Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, О сходимости субмартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 364–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:09:26

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birgé L. A new lower bound for multiple hypothesis testing. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, v. 51, № 4, p. 1611–1615.
2. Гушчин А. А. О лемме Фано и аналогичных неравенствах для минимаксного риска. — Теория вероятн. и матем. статист., 2002, в. 67, с. 26–37.
3. Gushchin A. A. On an information-type inequality for the Hellinger process. — Proceedings of the Seventh Japan–Russia Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics. Ed. by S. Watanabe et al. Singapore: World Scientific, 1996, p. 83–109.
4. Jacod J. Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. Berlin: Springer, 1979, 539 p. (Lecture Notes in Math., v. 714.)
5. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994, 542 с., 366 с.
6. Жданов Д. А. О лемме Фано для случая фильтрованного пространства. — Обозрение прикл. и Industr. матем., 2006, т. 13, в. 6, с. 1024–1026.
7. Haussler D., Oppen M. Mutual information, metric entropy and cumulative relative entropy risk. — Ann. Statist., 1997, v. 25, № 6, p. 2451–2492.
8. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
9. Коломиец Э. И. Мартингалы в асимптотической теории проверки статистических гипотез. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1986.
10. Коломиец Э. И. Об асимптотическом поведении вероятностей ошибок второго рода в критерии Неймана–Пирсона (случай вполне асимптотически различимых гипотез). — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 3, с. 503–522.
11. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
12. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.

Поступила в редакцию
21.II.2008

© 2008 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О СХОДИМОСТИ СУБМАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказаны теоремы о сходимости почти всюду сепарабельных субмартингалов. Они содержат в качестве частных случаев известные теоремы Дуба о сходимости интегрируемых субмартингалов.

Ключевые слова и фразы: субмартингал, сходимость почти всюду, марковский момент.

Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и произвольное множество вещественных чисел T . Семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \in T$, называется *фильтрацией*, если $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для любых $s, t \in T$, $s < t$. Семейство вещественных случайных величин X_t , $t \in T$, называется *субмартингалом* относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ или, более коротко, $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом, если для любого $t \in T$ случайная величина X_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$, ее положительная часть X_t^+

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@df.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00563, 08-01-00567-а, 08-01-90252 Узбекистана.

имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}X_t^+$, для любых $s, t \in T, s < t$, выполняется неравенство $X_s \leq \mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ п.в. (P-почти всюду), называемое *субмартингальным* свойством. Запись $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ обозначает произвольную версию условного математического ожидания случайной величины X_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$.

Данное определение субмартингала отличается от традиционного тем, что в последнем требуется интегрируемость случайных величин $X_t, t \in T$. Чтобы различать эти две возможности, субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ называется *интегрируемым*, если $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ для любого $t \in T$. Многие свойства интегрируемых субмартингалов справедливы для субмартингалов. Например, максимум $\{X_t \vee Y_t, t \in T\}$ двух $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалов $\{X_t, t \in T\}$ и $\{Y_t, t \in T\}$ является $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом. В частности, $\{X_t \vee a, t \in T\}$ является $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом для любого вещественного числа a . Если $a < 0$, то из неравенства $|X_t \vee a| \leq X_t^+ + |a|$ следует, что $\{X_t \vee a, t \in T\}$ — интегрируемый $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингал. Здесь мы воспользовались стандартным обозначением $a \vee b$ для максимума двух вещественных чисел a и b . Ниже нам понадобится обозначение $a \wedge b$ для минимума из двух чисел a и b .

Предположим, что нам известно некоторое условие сходимости п.в. любого интегрируемого $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингала $\{X_t, t \in T\}$, когда t стремится к некоторой конечной или бесконечной величине. Согласно этому условию, субмартингал $\{X_t \vee a, t \in T\}$ сходится п.в. для любого $a < 0$. Отсюда следует, что субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ сходится п.в., когда параметр t стремится к указанной величине. Позже мы докажем это замечание и воспользуемся им.

Вопрос о сходимости п.в. обсуждается, как правило, в отношении интегрируемых субмартингалов с параметрическими множествами $T = \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $T = \{-1, -2, \dots\}$ или $T = [0, \infty)$. Разумеется, ряд более общих ситуаций можно свести к одному из перечисленных частных случаев, например, случай возрастающей последовательности $T = \{t_n\}_{n \geq 1}$ вещественных чисел сводится к случаю $T = \mathbf{N}$.

Известно несколько достаточных условий для сходимости п.в. интегрируемых субмартингалов с натуральным параметром, см., например, [1]–[4]. Наиболее удобным и по этой причине наиболее популярным является условие Дуба: если $\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, то субмартингал $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ сходится п.в. к некоторой интегрируемой случайной величине. В учебной литературе теорема Дуба доказывается с использованием неравенства Дуба для числа пересечений субмартингалом данного конечного сегмента. Теорему Дуба о сходимости субмартингала можно доказать без использования неравенства о числе пересечений. Такие доказательства можно найти в [5]–[11]. Небезынтересно отметить, что первое такое доказательство было дано самим Дж. Дубом [5]. На поиски все новых и новых доказательств старой теоремы о сходимости субмартингалов можно смотреть по-разному. Например, два известных специалиста утверждают в своей книге [12, с. 26], что эти попытки не представляют интереса, так как неравенство для числа пересечений необходимо для доказательства теоремы о сходимости субмартингалов с непрерывным параметром: «From our point of view this is of no interest, for the numbers of upcrossings are really necessary in continuous time.» К этому можно добавить, что неравенство для числа пересечений играет решающую роль при доказательстве теоремы о существовании субмартингалов с непрерывными справа траекториями. Нам кажется, что доказательства только этих двух утверждений реально нуждаются в неравенстве для числа пересечений. В предлагаемой заметке приведено достаточное условие для сходимости п.в. субмартингалов с произвольным параметрическим множеством. Оно слабее условия Дуба и его доказательство не нуждается в неравенстве для числа пересечений.

