II) тождество (8) превращается в простое рекуррентное соотношение

$$Q(k+1) = Q(k)(\mathbf{P}\{\chi^* \geq 1\} + Q(1)\mathbf{P}\{\chi^* = 0\}) \quad (12)$$

для любого целого $k \geq 0$, которое также приводит к показательному распределению $Q(k)$ с уравнением для $Q(1) = Q(0^+)$, аналогичным (10). Отметим, что для полунепрерывного случайного блуждания (класс (II)) мы имеем $\mathbf{P}\{\chi^* = 0\} = 1$, и из (12) получаем, что $Q(k) = Q(1)^k$ для любого натурального k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лотов В. И., Орлова Н. Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. — Матем. сб., 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2. М.: Мир, 1984, 528 с.; 752 с.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М: Эдиториал УРСС, 1999, 470 с.

Поступила в редакцию
21.VI.2006

Исправленный вариант
10.I.2008

© 2008 г.

ДЖАОШВИЛИ В.*, ПУРТУХИЯ О.*

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ОКОНЕ-ХАУСМАНА-КЛАРКА ДЛЯ КОМПЕНСИРОВАННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА¹⁾

Для компенсированного пуассоновского процесса определены пространства соболевского типа $D_{p,1,\alpha}^{CP}(1 \leq p \leq 2)$ и для функционалов

* Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, ул. Университетская 2; Институт математики им. А. Размадзе, ул. М. Алексидзе, 1, Тбилиси 0193, Грузия, e-mail: o.purtukhia@math.sci.tsu.ge

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Грузинского национального фонда науки, грант № 337/07, 06.223.3-104

из этих пространств выведена формула стохастического интегрального представления (аналог формулы Оcone–Хаусмана–Кларка). Приведена формула для нахождения предсказуемой проекции стохастической производной вышеупомянутых функционалов.

Ключевые слова и фразы: формула Оcone–Хаусмана–Кларка, компенсированный пуассоновский процесс, стохастическая производная, предсказуемая проекция.

1. Введение. В теории случайных процессов особое место занимают так называемые теоремы мартингального представления. В конце прошедшего столетия оказалось, что эти теоремы (вместе с теоремой Гирсанова о замене меры) играют значительную роль в современной финансовой математике. Согласно хорошо известной формуле Кларка [1], любая $\mathfrak{F}_T^W$ -измеримая, интегрируемая в квадрате случайная величина F допускает стохастическое интегральное представление с согласованной подынтегральной функцией $\varphi_t(\omega) \in L_2([0, T] \times \Omega)$. Однако этот результат ничего не говорит о нахождении процесса $\varphi_t(\omega)$ в явном виде, хотя для стохастически гладких винеровских функционалов по формуле Оcone–Кларка $\varphi_t(\omega) = \mathbf{E}[D_t^W F | \mathfrak{F}_t^W](\omega)$, где $D_t^W F$ — стохастическая производная (производная Маллявена) функционала F . Следовательно, если функционал F не имеет стохастическую производную, то применение этой формулы невозможно. Другой метод нахождения подынтегральной функции $\varphi_t(\omega)$ был предложен в [2] в случае, когда F является функционалом «максимального» типа. Наш подход, в рамках классического исчисления Ито, позволяет построить $\varphi_t(\omega)$ в явном виде в случае, когда F не имеет стохастическую производную [7].

Последующее обобщение формулы Оcone–Кларка для нормальных мартингалов (мартингал называется нормальным, если $\langle M, M \rangle_t = t$) изложено в [3], где при условии $F \in D_{2,1}^M$ стохастическое интегральное представление Оcone–Хаусмана–Кларка имеет место с подынтегральным выражением $\varphi_t(\omega) = {}^P(D_t^M F)$ (где ${}^P(D_t^M F)$ — предсказуемая проекция стохастической производной $D_t^M F$ функционала F). Но в этом случае (точнее, когда $[M, M]$ не является детерминистическим), в отличие от винеровского случая (см. пример в [3]), не удается определить стохастическую производную так, чтобы получить структуру соболевских пространств, которая позволяет построить стохастическую производную в явном виде. Следовательно, формула Оcone–Хаусмана–Кларка не позволяет построения стохастической производной функционалов от компенсированного пуассоновского процесса в явном виде, не говоря о возможности построения их предсказуемых проекций. Наш подход, в рамках согласованного стохастического исчисления семимартингалов, позволяет в явном виде построить подынтегральные выражения для функционалов от компенсированного пуассоновского процесса, а также получить формулы, позволяющие построение в явном виде предсказуемых проекций их стохастических производных [8], [9].

