Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Петров, Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 379–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:32:54

© 2008 г.

ПЕТРОВ В. В.*

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Найдены широкие достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательности неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями.

Ключевые слова и фразы: усиленный закон больших чисел, последовательности неотрицательных случайных величин.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — произвольная последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. В силу неравенства Чебышева имеем

$$P\{|S_n - ES_n| \geq n\varepsilon\} \leq (n\varepsilon)^{-2} DS_n \quad (1)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Если

$$DS_n = o(n^2) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2)$$

то $(S_n - ES_n)/n \rightarrow 0$ по вероятности. Эта форма слабого закона больших чисел была получена Марковым без каких-либо дополнительных условий независимости. Условие (2) будем называть условием Маркова. Некоторое усиление условия Маркова приводит, как показано ниже, к усиленному закону больших чисел в форме

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Нам понадобятся следующие обозначения. Следуя [1, гл. 9], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum (n\psi(n))^{-1}$ сходится. Здесь $\sum f(n)$ означает суммирование по всем целым положительным n , для которых значения $f(n)$ определены и неотрицательны. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций ψ . Если в этом определении мы заменим слово «сходится» словом «расходится», то мы получим определение класса функций Ψ_d . Примерами функций класса Ψ_c являются функции x^α и $(\ln x)^{1+\alpha}$ при любом $\alpha > 0$. Функции $\ln x$ и $\ln x \ln \ln x$ принадлежат классу Ψ_d .

Лемма 1. Если $\psi(x) \in \Psi_c$, то ряд $\sum 1/\psi(b^n)$ сходится для любого $b > 1$.

Доказательство этой леммы опирается на следующее предложение.

Лемма 2. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $A_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Тогда ряд $\sum a_n/(A_n \psi(A_n))$ сходится для любой $\psi \in \Psi_c$.

Доказательство леммы 2 можно найти в [1, гл. 9]. Применяя лемму 2 к случаю $a_k = b^{k-1}$ ($k \geq 1$), мы приходим к утверждению леммы 1. Другое доказательство леммы 1 можно найти в [2].

Важную роль в дальнейшем будет играть условие

$$DS_n = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \quad (4)$$

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00688).

Лемма 3. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если выполнено условие (4), то имеет место соотношение (3).

Это предложение доказано в [3] с помощью полученных там оценок роста сумм независимых случайных величин почти наверное (см. также [1, гл. 9, теорема 26]). Там же было показано, что условие (4) в лемме 3 нельзя ослабить, потребовав вместо него выполнение содержащегося в (4) равенства для некоторой функции $\psi \in \Psi_d$. Заметим, что любая функция $\psi \in \Psi_d$ растет медленнее, чем любая функция $\psi \in \Psi_c$, далее, $\psi(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) для любой $\psi \in \Psi_c$.

Мы приведем более простое по сравнению с [3] доказательство леммы 3. По неравенству Чебышева имеем

$$P\{|S_{2^n} - ES_{2^n}| \geq 2^n \varepsilon\} \leq (2^n \varepsilon)^{-2} DS_{2^n}$$

для любого $\varepsilon > 0$. В силу условия (4) получим

$$P\{|S_{2^n} - ES_{2^n}| \geq 2^n \varepsilon\} \leq C(\varepsilon^2 \psi(2^n))^{-1}$$

при всех достаточно больших n , где C — постоянная. Принимая во внимание условие $\psi \in \Psi_c$ и лемму 1, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_{2^n} - ES_{2^n}| \geq 2^n \varepsilon\} < \infty \quad (5)$$

для любого $\varepsilon > 0$. По лемме Бореля–Кантелли $P\{|S_{2^n} - ES_{2^n}| \geq 2^n \varepsilon$ бесконечно часто $\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно,

$$2^{-n}(S_{2^n} - ES_{2^n}) \rightarrow 0 \quad \text{п. н.} \quad (6)$$

Заметим, что до сих пор предположение о независимости не было использовано. Применим теперь один результат Каваты (см., например, [1, с. 350]), в силу которого для последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$, удовлетворяющей условиям $S_n/n \rightarrow 0$ по вероятности и $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_{2^n}| \geq 2^n \varepsilon\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, выполнено соотношение $S_n/n \rightarrow 0$ п. н. Тогда получим (3) как следствие (5). Лемма 3 доказана.

В дальнейшем мы не делаем предположения о независимости случайных величин из исходной последовательности.

Побочным продуктом доказательства леммы 3 является следующее предложение.

Лемма 4. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Если выполнено условие (4), то имеют место соотношения (6) и (5) для любого $\varepsilon > 0$.

Перейдем теперь к формулировке основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями. Положим

$$S_{n,m} = \sum_{i=m+1}^n X_i$$

для целых $m \geq 0$ и $n > m$,

$$S_n = S_{n,0} = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Пусть выполнены условия (4) и

$$ES_{n,m} \leq C(n-m) \quad (7)$$

для всех достаточно больших $n-m$, где C — постоянная. Тогда имеет место соотношение (3).