Нам понадобятся понятия марковского момента и сигма-алгебры, связанной с ним. Функция $\tau: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ называется марковским моментом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ или, более коротко, $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковским моментом, если $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Например, функция τ , тождественно равная числу $t \in T$, является марковским моментом. Обозначим $\sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$ сигма-алгебру, порожденную фильтрацией. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, связанная с марковским моментом, состоит из множеств $A \in \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$ таких, что $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Если даны субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ и марковский момент τ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, то можно определить функцию X_τ на множестве $\{\tau < \infty\}$. При желании эту функцию

можно определить на всем пространстве элементарных событий, положив, например, $X_\tau = 0$ на множестве $\{\tau = \infty\}$. Важно, чтобы функция X_τ была случайной величиной, другими словами, чтобы она была $\mathcal{F}$ -измеримой. В противном случае мы не сможем, скажем, определить интеграл от этой функции. Если марковский момент τ принимает конечное или счетное число значений, то, как нетрудно убедиться, функция X_τ является случайной величиной. Пусть наряду с τ дан еще один $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковский момент σ . Если марковские моменты τ и σ принимают конечное или счетное число значений и $\tau \leq \sigma \leq s$ для некоторого $s \in T$, то $X_\tau \leq \mathbf{E}(X_\sigma | \mathcal{F}_\tau)$ п.в. и, следовательно, $\mathbf{E}X_\tau \leq \mathbf{E}X_\sigma$. Эти неравенства нам понадобятся позже применительно к интегрируемым субмартингалам.

Теорема 1. Пусть дан субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ со счетным множеством T . Предположим, что величина $t^* = \sup\{t: t \in T\}$ является предельной точкой множества T и $t^* \notin T$. Обозначим $X = \liminf_{t \rightarrow t^*} X_t$. Если $\mathbf{E}(X_\tau^+ I[\tau < \infty]) < \infty$ для любого $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковского момента τ , то $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t = X$ п.в.

Доказательство будет дано ниже. Идея доказательства принадлежит Chow [3], который доказал эту теорему для интегрируемых субмартингалов с натуральным параметрическим множеством $T = \mathbf{N}$ и $t^* = \infty$.

Эту идею можно усмотреть также в статье Дуба [5], в которой впервые приведено упомянутое выше достаточное условие для сходимости мартингала.

Следствие 1. Пусть дан сепарабельный $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ с несчетным множеством T . Предположим, что величина $t^* = \sup\{t: t \in T\}$ является предельной точкой множества T и $t^* \notin T$. Обозначим $X = \liminf_{t \rightarrow t^*} X_t$. Если $\mathbf{E}(X_\tau^+ I[\tau < \infty])$ для любого $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковского момента τ со счетным числом значений, то $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t = X$ п.в.

Доказательство. По определению сепарабельности найдутся множество $N \in \mathcal{F}$ единичной вероятности и счетное множество $S \subset T$ такие, что

$$\liminf_{T \ni t \rightarrow t^*} X_t(\omega) = \liminf_{S \ni t \rightarrow t^*} X_t(\omega), \quad \limsup_{T \ni t \rightarrow t^*} X_t(\omega) = \limsup_{S \ni t \rightarrow t^*} X_t(\omega)$$

для любого $\omega \in N$. По теореме 1 существует предел $\lim_{S \ni t \rightarrow t^*} X_t$ п.в. и, следовательно, существует предел $\lim_{T \ni t \rightarrow t^*} X_t$ п.в. Последний предел совпадает п.в. с X . Следствие доказано.

Сравним условие из теоремы 1 с условием Дуба: $\sup_{t \in T} \mathbf{E}|X_t| < \infty$. Нам понадобится обозначение $I[A]$ для индикаторной функции множества A . Заметим, что случайный процесс $\{X_t^+, t \in T\}$ является интегрируемым $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом. Пусть τ — любой $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковский момент. Если $s, t \in T$, то $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_{\tau \wedge t}^+ &= \mathbf{E}\left(\sum_{s \in T} X_{s \wedge t}^+ I[\tau = s]\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{T \ni s \leq t} X_s^+ I[\tau = s] + X_t^+ I[\tau > t]\right) \\ &\leq \sum_{T \ni s \leq t} \mathbf{E}(X_t^+ I[\tau = s]) + \mathbf{E}(X_t^+ I[\tau > t]) = \mathbf{E}X_t^+. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau \wedge t_n}^+ I[\tau < \infty] = X_\tau^+ I[\tau < \infty]$ для любой возрастающей последовательности чисел $t_n \in T$, $n \in \mathbf{N}$, сходящейся к t^* . Отсюда и из леммы Фату следует, что

$$\mathbf{E}(X_\tau^+ I[\tau < \infty]) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_{\tau \wedge t_n}^+ I[\tau < \infty]) \leq \sup_{t \in T} \mathbf{E}X_t^+ < \infty.$$

Это означает, что условие Дуба сильнее условия из теоремы 1.

