Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Л. Грановский, А. И. Зейфман, О нижней границе спектра для некоторых моделей среднего поля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 164–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:11:25

Так, в условии теоремы 1 можно было делить $\{x_n, n \geq 1\}$ на все последовательности вида $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$, где $a < 1$, и на последовательности вида $\{n^{-1} \ln^b n, n \geq 1\}$ с $b > 1$. Для теоремы 2 — на $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$ с $a < 1$ и на $\{n^{-1} \ln^b n, n \geq 1\}$ с $b > \frac{1}{2}$. В примере 4 условия будут таковы: $a < \frac{1}{2}$ для $\{n^{-a} \ln^{-b} n, n \geq 1\}$ или $b > 1$ для $\{n^{-1/2} \ln^b n, n \geq 1\}$.

Автор выражает благодарность Андрею Анатолиевичу Дороговцеву за постановку задачи и полезные советы при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороговцев А. А. Некоторые характеристики последовательностей итераций со случайными возмущениями. — Укр. матем. журн., 1996, т. 48, № 8, с. 1047–1063.
2. Дороговцев А. А. Меры посещения и эргодическая теорема для последовательности итераций со случайными возмущениями. — Укр. матем. журн., 1999, т. 51, № 1, с. 123–127.
3. Dorogovtsev A. A., Denis'evskij N. A. Path-wise behavior of stationary sequences. — Theory Stochastic Process., 1996, v. 2 (18), № 3–4, p. 17–26.
4. Bryc W., Smoleński W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables. — Proc. Amer. Math. Soc., 1993, v. 119, № 2, p. 629–635.
5. Кейперс Л., Нидерпрейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1965, 408 с.
6. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Ч. 1. Киев: Лыбидь, 1993.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
9.II.2000

Исправленный вариант
30.VII.2001

© 2004 г.

ГРАНОВСКИЙ Б. Л.*, ЗЕЙФМАН А. И.**

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ СПЕКТРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДНЕГО ПОЛЯ¹⁾

Находится нижняя граница спектра инфинитезимальной матрицы для моделей среднего поля в случае, когда число взаимодействующих частиц стремится к бесконечности.

Проводится также сравнение асимптотического поведения нижней границы спектра и спектральной лакуны, при этом находится класс моделей среднего поля, для которого границы спектра принимают экстремальные значения. Результаты получены с помощью метода, предложенного в 80-х годах вторым автором.

* Department of Mathematics, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, 32000 Israel; e-mail: mar18aa@techunix.technion.ac.il

** Вологодский госпедуниверситет и Вологодский научно-координационный центр ЦЭМИ РАН, ул. Орлова, 6, Вологда, Россия; e-mail: zai@uni-vologda.ac.ru

¹⁾ Работа первого автора поддержана Фондом содействия исследованиям Техниона. Работа над статьей начата во время визита второго автора в Технион в апреле 1997 г. при финансовой поддержке математического факультета Техниона.

Ключевые слова и фразы: модели среднего поля, процессы рождения и гибели, случайные блуждания на графах, спектр инфинитезимальной матрицы, наименьшая и наибольшая скорости экспоненциальной сходимости, спектральная лакуна.

1. Введение. Задача оценивания скорости сходимости к стационарному распределению для процессов рождения и гибели (ПРГ) исследовалась на протяжении последних двадцати лет многими авторами, см. [1]–[6], [14]–[16]. Прилагаемый список литературы не претендует на полноту; в нем содержатся только работы, непосредственно связанные с направлением исследования настоящей статьи. Как известно, имеется связь между граничными точками спектра матрицы интенсивностей процесса и наибольшей и наименьшей скоростями экспоненциальной сходимости к его стационарному распределению, см., например, оценку (5) далее. А именно, верхняя граница соответствует наименьшей, а нижняя — наибольшей скорости сходимости. В работе [14] был предложен метод оценивания наименьшей скорости сходимости для стационарных и нестационарных (во времени) ПРГ. Указанный метод основан на использовании логарифмической нормы Лозинского и построении специального преобразования матрицы интенсивностей. В дальнейшем этот метод был развит в [15], [16] для оценивания обеих граничных точек спектра. В [8], [9] была расширена теоретическая база метода и метод был применен для нахождения верхней границы спектра в моделях среднего поля. Тот же метод был применен в [10] для изучения устойчивости нестационарных систем массового обслуживания. Настоящая работа посвящена в основном исследованию поведения нижней границы спектра для моделей среднего поля. Отметим, что имеется обширная литература по исследованию верхней границы спектра, которую принято называть параметром сходимости или спектральной лакуной. Однако исследованию нижней границы было уделено очень мало внимания. Насколько нам известно, других методов, кроме используемого далее, для решения этой задачи пока нет.