Доказательство. Пусть $b > 1$, $k_n = [b^n]$. По неравенству Чебышева имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_{k_n} - ES_{k_n}| \geq k_n \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{DS_{k_n}}{k_n^2} \quad (8)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Используя условие (4) и лемму 1, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DS_{k_n}}{k_n^2} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k_n)} < \infty.$$

Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{k_n} - ES_{k_n}}{k_n} \rightarrow 0 \quad \text{п.н.} \quad (9)$$

Если $k_n \leq k < k_{n+1}$, то с учетом неотрицательности случайных величин из исходной последовательности получаем

$$\frac{S_k - ES_k}{k} \leq \frac{|S_{k_{n+1}} - ES_{k_{n+1}}|}{k_{n+1}} \frac{k_{n+1}}{k_n} + \frac{ES_{k_{n+1}} - ES_{k_n}}{k_n}, \quad (10)$$

$$\frac{S_k - ES_k}{k} \geq \frac{|S_{k_n} - ES_{k_n}|}{k_n} \frac{k_n}{k_{n+1}} - \frac{ES_{k_{n+1}} - ES_{k_n}}{k_{n+1}}. \quad (11)$$

Вследствие (9) первые слагаемые в правых частях (10) и (11) сходятся к нулю почти наверное. Второе слагаемое в правой части (10) при всех достаточно больших n не превосходит $C(k_{n+1} - k_n)/k_n$ в силу условия (7). Такая же оценка справедлива и для дроби во втором слагаемом (11), так как $k_n \leq k_{n+1}$. Поэтому $\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_k - ES_k|/k \leq C(b-1)$ п.н.

Правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора числа b достаточно близким к 1. Отсюда следует соотношение (3).

Покажем теперь, что в теореме 1 нельзя заменить условие (4) более слабым условием

$$DS_n = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_d. \quad (12)$$

Теорема 2. Для любой функции $\psi \in \Psi_d$ такой, что $n/\psi(n)$ не убывает в области $n > n_0$ при некотором n_0 , существует последовательность неотрицательных попарно независимых случайных величин с двумя значениями, для которой выполнены условия (7) и (12), но соотношение (3) не имеет места.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Psi_d$, а $n/\psi(n)$ не убывает. Рассмотрим последовательность попарно независимых случайных величин $\{X_n\}$ такую, что при $n > N$ случайная величина X_n имеет значения 0 и n с вероятностями $1 - 1/(n\psi(n))$ и $1/(n\psi(n))$ соответственно. Номер N выберем таким образом, что $N\psi(N) > 1$ и $N > n_0$. Пусть при $n \leq N$ случайная величина X_n имеет значения 0 и 2, каждому из которых соответствует вероятность $\frac{1}{2}$. Тогда

$$EX_n = 1, \quad EX_n^2 = 2 \quad (n \leq N),$$

$$EX_n = \frac{1}{\psi(n)}, \quad EX_n^2 = \frac{n}{\psi(n)}, \quad ES_n = N + \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{\psi(k)} \quad (n > N).$$

Поэтому

$$ES_n - ES_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\psi(k)} \quad \text{при } n > m > N,$$

так что условие (7) выполнено. Далее, вследствие попарной независимости рассматриваемых случайных величин имеем

$$DS_n = \sum_{k=1}^n DX_k \leq \sum_{k=1}^n EX_k^2 = 2N + \sum_{k=N+1}^n \frac{k}{\psi(k)} \leq 2N + \frac{(n-N)n}{\psi(n)}$$

при $n > N$ с учетом условия неубывания функции $n/\psi(n)$. Отсюда следует, что условие (12) выполнено. Покажем теперь, что соотношение (3) не выполнено.

Если бы (3) было выполнено, то в силу (3) и очевидного тождества

$$\frac{S_n - ES_n}{n} = \frac{S_{n-1} - ES_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n} + \frac{X_n - EX_n}{n}$$

мы имели бы соотношение $(X_n - \mathbf{E}X_n)/n \rightarrow 0$ п.н., которое противоречит равенству $\mathbf{P}\{X_n = n \text{ бесконечно часто}\} = 1$, вытекающему из условия $\psi \in \Psi_d$, равенств

$$\sum \mathbf{P}\{X_n = n\} = \sum \frac{1}{n\psi(n)} = \infty$$

и леммы Бореля–Кантелли в формулировке Эрдёша–Реньи.

Приведем одно следствие теорем 1 и 2. Если $\{X_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию (7), то условие $\mathbf{D}S_n = O(n^2/(\ln n)^{1+\delta})$ для некоторого $\delta > 0$ достаточно для справедливости усиленного закона больших чисел в форме (3). Если же выполнено несколько более слабое условие $\mathbf{D}S_n = O(n^2/\ln n)$ или даже условие $\mathbf{D}S_n = O(n/(\ln n \ln \ln n))$, то соотношение (3) может не выполняться.

Для последовательности неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями иные достаточные для (3) условия были найдены Н. Этемади [4] (см. также [5, с. 244]), эти условия включают равномерную ограниченность математических ожиданий рассматриваемых случайных величин и неположительность коэффициентов корреляции между любыми случайными величинами с различными индексами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
2. Петров В. В. Некоторые оценки для сумм зависимых случайных величин, имеющие место почти наверное. — Записки науч. сем. ЛОМИ, 1976, т. 55, с. 113–116.
3. Петров В. В. Об усиленном законе больших чисел. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 2, с. 193–202.
4. Etemadi N. On the law of large numbers for nonnegative random variables. — J. Multivariate Anal., 1983, v. 13, № 1, p. 187–193.
5. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
6.II.2008

© 2008 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О ГАУССОВОЙ МЕРЕ ШАРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

Пусть X — центрированный гауссов случайный вектор со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H , и пусть $a \in H$. Мы изучаем с помощью преобразования Лапласа поведение плотности и функции распределения шара $\|X - a\|^2$; получены результаты с оптимальной оценкой. Наш подход связан с «локальными предельными теоремами».

Ключевые слова и фразы: малые шары, гауссова мера, гильбертово пространство, преобразование Лапласа.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ (грант Е02-1.0-219), РФФИ (грант 02-01-01099) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-2258.2003.1).