Следствие 1 содержит часто цитируемое утверждение Дуба, согласно которому непрерывный справа $\{\mathcal{F}, t \in [0, \infty)\}$ -субмартингал $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ сходится п.в. при $t \rightarrow \infty$ к некоторой интегрируемой случайной величине, если $\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}|X_t| < \infty$. Достаточно заметить, что любой непрерывный справа случайный процесс обладает свойством сепарабельности.

Доказательство теоремы 1 основано на следующем неравенстве, которое представляет собой некоторое обобщение известного максимального неравенства для интегрируемых субмартингалов.

В полной общности оно нам не потребуется. Мы воспользуемся им применительно к интегрируемому субмартингалу.

Теорема 2. Пусть дан субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ с любым множеством T . Тогда

$$\lambda P \left\{ A \cap \left\{ \sup_{t \in Q} X_t > \lambda \right\} \right\} \leq \int_{A \cap \{\sup_{t \in Q} X_t > \lambda\}} X_b dP \leq \int_A X_b^+ dP \quad (1)$$

для любых $a, b \in T, a < b, A \in \mathcal{F}_a, \lambda > 0$, для любого конечного или счетного множества $Q \subseteq T \cap [a, b]$. Если субмартингал сепарабелен, то неравенства справедливы с $Q = [a, b] \cap T$.

Доказательство. Сначала мы докажем (1) при дополнительном предположении, что $E|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$. Предположим, что Q — конечное множество. Запишем числа из Q в порядке возрастания $t_1 < \dots < t_n$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $t_1 = a$ и $t_n = b$. Пусть $\lambda > 0, B = \{\sup_{t \in Q} X_t > \lambda\}$, τ — момент первого попадания последовательности $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ в множество (λ, ∞) . Принимая во внимание, что $a \leq \tau \wedge b$ и $A \in \mathcal{F}_{\tau \wedge b}$, мы получим

$$\int_A X_b dP = \int_A E(X_b | \mathcal{F}_{\tau \wedge b}) dP \geq \int_A X_{\tau \wedge b} dP = \int_{A \cap B} X_{\tau} dP + \int_{A \cap B^c} X_b dP.$$

Отсюда и из неравенства $X_{\tau} \geq \lambda$ следует, что

$$\lambda P\{A \cap B\} \leq \int_{A \cap B} X_b dP. \quad (2)$$

Предположим, что Q — счетное множество. Его можно представить в виде объединения $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ конечных множеств, удовлетворяющих условию $Q_n \subseteq Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обратим внимание, что $B_n = \{\sup_{t \in Q_n} X_t > \lambda\} \subseteq \{\sup_{t \in Q_{n+1}} X_t > \lambda\} = B_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. С учетом этих замечаний мы получим

$$\lambda P\{A \cap B\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda P\{A \cap B_n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A \cap B_n} X_b dP = \int_{A \cap B} X_b dP.$$

Откажемся теперь от предположения, что $E|X_t| < \infty$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ случайный процесс $(-r) \vee X_t, t \in T$, является интегрируемым $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом. Заметим, что множество $\{\sup_{t \in Q} ((-r) \vee X_t) > \lambda\}$ совпадает с множеством $B = \{\sup_{t \in Q} X_t > \lambda\}$. По доказанному выше выполняется неравенство

$$\lambda P\{A \cap B\} \leq \int_{A \cap B} ((-r) \vee X_b) dP.$$

Полагая $r \rightarrow \infty$, мы придем к неравенству (2), которое совпадает с левым неравенством (1). Предельный переход под знаком интеграла возможен, так как убывающая последовательность $\{((-r) \vee X_b)_{r \geq 1}\}$ поточечно сходится к X_b и мажорируется сверху интегрируемой случайной величиной $(-1) \vee X_b$. Правое неравенство в (1) очевидно.

Последнее утверждение теоремы представляет интерес, если множество T несчетно. Если субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ сепарабелен, то найдутся множество $N \in \mathcal{F}$ единичной вероятности и счетное множество $Q \subset T$ такие, что $\sup_{t \in [a, b] \cap T} X_t(\omega) = \sup_{t \in [a, b] \cap Q} X_t(\omega)$ и $\inf_{t \in [a, b] \cap T} X_t(\omega) = \inf_{t \in [a, b] \cap Q} X_t(\omega)$ для любого $\omega \in N$. Отсюда следует, что множество Q в неравенствах (1) можно заменить множеством $[a, b] \cap T$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $E|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$. Позже мы откажемся от этого дополнительного условия. Предположим, что предел $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t$ не существует. Тогда событие $V = \{\liminf_{t \rightarrow t^*} X_t < \limsup_{t \rightarrow t^*} X_t\}$ имеет положительную вероятность. Его можно представить в виде объединения $V = \bigcup_{a, b \in Q, a < b} V_{a, b}$ событий $V_{a, b} = \{\liminf_{t \rightarrow t^*} X_t < a < b < \limsup_{t \rightarrow t^*} X_t\}$, где Q — множество рациональных чисел. Найдутся a и b из Q такие, что $P\{V_{a, b}\} = \delta > 0$. Можно считать, что $a = 0$ и $b = 1$. В противном случае вместо $\{X_t, t \in T\}$ можно взять $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингал $Y_t = (X_t - a)/(b - a), t \in T$, для которого $V_{a, b} = \{\liminf_{t \rightarrow t^*} Y_t < 0 < 1 < \limsup_{t \rightarrow t^*} Y_t\}$. Возьмем строго возрастающие последовательности чисел $n_k \in \mathbb{N}, m_k \in \mathbb{N}, n_k < m_k < n_{k+1}, t_k \in T, k \in \mathbb{N}$, и

