Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Осмоловский, О некоторых свойствах многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 373–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:25:01

8. Isaac R. A. A proof of the martingale convergence theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1965, v. 16, p. 842–844.
9. Lamb C. W. A short proof of the martingale convergence theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v. 38, p. 215–217.
10. Kruglov V. M. On the Kolmogorov theorem. — J. Math. Sci., 2001, v. 106, № 2, p. 2830–2834.
11. Круглов В. М. Комментарии к теоремам о сходимости субмартингалов. — Труды конференции, посвященной 10-летию РФФИ. Математика, Механика, Информатика. 2005, с. 210–227.
12. Dellacherie C., Meyer P.-A. Probabilities and Potential B: Theory of Martingales. Amsterdam: North Holland, 1978, 463 p.

Поступила в редакцию
10.I.2008

© 2008 г.

ОСМОЛОВСКИЙ И. Ю.*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЁВА–ЭРМИТА

Исследованы некоторые свойства многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита. Доказано, что они являются многочленами Аппеля (при соответствующем обобщении этого понятия). Получены также рекуррентные формулы для многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита.

Ключевые слова и фразы: многочлены Чебышёва–Эрмита, полилинейные функционалы, асимптотические разложения, центральная предельная теорема, многомерные распределения, рекуррентность.

Мы будем рассматривать обобщения многочленов Чебышёва–Эрмита на многомерный случай, предложенные в [1]. Обозначим E^k евклидово пространство размерности k , $\varphi(x)$ — плотность нормального закона с нулевым средним и единичной матрицей ковариации в E^k , $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в E^k , $|\cdot|$ — норму в E^k , α_m — m -й момент одномерного стандартного нормального распределения. В [1] вводятся частичные и полные многочлены Чебышёва–Эрмита. Сначала рассмотрим частичные многочлены Чебышёва–Эрмита. Это множество многочленов представляет собой последовательность серий, состоящих из счетного числа элементов. Первый элемент каждой серии является функцией на E^k , второй элемент каждой серии — линейный функционал, третий элемент — билинейный функционал и т.д. Эти многочлены можно свести в таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^{(0)}, & H_1^{(0)}, & H_2^{(0)}, & H_3^{(0)}, & H_4^{(0)}, & H_5^{(0)}, & \dots \\ & & H_0^{(2)}, & H_1^{(2)}, & H_2^{(2)}, & H_3^{(2)}, & \dots \\ & & & & H_0^{(4)}, & H_1^{(4)}, & \dots \end{array}$$

Первый элемент первой серии — функция на E^k , тождественно равная 1, второй элемент первой серии — линейный функционал $(x, \cdot)$, третий элемент этой серии — билинейный функционал $(x, \cdot)(x, \cdot) - (\cdot, \cdot)$, $x \in E^k$, и т.д. Многочлены Чебышёва–Эрмита из первой серии, точнее, действие многочленов $H_l^{(0)}(x)$ на векторы $h_1, \dots, h_l \in E^k$, можно получить по формуле

$$H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) = (-1)^l \frac{(\varphi(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l)}{\varphi(x)}$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: igosm@mail.ru

(производная понимается в смысле Фреше, см., например, [2]), которая аналогична равенству $H_l(x) = (-1)^l(\varphi(x))^{(l)}/\varphi(x)$, справедливому в одномерном случае. Эти многочлены Чебышёва–Эрмита можно получить с помощью формулы обращения для преобразования Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} dt = \varphi(x),$$

где $e^{-|t|^2/2}$ — характеристическая функция плотности $\varphi(x)$. Дифференцирование этого равенства l раз приводит к равенству

$$\frac{i^l}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \cdots (t, h_l) dt = (-1)^l (\varphi(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l),$$

откуда следует формула обращения

$$\frac{i^l}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \cdots (t, h_l) dt = H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) \varphi(x).$$

Аналогично, для любого j мы можем получать многочлен $H_l^{(2j)}(x)$, $l \geq 1$, по формуле

$$\begin{aligned} H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) \varphi(x) &= \frac{i^{2j+l}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, t)^j (t, h_1) \cdots (t, h_l) dt \\ &= (-1)^l (H_0^{(2j)}(x) \varphi(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее мы обозначаем $u^{(l)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ действие l -линейного функционала $u^{(l)}(x)$, являющегося l -й производной по Фреше достаточно гладкой функции $u(x)$, $x \in E^k$, на векторы $h_1, \dots, h_l \in E^k$. Величина $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ представляет собой действие l -линейного функционала $H_l^{(2j)}(x)$ на векторы $h_1, \dots, h_l \in E^k$. В одномерном случае $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ совпадает с произведением многочлена Чебышёва–Эрмита $H_{l+2j}(x)$ и $h_1 \cdots h_l$.