В самом деле, пример в [3] показывает, что два определения (соболевское пространство и хаотическое разложение) совместимы тогда и только тогда, когда $[M, M]$ является детерминистическим. Поэтому в мартингальном случае пространство $D_{p,1}^M$, $1 < p < 2$, невозможно определить обычным образом (т.е. замыканием класса гладких функционалов относительно соответствующей нормы). В [6] пространство $D_{p,1}^M$, $1 < p < 2$, определено для класса нормальных мартингалов и установлено интегральное представление Оcone–Хаусмана–Кларка для функционалов из этого пространства.

Целью данной работы является определение пространства $D_{p,1,\alpha}^{CP}$, $1 \leq p \leq 2$ (аналог пространства $D_{p,1}^M$), для компенсированного пуассоновского процесса и обобщение формулы Оcone–Хаусмана–Кларка для функционалов из класса $D_{p,1,\alpha}^{CP}$, $1 < p < 2$. Кроме того, выведена формула для нахождения предсказуемых проекций производных Маллявена вышеупомянутых функционалов.

2. Вспомогательные понятия и результаты. Пусть задано стандартное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, (\mathfrak{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty})$, а на нем задан стандартный пуассоновский процесс N_t , и пусть поток $\mathfrak{Z}_t$ порожден процессом $N, \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_T$. Обозначим

$M_t := N_t - t$. Пусть $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, а $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ — пуассоновское распределение: $P_x = e^{-T} T^x / x!$, $x = 0, 1, 2, \dots$. Положим $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ ($f(x) = 0, x < 0$) и определим полиномы Пуассона-Шарлье: $\Pi_n(x) = (-1)^n \nabla^n P_x / P_x$, $n \geq 1$; $\Pi_0 = 1$. Известно [4], что последовательность $\{\pi_n(x) = \Pi_n(x) / c_n\}_{n \geq 0}$ является базисом в $L_2(Z^+) := \{f: \sum_{x=0}^{\infty} f^2(x) < \infty\}$. Пусть $\rho(x, T) := e^{-T} T^x / x!$ и обозначим $L_2^T := L_2(Z^+; \rho(x, T))$ функциональное пространство на Z^+ с нормой $\|g\|_{2,T} := \|g\rho^{1/2}(T)\|_{L_2}$. Согласно утверждению VIII.4.3 из [4], справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. L_2^T является банаховым пространством с базисом $\{x^n \rho(x, T)\}$.

Воспользовавшись неравенствами Ляпунова и Йенсена, а также теоремой Фубини, согласно утверждению II.2 из [5], можно доказать следующее предложение.

Предложение 2.2. Если $f(\cdot - T) \in L_2^T$, то существует стохастический интеграл

$$\int_{(0,T]} \mathbf{E}[f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] dM_t.$$

Обозначим $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$ ($\Delta P_n(M_T) = \Delta P_n(x)|_{x=M_T}$).

Теорема 2.1 (см. [9, теорема 3]). Если $f \in L_2^T$ и для некоторого $0 < \alpha < 1$: $\Delta f(\cdot - T) \in L_2^{T/\alpha}$, то существует нижеследующий стохастический интеграл и имеет место представление

$$f(M_T) = \mathbf{E}[f(M_T)] + \int_{(0,T]} \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] dM_t \quad (\mathbf{P}\text{-н.н.}) \quad (2.1)$$

Теорема 2.2 (см. [9, теорема 4]). Если $f \in L_2^T$ и для некоторого $0 < \alpha < 1$: $\Delta f(\cdot - T) \in L_2^{T/\alpha}$, то справедливо соотношение

$$p(D_t^M f(M_T)) = \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] dM_t \quad (d\mathbf{P} \otimes ds\text{-н.н.})$$

3. Основные результаты. Обозначим $D_{2,1,\alpha}^{CP} := \{f: f \in L_2^T, \Delta f(\cdot - T) \in L_2^{T/\alpha}\}$. Ясно, что $D_{2,1,\alpha}^{CP}$ есть гильбертово пространство с нормой $\|f\|_{2,1,\alpha} := \|f\|_{L_2^T} + \|\Delta f(\cdot - T)\|_{L_2^{T/\alpha}}$.