определим множества

$$A_1 = \left\{ \max_{1 \leq j \leq n_1} X_{t_j} > 1 \right\}, \quad B_1 = A_1 \cap \left\{ \min_{n_1 < j \leq m_1} X_{t_j} < 0 \right\},$$

$$A_k = B_{k-1} \cap \left\{ \max_{m_{k-1} < j \leq n_k} X_{t_j} > 1 \right\}, \quad B_k = A_k \cap \left\{ \min_{n_k < j \leq m_k} X_{t_j} < 0 \right\}, \quad k \geq 2.$$

Мы докажем с помощью математической индукции, что числа $n_k, m_k, t_k, k \in \mathbf{N}$, можно выбрать таким образом, что будут выполняться неравенства

$$\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap A_k\} > 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta, \quad \mathbf{P}\{V_{0,1} \cap B_k\} > 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta. \quad (3)$$

Из равенства $\limsup_{t \rightarrow t^*} X_t = \lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t$ и из свойств вероятности следует, что

$$\lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \left\{ \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1 \right\}\right\} = \mathbf{P}\{V_{0,1}\}.$$

Поэтому $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap \{\sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1\}\} > 3\delta/4$ для некоторых u и $v, u < v < t^*$. Счетное множество T можно представить в виде объединения $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ конечных множеств, удовлетворяющих условию $T_n \subset T_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \left\{ \max_{t \in [u,v] \cap T_n} X_t > 1 \right\}\right\} = \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \left\{ \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1 \right\}\right\}$$

следует, что $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap \{\max_{1 \leq j \leq n_1} X_{t_j} > 1\}\} > 3\delta/4$ для некоторых чисел $t_1 < \dots < t_{n_1}$ из T . Множество $A_1 = \{\max_{1 \leq j \leq n_1} X_{t_j} > 1\}$ удовлетворяет условию (3) с $k = 1$. Аналогично, из равенства $\liminf_{t \rightarrow t^*} X_t = \lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t$ и из свойств вероятности следует, что

$$\lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap A_1 \cap \left\{ \min_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0 \right\}\right\} = \mathbf{P}\{V_{0,1} \cap A_1\}.$$

Поэтому $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap A_1 \cap \{\inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0\}\} > 3\delta/4$ для некоторых u и $v, t_{n_1} < u < v < t^*$. Из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap A_1 \cap \left\{ \min_{t \in [u,v] \cap T_n} X_t < 0 \right\}\right\} = \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap A_1 \cap \left\{ \inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0 \right\}\right\}$$

следует, что $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap A_1 \cap \{\min_{n_1 < j \leq m_1} X_{t_j} < 0\}\} > 3\delta/4$ для некоторых чисел $t_{n_1} < t_{n_1+1} < \dots < t_{m_1}$ из T . Множество $B_1 = A_1 \cap \{\min_{n_1 < j \leq m_1} X_{t_j} < 0\}$ удовлетворяет условию (3) с $k = 1$.

Предположим, что числа $n_j, m_j \in \mathbf{N}, j = 1, \dots, k$, и $t_j \in T, j = 1, \dots, m_k$, выбраны и множества $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$ удовлетворяют условию (3). Так как

$$\lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap B_k \cap \left\{ \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1 \right\}\right\} = \mathbf{P}\{V_{0,1} \cap B_k\} > 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta,$$

то $\mathbf{P}\{B_k \cap V_{0,1} \cap \{\sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1\}\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1)\delta$ для некоторых u и $v, t_{m_k} < u < v < t^*$. Из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap B_k \cap \left\{ \max_{t \in [u,v] \cap T_n} X_t > 1 \right\}\right\} = \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap B_k \cap \left\{ \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1 \right\}\right\}$$

следует, что $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap B_k \cap \{\max_{m_k < j \leq n_{k+1}} X_{t_j} > 1\}\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1)\delta$ для некоторых чисел $t_{m_k} < t_{m_k+1} < \dots < t_{n_{k+1}}$ из T . Мы видим, что множество $A_{k+1} = B_k \cap \{\max_{m_k < j \leq n_{k+1}} X_{t_j} > 1\}$ удовлетворяет условию (3) с заменой k на $k+1$. Аналогично, отправляясь от равенства

$$\lim_{u \uparrow t^*} \lim_{v \uparrow t^*} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap A_{k+1} \cap \left\{ \inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0 \right\}\right\} = \mathbf{P}\{V_{0,1} \cap A_{k+1}\},$$

мы приходим к множеству $B_{k+1} = A_{k+1} \cap \{\min_{n_{k+1} < j \leq m_{k+1}} X_{t_j} < 0\}$ со свойством $\mathbf{P}\{V_{0,1} \cap B_{k+1}\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1)\delta$ для некоторых чисел $t_{n_{k+1}} < t_{n_{k+1}+1} < \dots < t_{m_{k+1}}$ из T .