Выпишем несколько частных многочленов Чебышёва–Эрмита в явном виде:

$$\begin{aligned} H_0^{(0)}(x) &\equiv 1, \quad H_1^{(0)}(x)(h_1) = (x, h_1), \\ H_2^{(0)}(x)(h_1, h_2) &= (x, h_1)(x, h_2) - (h_1, h_2), \\ H_3^{(0)}(x)(h_1, h_2, h_3) &= (x, h_1)(x, h_2)(x, h_3) - (x, h_1)(h_2, h_3) \\ &\quad - (x, h_2)(h_1, h_3) - (x, h_3)(h_1, h_2), \\ H_0^{(2)}(x) &= (x, x) - k, \\ H_1^{(2)}(x)(h_1) &= ((x, x) - k)(x, h_1) - 2(x, h_1), \\ H_2^{(2)}(x)(h_1, h_2) &= ((x, x) - k)[(x, h_1)(x, h_2) - (h_1, h_2)] - 4(x, h_1)(x, h_2) + 2(h_1, h_2), \\ H_0^{(4)}(x) &= (x, x)^2 - 2(k+2)(x, x) + k(k+2). \end{aligned}$$

Многочлены $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ являются симметрическими функциями переменных $h_1, \dots, h_l \in E^k$, поэтому мы будем иногда записывать их в виде $H_l^{(2j)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\})$, где $\{h_1, \dots, h_l\}$ означает множество, состоящее из элементов $h_1, \dots, h_l$. При $j = 0$ справедлива рекуррентная формула

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= (x, h_{l+1}) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\ &\quad - \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(0)}(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}). \end{aligned} \quad (2)$$

В одномерном случае многочлены Чебышёва–Эрмита являются многочленами Алпеля, т.е. для них справедливо равенство

$$H_l'(x) = l H_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots$$

Аналог этого свойства для многочленов $H_l^{(0)}(x)$ имеет вид

$$(H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) = \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}).$$

Справедливо следующее равенство:

$$(H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) = (x, h_{l+1}) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) - H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}). \quad (3)$$

При помощи частичных многочленов Чебышёва–Эрмита можно определить многочлены $HH_l(x, u)$, $x, u \in E^k$:

$$\frac{HH_l(x, u)}{l!} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^l}{2^j j!} \frac{H_{l-2j}^{(2j)}(x)(\overbrace{u, \dots, u}^{l-2j})}{(l-2j)!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

которые мы будем называть полными многочленами Чебышёва–Эрмита. Отметим, что в одномерном случае

$$HH_l(x, u) = H_l(x) H_l(u),$$

т.е. для $k = 1$ полные многочлены Чебышёва–Эрмита $HH_l(x, u)$ распадаются в произведения многочленов Чебышёва–Эрмита $H_l(x)$ и $H_l(u)$. С помощью этих многочленов получаются аналоги разложения Чебышёва для плотности $p(x)$ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в E^k :

$$p(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\theta H_l(x; p)}{l!} \varphi(x),$$

где $\theta H_l(x; p) = \int_{E^k} HH_l(x, u) p(u) du$. Подробнее об этом см. [1].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить рекуррентную формулу и найти аналог свойства (3) для частичных многочленов Чебышёва–Эрмита в многомерном случае для произвольного $j = 1, 2, \dots$.

Выпишем еще одно равенство, установленное в работе [1], которым мы воспользуемся впоследствии. Если в выражении (1) положить $j = 0$ и $h_{l-2m+1} = \dots = h_l = u$, где m — целое число и $1 \leq m \leq [l/2]$, затем умножить это равенство на $\varphi(u)$ и проинтегрировать его по $u \in E^k$, то получим равенство

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} \frac{i^l}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t, x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_{l-2m}) (t, t)^m dt \\ = \varphi(x) \int_{E^k} H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2m}, u, \dots, u) \varphi(u) du, \end{aligned}$$

где $\alpha_{2m} = (2m-1)!!$ — момент порядка $2m$ одномерного стандартного нормального закона. Отсюда следует, что для $j = 0, 1, 2, \dots, [l/2]$

$$\alpha_{2j} H_{l-2j}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2j}) = \int_{E^k} H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2j}, u, \dots, u) \varphi(u) du \quad (4)$$

(как обычно, мы полагаем $\alpha_0 = 1$).

Теперь приступим к изложению результатов.