Пусть $1 \leq p < 2$ и определим: $L_p^T := \{f: f\rho^{1/p} \in L_2\}$ и $\|f\|_{L_p^T} := \|f\rho^{1/p}\|_{L_2}$. Введем норму $\|f\|_{p,1,\alpha} := \|f\|_{L_p^T} + \|\Delta f(\cdot - T)\|_{L_p^{T/\alpha}}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Обозначим $D_{p,1,\alpha}^{CP}$ банахово пространство, являющееся замыканием $D_{2,1,\alpha}^{CP}$ относительно нормы $\|\cdot\|_{p,1,\alpha}$.

Теорема 3.1. Если $f \in D_{p,1,\alpha}^{CP}$, где $1 < p < 2$, то справедливо представление

$$f(M_T) = \mathbf{E}[f(M_T)] + \int_{(0,T]} \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] dM_t \quad (\mathbf{P}\text{-н.н.}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 3.1, существует такая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_{2,1,\alpha}^{CP}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p,1,\alpha} = 0. \quad (3.1)$$

Введем следующие мартингалы: $m(t) := \mathbf{E}[f(M_T) | \mathfrak{F}_t]$ и $m_n(t) := \mathbf{E}[f_n(M_T) | \mathfrak{F}_t]$. Согласно [10], имеем

$$m(t) = \mathbf{E}[f(M_T)] + \int_{(0,T]} g(s) dM_s.$$

С другой стороны, беря условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{F}_t$ от обеих частей соотношения (2.1) для f_n , получим

$$m_n(t) = \mathbf{E}[f_n(M_T)] + \int_{(0,T]} \mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{s-}] dM_s \quad (\mathbf{P}\text{-н.н.}).$$

Используя неравенства Дуба и Йенсена и учитывая (3.1), нетрудно видеть, что

$$\left\{ \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |m_n(t) - m(t)|^p \right] \right\}^{1/p} \leq \frac{p}{1-p} \|f_n - f\|_{p,1,\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда по неравенству Буркхольдера-Ганди-Дэвиса имеем

$$\mathbf{E}[m_n - m, m_n - m]_T^{p/2} \leq c \mathbf{E} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |m_n - m| \right\}^p \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, согласно неравенству Ляпунова, заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - g(t)|^2 d[M, M]_t \right\}^{1/2} = 0.$$

Отсюда по неравенству Чебышёва ясно, что

$$\mathbf{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - g(t)|^2 d[M, M]_t = 0.$$

Поэтому, согласно неравенству Кунита-Ватанабе, можно заключить

$$\mathbf{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - g(t)| d[M, M]_t = 0. \quad (3.2)$$

С другой стороны, из линейности условного математического ожидания и оператора Δ следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| dt \\ &= \mathbf{E} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta(f_n(M_T) - f(M_T)) | \mathfrak{F}_{t-}]| dt. \end{aligned}$$

Отсюда, по неравенствам Йенсена, Коши-Буняковского и Ляпунова, с учетом теоремы Рубины, заключаем, что

$$\mathbf{E} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| dt \leq \sqrt{T} \|f_n - f\|_{p,1,\alpha} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку для предсказуемого процесса h справедливо $\mathbf{E}(h \circ \langle M, M \rangle) = \mathbf{E}(h \circ [M, M])$, то из (3.3) можно заключить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| d[M, M]_t = 0 \quad (3.4)$$

и, кроме того,

$$\mathbf{E} \int_{(0,T]} \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] d[M, M]_t = \mathbf{E} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| dt < \infty.$$