Для каждого $t \in T$ определим заряд $\mu_t\{A\} = \mathbf{E}(I[A]X_t)$, $A \in \mathcal{F}_t$. Запишем множество B_k в виде объединения $B_k = \bigcup_{j=n_{k+1}}^{m_k} B_j^{(k)}$ попарно непересекающихся

множеств, $B_{n_k+1}^{(k)} = \{X_{n_k+1} < 0\}$, $B_j^{(k)} = A_k \cap \{X_{t_j} < 0, X_{t_i} \geq 0, i = n_k + 1, \dots, j-1\}$, $j = n_k + 2, \dots, m_k$. Так как $-\infty < \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \leq 0$ для всех $j = n_k + 1, \dots, m_k$, то

$$\begin{aligned} \mu_{t_{m_k}}\{A_k \setminus B_k\} &\geq \mu_{t_{m_k}}\{A_k \setminus B_k\} + \sum_{j=n_k+1}^{m_k} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \\ &= \mu_{t_{m_k}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-1} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=n_k+1}^{m_k-1} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-1} B_j^{(k)} \in \mathcal{F}_{t_{m_k-1}}$ и $t_{m_k-1} < t_{m_k}$. По субмартингальному свойству выполняется неравенство

$$\mu_{t_{m_k}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-1} B_j^{(k)}\right\} \geq \mu_{t_{m_k-1}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-1} B_j^{(k)}\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_{t_{m_k}}\{A_k \setminus B_k\} &\geq \mu_{t_{m_k-1}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-1} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=n_k+1}^{m_k-1} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \\ &\geq \mu_{t_{m_k-2}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k-2} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=n_k+1}^{m_k-2} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \geq \dots \geq \mu_{t_{n_k}}\{A_k\}. \end{aligned}$$

По максимальному неравенству (1) мы имеем

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \mathbf{P}\left\{B_{k-1} \cap \left\{\max_{m_{k-1} < j \leq n_k} X_{t_j} > 1\right\}\right\} \leq \mu_{t_{n_k}}\{A_k\}$$

и, следовательно, $\mu_{t_{m_k}}\{A_k \setminus B_k\} \geq \mathbf{P}\{A_k\} \geq 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta$. Обратим внимание, что $A_k \in \mathcal{F}_{t_{n_k}}$, $B_k \in \mathcal{F}_{t_{m_k}}$ и множества $A_k \setminus B_k$, $k \in \mathbf{N}$, попарно не пересекаются. Определим функцию $\tau: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$, положив $\tau = t_{m_k}$ на $A_k \setminus B_k$ и $\tau = \infty$ на $(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus B_k))^c$. Так как $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{t_{m_k} \leq t} \{\tau = t_{m_k}\} = \bigcup_{t_{m_k} \leq t} (A_k \setminus B_k) \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$, то τ является $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -марковским моментом. Этот марковский момент не удовлетворяет условию теоремы, так как

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau < \infty\}} X_{\tau}^{+} d\mathbf{P} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k \setminus B_k} X_{t_{m_k}}^{+} d\mathbf{P} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k \setminus B_k} X_{t_{m_k}} d\mathbf{P} \\ &= \mu_{t_{m_k}}\{A_k \setminus B_k\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta = \infty. \end{aligned}$$

Мы пришли к противоречию, и, следовательно, предел $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t$ п.в. существует. Он совпадает п.в. с $X = \liminf_{t \rightarrow t^*} X_t$.

Откажемся от дополнительного условия, что $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$. Заметим, что оно использовалось выше при утверждении, что $-\infty < \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \leq 0$ для $j = n_k + 1, \dots, m_k$. Случайный процесс $\{a \vee X_t, t \in T\}$ является интегрируемым $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом для любого $a < 0$. По доказанному выше существует предел $\lim_{t \rightarrow t^*} (a \vee X_t(\omega))$ для всех ω из некоторого множества $\Omega_a \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Обозначим Q' множество отрицательных рациональных чисел и $\Omega' = \bigcap_{a \in Q'} \Omega_a$. Заметим, что $\mathbf{P}\{\Omega'\} = 1$. Для любых $\omega \in \Omega'$ и $a \in Q'$ существует предел $\lim_{t \rightarrow t^*} (a \vee X_t(\omega))$, и, следовательно, для любого $\omega \in \Omega'$ существует предел $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t(\omega)$. Тем самым доказано, что $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t = X$ п.в.

Докажем, что предел $\lim_{t \rightarrow t^*} X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega'$, действительно существует. Если этот предел не существует для некоторого $\omega \in \Omega'$, то найдется возрастающая последовательность чисел $t_n \in T$, $n \in \mathbf{N}$, которая сходится к t^* , и $A = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_{2n}}(\omega) < \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_{2n+1}}(\omega) = B$. Если $A < 0$, то $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \vee X_{t_{2n}}(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \vee X_{t_{2n+1}}(\omega)) = B$ для любого $a \in (A, B) \cap Q'$, чего не может быть. Если $A \geq 0$, то

$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (b \vee X_{t_{2n}}(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b \vee X_{t_{2n+1}}(\omega)) = B$ для любого $b \in Q'$, что противоречит предполагаемому неравенству $A < B$. Теорема доказана.

Следующая теорема и ее следствие известны [1, с. 321]. Новым здесь является метод доказательства, а именно, не используется традиционный прием с использованием неравенства Дуба о числе пересечений субмартигала данного конечного сегмента.