Сначала выпишем три очевидных равенства

$$(2j-1)! = 2^{j-1}(j-1)!(2j-1)!!, \quad \frac{(2j-1)!!}{(2j)!} = \frac{1}{2^j j!}, \quad \frac{(2j+1)!!}{(2j+1)!} = \frac{1}{2^j j!}. \quad (5)$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Для любых $k \geq 1$ и $s \geq 1$ справедливо равенство

$$\int_{E^k} (h, u)(t, u)^{2s-1} \varphi(u) du = \alpha_{2s}(t, h)(t, t)^{s-1}. \quad (6)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (6):

$$\begin{aligned} & \int_{E^k} (h, u)(t, u)^{2s-1} \varphi(u) du \\ &= \int_{E^k} \sum_{r=1}^k h_r u_r \sum_{s_1+\dots+s_k=2s-1} \frac{(2s-1)!}{s_1! \dots s_k!} (t_1 u_1)^{s_1} \dots (t_k u_k)^{s_k} \varphi(u_1) \dots \varphi(u_k) du_1 \dots du_k \\ &= \int_{E^k} \sum_{r=1}^k h_r u_r \sum_{s_1+\dots+s_k=2s-1} \frac{(2s-1)!}{s_1! \dots s_k!} t_1^{s_1} u_1^{s_1} \dots t_k^{s_k} u_k^{s_k} \varphi(u_1) \dots \varphi(u_k) du_1 \dots du_k \\ &= \int_{E^k} \sum_{r=1}^k h_r \sum_{s_1+\dots+s_k=2s-1} \frac{(2s-1)!}{s_1! \dots s_k!} t_1^{s_1} u_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} u_r^{s_r+1} \dots t_k^{s_k} u_k^{s_k} \\ & \quad \times \varphi(u_1) \dots \varphi(u_k) du_1 \dots du_k. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_{2m+1} = 0$ для любого $m = 0, 1, 2, \dots$, то во второй сумме останутся только слагаемые с нечетным s_r и четными s_q , $q = 1, \dots, k$, $q \neq r$, и последний интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_{E^k} \sum_{r=1}^k h_r \sum_S \frac{(2s-1)!}{(2l_1)! \dots (2l_r+1)! \dots (2l_k)!} t_1^{2l_1} u_1^{2l_1} \dots t_r^{2l_r+1} u_r^{2l_r+2} \dots t_k^{2l_k} u_k^{2l_k} \varphi(u) du \\ &= \sum_{r=1}^k h_r \sum_S \frac{(2s-1)!}{(2l_1)! \dots (2l_r+1)! \dots (2l_k)!} t_1^{2l_1} \alpha_{2l_1} \dots t_r^{2l_r+1} \alpha_{2l_r+2} \dots t_k^{2l_k} \alpha_{2l_k} \\ &= \sum_{r=1}^k h_r t_r \sum_S (2s-1)! \frac{(2l_1-1)!!}{(2l_1)!} \dots \frac{(2l_r+1)!!}{(2l_r+1)!} \dots \frac{(2l_k-1)!!}{(2l_k)!} t_1^{2l_1} \dots t_r^{2l_r} \dots t_k^{2l_k}, \end{aligned}$$

где $S = \{l_1, \dots, l_r, \dots, l_k: 2l_1 + \dots + (2l_r+1) + \dots + 2l_k = 2s-1\}$. Используя равенства (5) и то, что $l_1 + \dots + l_k = s-1$, мы видим, что последнее выражение равно

$$\begin{aligned} & (2s-1)!! \sum_{r=1}^k h_r t_r \sum_S \frac{2^{s-1}(s-1)!}{2^{s-1}l_1! \dots l_r! \dots l_k!} t_1^{2l_1} \dots t_r^{2l_r} \dots t_k^{2l_k} \\ &= \alpha_{2s} \sum_{r=1}^k h_r t_r \sum_{l_1+\dots+l_r+\dots+l_k=s-1} \frac{(s-1)!}{l_1! \dots l_r! \dots l_k!} t_1^{2l_1} \dots t_r^{2l_r} \dots t_k^{2l_k} = \alpha_{2s}(t, h)(t, t)^{s-1}. \end{aligned}$$

На этом доказательство леммы закончено.

Лемма 2. Для любых $k \geq 1$, $j \geq 1$ и $l \geq 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{E^k} (h_{l+1}, u) H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-1}) \varphi(u) du \\ &= (2j-1) \int_{E^k} H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-2}) \varphi(u) du. \end{aligned} \quad (7)$$

(При $l = 0$ полагаем $H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, u, \dots, u) = H_{2j-1}^{(0)}(x)(u, \dots, u)$.)