По соотношениям (3.2) и (3.4) можно выбрать подпоследовательность $\{n_k\}_{k \geq 1}$ такую, что (P-п.н.) выполнены следующие соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_{n_k}(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - g(t)| d[M, M]_t = 0$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_{n_k}(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| d[M, M]_t = 0.$$

Отсюда, для почти всех ω заключаем, что

$$g(\cdot, \omega) = \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{\cdot-}](\omega) \quad (d[M, M]\text{-п.н.}).$$

Таким образом, для почти всех ω имеем:

$$\int_{(0,T]} |g(t) - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| d[M, M]_t = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{E} \int_{(0,T]} |g(t) - \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]| d[M, M]_t = 0$, поэтому $g(t, \omega) = \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}](\omega)$ ($d\mathbf{P} \otimes d[M, M]$ -п.н.) и, следовательно,

$$\int_{(0,T]} g(t) dM_t = \int_{(0,T]} \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] dM_t \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. Если $f \in D_{p,1,\alpha}^{CP}$, $1 < p < 2$, то

$$\int_{(0,T]} |\mathbf{E}[\Delta f_n(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}]|^2 d[M, M]_t < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

Теорема 3.2. Если $f \in D_{p,1,\alpha}^{CP}$ и $f(M_T) \in D_{p,1}$, $1 < p \leq 2$, то справедливо соотношение

$$^p[D_t^M f(M_T)] = \mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] \quad (d\mathbf{P} \otimes ds\text{-п.н.}). \quad (3.5)$$

Доказательство. В силу теорем 4.5 из [3] и 2.1 из [6] имеем:

$$f(M_T) = \mathbf{E}[f(M_T)] + \int_{(0,T]} \{^p[D_t^M f(M_T)]\} dM_t \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

Рассмотрим разность

$$\xi_T = \int_{(0,T]} \{\mathbf{E}[\Delta f(M_T) | \mathfrak{F}_{t-}] - ^p[D_t^M f(M_T)]\} dM_t := \int_{(0,T]} \eta_t dM_t.$$

С одной стороны, в силу теорем 2.1 и 3.1 очевидно, что $\xi_T = 0$ ($\mathbf{P}$ -п.н.). С другой стороны, согласно формуле Ито,

$$\xi_t^2 = 2 \int_{(0,t]} (\xi_{t-}) \eta_t dM_t + \int_{(0,t]} \eta_t^2 d[M, M]_t.$$

Если теперь взять математическое ожидание обеих частей последнего соотношения, используя хорошо известные свойства квадратических и предсказуемых характеристик мартингала, то получим

$$0 = \mathbf{E} \int_{(0,T]} \eta_t^2 d[M, M]_t = \mathbf{E} \int_{(0,T]} \eta_t^2 d\langle M, M \rangle_t = \mathbf{E} \int_{(0,T]} \eta_t^2 dt.$$

Тем самым убеждаемся в справедливости соотношения (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clark J. M. The representation of functionals of Brownian motion as stochastic integrals. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 4, p. 1282–1295.
2. Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 375–385.
3. Ma J., Protter P., Martin J. S. Anticipating integrals for a class of martingales. — Bernoulli, 1998, v. 4, p. 81–114.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 543 с.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986, 512 с.
6. Purtukhia O. An extension of the Ocone-Haussmann-Clark formula for a class of normal martingales. — Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 2003, v. 132, p. 127–136.
7. Jaoshvili V., Purtukhia O. Stochastic integral representation of functionals of Wiener processes. — Bull. Georg. Acad. Sci., 2005, v. 171, № 1, p. 17–20.
8. Jaoshvili V., Purtukhia O. Stochastic integral representation of functionals of Poisson processes. I. — Bull. Georg. Acad. Sci., 2005, v. 172, № 2, p. 189–192.
9. Jaoshvili V., Purtukhia O. Stochastic integral representation of functionals of Poisson processes. II. — Bull. Georg. Acad. Sci., 2006, v. 174, № 2, p. 29–32.
10. Кабанов Ю. М. Представление функционалов от винеровского и пуассоновского процессов в виде стохастических интегралов. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 28, в. 2, с. 376–380.