Теорема 3. Пусть дан субмартигала $\{X_t, t \in T\}$ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ со счетным множеством T . Предположим, что величина $t_* = \inf\{t: t \in T\}$ является предельной точкой множества T и $t_* \notin T$. Обозначим $X = \liminf_{t \rightarrow t_*} X_t$. Тогда $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t = X$ п.в.

Доказательство. Доказательство в определенном отношении похоже на доказательство теоремы 1. Предположим дополнительно, что $E|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$. Позже мы откажемся от этого условия. Предположим, что предел $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t$ не существует. Тогда найдутся числа a и b , $a < b$, такие, что $P\{V_{a,b}\} = \delta > 0$, где $V_{a,b} = \{\liminf_{t \rightarrow t_*} X_t < a < b < \limsup_{t \rightarrow t_*} X_t\}$. Можно считать, что $a = 0$ и $b = 1$. Возьмем строго возрастающие последовательности $\{m_k\}_{k \geq 1}$ и $\{n_k\}_{k \geq 1}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условию $m_0 = 1 < n_k < m_k < n_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а также строго убывающую последовательность $\{t_k\}_{k \geq 1}$ чисел из T и определим множества $A_{n_k, m_k} = \{\max_{n_k \leq j < m_k} X_{t_j} > 1\}$ и $B_{m_k-1, n_k} = \{\min_{m_{k-1} \leq j < n_k} X_{t_j} < 0\}$. Мы докажем с помощью математической индукции, что числа n_k, m_k, t_k можно выбрать таким образом, что будет выполняться неравенство

$$P\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j})\right\} > 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta. \quad (4)$$

Из равенства $\liminf_{t \rightarrow t_*} X_t = \lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} \inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t$ и из свойств вероятности следует, что

$$\lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} P\left\{V_{0,1} \cap \left\{\inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0\right\}\right\} = P\{V_{0,1}\}.$$

Поэтому $P\{V_{0,1} \cap \{\inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0\}\} > 3\delta/4$ для некоторых u и v , $t_* < u < v$. Счетное множество T можно представить в виде объединения $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ конечных множеств, удовлетворяющих условию $T_n \subset T_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{V_{0,1} \cap \left\{\min_{t \in [u,v] \cap T_n} X_t < 0\right\}\right\} = P\left\{V_{0,1} \cap \left\{\inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0\right\}\right\}$$

следует, что $P\{V_{0,1} \cap \{\min_{1 \leq j < n_1} X_{t_j} < 0\}\} > 3\delta/4$ для некоторых чисел $t_1 > \dots > t_{n_1}$ из T . Требуемое множество $B_{m_0, n_1} = \{\min_{m_0 \leq j < n_1} X_{t_j} < 0\}$ построено. Из равенства $\limsup_{t \rightarrow t_*} X_t = \lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} \sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t$ и из свойств вероятности следует, что

$$\lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} P\left\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1} \cap \left\{\sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1\right\}\right\} = P\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1}\}.$$

Поэтому $P\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1} \cap \{\sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1\}\} > 3\delta/4$ для некоторых u и v , $t_* < u < v < t_{n_1}$. Из равенства

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1} \cap \left\{\max_{t \in [u,v] \cap T_n} X_t > 1\right\}\right\} \\ &= P\left\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1} \cap \left\{\sup_{t \in [u,v] \cap T} X_t > 1\right\}\right\} \end{aligned}$$

следует, что $P\{V_{0,1} \cap B_{m_0, n_1} \cap \{\max_{n_1 \leq j < m_1} X_{t_j} > 1\}\} > 3\delta/4$ для некоторых чисел $t_{n_1} > \dots > t_{m_1}$ из T . Требуемое множество $A_{n_1, m_1} = \{\max_{n_1 \leq j < m_1} X_{t_j} > 1\}$ построено. Заметим, что множества A_{n_1, m_1} и B_{m_0, n_1} удовлетворяют условию (4) с $k = 1$.

Предположим, что числа $n_j, m_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, k, t_j, j = 1, \dots, m_k$, выбраны и множества $A_{n_j, m_j}, B_{m_{j-1}, n_j}, j = 1, \dots, k$, удовлетворяют условию (4). Из соотношений

$$\begin{aligned} & \lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} P\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap \left\{\inf_{t \in [u,v] \cap T} X_t < 0\right\}\right\} \\ &= P\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j})\right\} > 2^{-(k+1)}(2^k + 1)\delta \end{aligned}$$

следует, что

$$\mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap \left\{ \inf_{t \in [u, v] \cap T} X_t < 0 \right\}\right\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1) \delta$$

для некоторых $u, v, t_* < u < v < t_{m_k}$. Отсюда и из равенства

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap \left\{ \min_{t \in [u, v] \cap T_n} X_t < 0 \right\}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap \left\{ \inf_{t \in [u, v] \cap T} X_t < 0 \right\}\right\} \end{aligned}$$

следует, что

$$\mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap \left\{ \min_{m_k \leq j < n_{k+1}} X_{t_j} < 0 \right\}\right\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1) \delta$$