Доказательство. Преобразуем левую и правую части равенства (7). Для этого используем выражение многочленов Чебышёва–Эрмита через обратное преобразование Фурье (1). Левую часть (7) можно записать в виде

$$\int_{E^k} (h_{l+1}, u) \left[\frac{i^{2j+l-1}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_l) (t, u)^{2j-1} dt \right] \varphi(u) du.$$

Изменяя порядок интегрирования (что, очевидно, допустимо), получаем величину

$$\frac{i^{2j+l-1}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_l) \left[\int_{E^k} (h_{l+1}, u) (t, u)^{2j-1} \varphi(u) du \right] dt. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим правую часть (7). Учитывая, что $\int_{E^k} (t, u)^{2k} \varphi(u) du = \alpha_{2k}(t, t)^k$, получаем

$$\begin{aligned} & (2j-1) \int_{E^k} H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, u, \dots, u) \varphi(u) du \\ &= (2j-1) \int_{E^k} \left[\frac{i^{2j+l-1}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2}(t, h_1) \dots (t, h_{l+1})(t, u)^{2j-2} dt \right] \varphi(u) du \\ &= (2j-1) \frac{i^{2j+l-1}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2}(t, h_1) \dots (t, h_{l+1}) \left[\int_{E^k} (t, u)^{2j-2} \varphi(u) du \right] dt \\ &= \frac{i^{2j+l-1}}{(2\pi)^k} \int_{E^k} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2}(t, h_1) \dots (t, h_l) [\alpha_{2j}(t, h_{l+1})(t, t)^{j-1}] dt. \end{aligned}$$

Сравнив последнее выражение с выражением (8), видим, что утверждение леммы 2 справедливо, если выполнено равенство

$$\int_{E^k} (h_{l+1}, u)(t, u)^{2j-1} \varphi(u) du = \alpha_{2j}(t, h_{l+1})(t, t)^{j-1},$$

что верно в силу леммы 1. Доказательство леммы 2 закончено.

Покажем аналог равенства (3).

Теорема 1. Для любых $j = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (H_l^{(2j)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\}))'_x(h_{l+1}) &= \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(2j)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}) \\ &\quad + 2j H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(\{h_1, \dots, h_{l+1}\}). \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Почти очевидно, что равенство (3) останется верным, если в нем многочлены $H_l^{(0)}(x)$ заменить на многочлены $H_l^{(2j)}(x)$ для любого $j = 1, 2, \dots$. Действительно, для этого достаточно разделить (1) на $\varphi(x)$ и продифференцировать полученное равенство по x . Так как $(1/\varphi(x))'(h) = (x, h)/\varphi(x)$ и $(x, h) = H_1^{(0)}(x)(h)$, то мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} (H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) &= -H_{l+1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) \\ &\quad + H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) H_1^{(0)}(x)(h_{l+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} & -H_{l+1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) + H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) H_1^{(0)}(x)(h_{l+1}) \\ &= \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(2j)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}) + 2j H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(\{h_1, \dots, h_{l+1}\}). \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем каждый из многочленов в (11) с помощью формулы (4):

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} H_{2j+l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, \overbrace{u, \dots, u}^{2j}) \varphi(u) du, \\ H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) &= \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} H_{2j+l}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j}) \varphi(u) du, \\ H_{l-1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l-1}) &= \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l-1}, \overbrace{u, \dots, u}^{2j}) \varphi(u) du, \\ H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= \frac{1}{\alpha_{2j-2}} \int_{E^k} H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-2}) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Тогда (с учетом того, что $2j/\alpha_{2j-2} = 2j(2j-1)/\alpha_{2j}$) равенство (11), которое нам необходимо доказать, примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} H_{2j+l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, u, \dots, u) \varphi(u) du \\ & + \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} (x, h_{l+1}) H_{2j+l}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, u, \dots, u) \varphi(u) du \\ & = \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j} \setminus \{h_r\}\}) \varphi(u) du \\ & + 2j(2j-1) \frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-2}) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое по лемме 2 равно

$$\frac{1}{\alpha_{2j}} \int_{E^k} 2j(h_{l+1}, u) H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-1}) \varphi(u) du.$$

Теперь осталось показать, что

$$\begin{aligned} & \int_{E^k} H_{2j+l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}, u, \dots, u) \varphi(u) du \\ & = \int_{E^k} (x, h_{l+1}) H_{2j+l}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, u, \dots, u) \varphi(u) du \\ & - \int_{E^k} \left(\sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j} \setminus \{h_r\}\}) \right) \varphi(u) du \\ & + \int_{E^k} (2j(h_{l+1}, u) H_{2j+l-1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l, \overbrace{u, \dots, u}^{2j-1})) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Но это равенство верно, так как это не что иное, как домноженная на $\varphi(u)$ и проинтегрированная рекуррентная формула (2), в которой $2j$ переменных $h_{l+2}, \dots, h_{l+2j+1}$ заменены на u . Доказательство теоремы 1 закончено.

Из равенства (10) сразу получаем следующий результат.

Теорема 2 (рекуррентная формула). Для любых $j \geq 1$ и $l \geq 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= (x, h_{l+1}) H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\ &- \sum_{r=1}^l (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(2j)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}) - 2j H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(\{h_1, \dots, h_{l+1}\}). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Об одном многомерном аналоге разложения Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 603–610.
2. Карман А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1979, 392 с.

Поступила в редакцию
6.XII.2007