для некоторых чисел $t_{m_k} > \dots > t_{n_{k+1}}$ из T . Требуемое множество $B_{m_k, n_{k+1}} = \{\min_{m_k \leq j < n_{k+1}} X_{t_j} < 0\}$ построено. Аналогично, отправляясь от соотношений

$$\begin{aligned} & \lim_{v \downarrow t_*} \lim_{u \uparrow t_*} \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap B_{m_k, n_{k+1}} \cap \left\{ \sup_{t \in [u, v] \cap T} X_t > 1 \right\}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V_{0,1} \cap \bigcap_{j=1}^k (A_{n_j, m_j} \cap B_{m_{j-1}, n_j}) \cap B_{m_k, n_{k+1}}\right\} > 2^{-(k+2)}(2^{k+1} + 1) \delta, \end{aligned}$$

можно выбрать числа $t_{n_{k+1}} > \dots > t_{m_{k+1}}$ из T так, что множество $A_{n_{k+1}, m_{k+1}} = \{\max_{n_{k+1} \leq j < m_{k+1}} X_{t_j} > 1\}$ будет удовлетворять условию (4) с заменой k на $k+1$.

Для каждого $r \in \mathbb{N}$ мы определим множества

$$\begin{aligned} A_r &= A_{n_r, m_r}, \quad B_r = A_r \cap B_{m_{r-1}, n_r}, \\ A_k &= B_{k+1} \cap A_{n_k, m_k}, \quad B_k = A_k \cap B_{m_{k-1}, n_k}, \quad k = 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Из определения A_k и B_k и из неравенства (4) следует, что $\mathbf{P}\{A_k\} \geq 2^{-(k+1)}(2^k + 1) \delta$ и $\mathbf{P}\{B_k\} \geq 2^{-(k+1)}(2^k + 1) \delta$. Обратим внимание, что $B_k \subset A_k \subset B_{k+1}$ и множества $A_k \setminus B_k$, $k = 1, \dots, r$, попарно не пересекаются. Запишем множество B_k в виде объединения $B_k = \bigcup_{j=m_{k-1}}^{n_k-1} B_j^{(k)}$ попарно непересекающихся множеств $B_{m_{k-1}}^{(k)} = A_k \cap \{X_{t_{m_{k-1}}} < 0\}$, $B_j^{(k)} = A_k \cap \{X_{t_j} < 0, X_i \geq 0, i = m_{k-1}, \dots, j-1\}$, $j = m_{k-1}+1, \dots, n_k-1$. Для любого $t \in T$ определим заряд $\mu_t\{A\} = \mathbf{E}(I[A]X_t)$, $A \in \mathcal{F}_t$. Так как $-\infty < \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \leq 0$ для всех $j = m_{k-1}, \dots, n_k-1$, то

$$\begin{aligned} \mu_{t_{m_{k-1}}}\{A_k \setminus B_k\} &\geq \mu_{t_{m_{k-1}}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}}^{n_k-1} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=m_{k-1}}^{n_k-1} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\} \\ &= \mu_{t_{m_{k-1}}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} B_j^{(k)} \in \mathcal{F}_{t_{m_{k-1}+1}}$ и $t_{m_{k-1}+1} < t_{m_{k-1}}$. По субмартингальному свойству выполняется неравенство

$$\mu_{t_{m_{k-1}}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} B_j^{(k)}\right\} \geq \mu_{t_{m_{k-1}+1}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} B_j^{(k)}\right\}$$

и, следовательно,

$$\mu_{t_{m_{k-1}}}\{A_k \setminus B_k\} \geq \mu_{t_{m_{k-1}+1}}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} B_j^{(k)}\right\} + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{n_k-1} \mu_{t_j}\{B_j^{(k)}\}$$

$$\begin{aligned} &\geq \mu_{t_{m_{k-1}+2}} \left\{ A_k \setminus \bigcup_{j=m_{k-1}+2}^{n_k-1} B_j^{(k)} \right\} + \sum_{j=m_{k-1}+2}^{n_k-1} \mu_{t_j} \{ B_j^{(k)} \} \\ &\geq \dots \geq \mu_{t_{n_k}} \{ A_k \}. \end{aligned}$$

Отсюда и из максимального неравенства (1) следует, что

$$\mu_{t_{m_{k-1}}} \{ A_k \setminus B_k \} \geq \mu_{t_{n_k}} \{ A_k \} \geq \mathbf{P} \{ A_k \} \geq 2^{-(k+1)} (2^k + 1) \delta.$$

Случайный процесс $\{X_t^+, t \in T\}$ является $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом. В силу предыдущего неравенства мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} X_{t_{m_0}}^+ &\geq \sum_{k=1}^r \int_{A_k \setminus B_k} X_{t_{m_0}}^+ d\mathbf{P} \geq \sum_{k=1}^r \int_{A_k \setminus B_k} X_{t_{m_{k-1}}}^+ d\mathbf{P} \\ &\geq \sum_{k=1}^r \mu_{t_{m_{k-1}}} \{ A_k \setminus B_k \} \geq \sum_{k=1}^r \mathbf{P} \{ A_k \} \geq \sum_{k=1}^r 2^{-(k+1)} (2^k + 1) \delta. \end{aligned}$$

При достаточно больших r величина справа превзойдет $\mathbf{E} X_{t_{m_0}}^+$. Мы пришли к противоречию, и, следовательно, предел $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t$ существует п.в. В качестве предела можно взять $X = \liminf_{t \rightarrow t_*} X_t$. Теорема доказана при дополнительном условии, что $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$. Откажемся от этого условия.

Для любого $a < 0$ случайный процесс $\{a \vee X_t, t \in T\}$ является интегрируемым $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ -субмартингалом. По доказанному выше существует предел $\lim_{t \rightarrow t_*} (X_t(\omega) \vee a)$ для всех ω из некоторого множества $\Omega_a \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}\{\Omega_a\} = 1$. Далее можно рассуждать, как в конце доказательства теоремы 1, чтобы убедиться, что существует предел $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t$ п.в. Этот предел п.в. совпадает с $X = \liminf_{t \rightarrow t_*} X_t$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть дан сепарабельный субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ с несчетным множеством T . Предположим, что величина $t_* = \inf\{t: t \in T\}$ является предельной точкой множества T и $t_* \notin T$. Тогда $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t = X$ п.в., где $X = \liminf_{t \rightarrow t_*} X_t$. Если $\inf_{t \in T} \mathbf{E} X_t > -\infty$, то $X = \lim_{t \rightarrow t_*} X_t$ п.в., $\mathbf{E}|X| < \infty$ и $\lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{E}|X_t - X| = 0$.

Доказательство. Равенство $\lim_{t \rightarrow t_*} X_t = X$ п.в. следует из теоремы 3. Если выполнено условие $\inf_{t \in T} \mathbf{E} X_t > -\infty$, то $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ для любого $t \in T$ и $\mathbf{E}|X| < \infty$. Предположим, что утверждение $\lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{E}|X_t - X| \neq 0$ не имеет места. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|X_{t_n} - X| > 0$ для некоторой убывающей последовательности $t_n \in T$, $n \in \mathbf{N}$, сходящейся к t_* . С помощью известных рассуждений можно убедиться, что последовательность $\{X_{t_n}\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|X_{t_n} - X| = 0$. Мы пришли к противоречию. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
2. Snell J. L. Applications of martingale system theorems. — Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 73, p. 293–312.
3. Chow Y. S. Convergence theorem of martingales. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1963, v. 1, p. 340–346.
4. Chazan D. A note on convergence of sub-martingales. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 1811–1814.
5. Doob J. L. Regularity properties of certain families of chance variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1940, v. 47, p. 455–486.
6. Sudderth W. D. A «Fatou equation» for randomly stopped variables. Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, № 6, p. 2143–2146.
7. Chacon R. V. A «stopped» proof of convergence. — Adv. in Math., 1974, v. 14, p. 365–368.

8. Isaac R. A. A proof of the martingale convergence theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1965, v. 16, p. 842–844.
9. Lamb C. W. A short proof of the martingale convergence theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v. 38, p. 215–217.
10. Kruglov V. M. On the Kolmogorov theorem. — J. Math. Sci., 2001, v. 106, № 2, p. 2830–2834.
11. Круглов В. М. Комментарии к теоремам о сходимости субмартингалов. — Труды конференции, посвященной 10-летию РФФИ. Математика, Механика, Информатика. 2005, с. 210–227.
12. Dellacherie C., Meyer P.-A. Probabilities and Potential B: Theory of Martingales. Amsterdam: North Holland, 1978, 463 p.

Поступила в редакцию
10.I.2008

© 2008 г.

ОСМОЛОВСКИЙ И. Ю.*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЁВА–ЭРМИТА

Исследованы некоторые свойства многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита. Доказано, что они являются многочленами Аппеля (при соответствующем обобщении этого понятия). Получены также рекуррентные формулы для многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита.

Ключевые слова и фразы: многочлены Чебышёва–Эрмита, полилинейные функционалы, асимптотические разложения, центральная предельная теорема, многомерные распределения, рекуррентность.

Мы будем рассматривать обобщения многочленов Чебышёва–Эрмита на многомерный случай, предложенные в [1]. Обозначим E^k евклидово пространство размерности k , $\varphi(x)$ — плотность нормального закона с нулевым средним и единичной матрицей ковариации в E^k , $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в E^k , $|\cdot|$ — норму в E^k , α_m — m -й момент одномерного стандартного нормального распределения. В [1] вводятся частичные и полные многочлены Чебышёва–Эрмита. Сначала рассмотрим частичные многочлены Чебышёва–Эрмита. Это множество многочленов представляет собой последовательность серий, состоящих из счетного числа элементов. Первый элемент каждой серии является функцией на E^k , второй элемент каждой серии — линейный функционал, третий элемент — билинейный функционал и т.д. Эти многочлены можно свести в таблицу

$$\begin{array}{ccccccccc} H_0^{(0)}, & H_1^{(0)}, & H_2^{(0)}, & H_3^{(0)}, & H_4^{(0)}, & H_5^{(0)}, & \dots \\ & & H_0^{(2)}, & H_1^{(2)}, & H_2^{(2)}, & H_3^{(2)}, & \dots \\ & & & & H_0^{(4)}, & H_1^{(4)}, & \dots \end{array}$$

Первый элемент первой серии — функция на E^k , тождественно равная 1, второй элемент первой серии — линейный функционал $(x, \cdot)$, третий элемент этой серии — билинейный функционал $(x, \cdot)(x, \cdot) - (\cdot, \cdot)$, $x \in E^k$, и т.д. Многочлены Чебышёва–Эрмита из первой серии, точнее, действие многочленов $H_l^{(0)}(x)$ на векторы $h_1, \dots, h_l \in E^k$, можно получить по формуле

$$H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) = (-1)^l \frac{(\varphi(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l)}{\varphi(x)}$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: igosm@mail.ru