Кроме того, в нашей работе обнаружено существенное различие в асимптотическом поведении верхней и нижней границ спектра, когда число N состояний (частиц) стремится к бесконечности.

Полученные нами результаты показывают, что для широкого класса моделей статистической физики нижняя граница спектра имеет гораздо более высокий порядок роста по N , чем спектральная лакуна. Нам представляется, что это явление заслуживает объяснения с физической точки зрения.

В настоящей работе также получена характеристика моделей голосования и антиголосования с шумом на полных графах. Оказалось, что указанные процессы имеют экстремальные величины границ спектра среди всех моделей среднего поля.

2. Краткое описание метода. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, — ПРГ с пространством состояний $E = \{0, 1, \dots, N\}$, интенсивностями рождения $a_k > 0$, $0 \leq k \leq N-1$, и гибели $b_k > 0$, $1 \leq k \leq N$, $b_0 = a_N = 0$.

Пусть Σ — спектр соответствующей матрицы интенсивностей, а $(-\chi)$ и $(-\beta)$ — соответственно нижняя и верхняя границы множества $\Sigma \setminus \{0\}$. Отметим, что, как известно [11], все точки $\Sigma \setminus \{0\}$ действительны, отрицательны и различны. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_k = a_k + b_{k+1} - \delta_{k+1}a_{k+1} - \delta_k^{-1}b_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$\zeta_k = a_k + b_{k+1} + \sigma_{k+1}a_{k+1} + \sigma_k^{-1}b_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2)$$

где веса $\delta_k > 0$, $\sigma_k > 0$, $1 \leq k \leq N-1$. При этом для удобства полагаем $\delta_0^{-1} = \sigma_0^{-1} = \delta_N = \sigma_N = 0$.

Главный результат рассматриваемого метода гарантирует справедливость оценок:

$$\min_{0 \leq k \leq N-1} \alpha_k \leq \beta \leq \max_{0 \leq k \leq N-1} \alpha_k, \quad (3)$$

$$\min_{0 \leq k \leq N-1} \zeta_k \leq \chi \leq \max_{0 \leq k \leq N-1} \zeta_k. \quad (4)$$

При этом, как известно (см. [1], [16]), имеет место следующая двусторонняя оценка расстояния в l_1 -норме между распределением вероятностей состояний ПРГ в момент времени t и его стационарным распределением:

$$C_1 e^{-\chi t} \|p(0) - \pi\| \leq \|p(t) - \pi\| \leq C_2 e^{-\beta t} \|p(0) - \pi\|, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $p(t)$ — вектор вероятностей состояний в момент t , π — стационарное распределение, $\|x\| = \sum |x_i|$, а C_1, C_2 — явно выписываемые константы, не зависящие ни от начального распределения $p(0)$, ни от t .

Таким образом, (3) и (4) дают двусторонние оценки наибольшей и наименьшей скоростей экспоненциальной сходимости ПРГ. Точность этого оценивания зависит от удачности выбора последовательностей $\{\delta_k\}_1^{N-1}$ и $\{\sigma_k\}_1^{N-1}$. Более того, (3), (4) дают возможность точного нахождения β и χ . Следующая теорема содержит формулировку этого утверждения.

Теорема 1. *Существуют единственные положительные последовательности $\{\delta_k\}_1^{N-1}$ и $\{\sigma_k\}_1^{N-1}$ такие, что*

$$\alpha_k = \beta, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$\zeta_k = \chi, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (7)$$

Теорема 1 была доказана в [8] для верхней границы. Поскольку уравнения (6) и (7) имеют одинаковую структуру, доказательство для нижней границы точно такое же, и мы его опускаем.

Теорема 1 сводит нахождение β и χ к решению нелинейных относительно неизвестных $\delta_k > 0, \sigma_k > 0, 1 \leq k \leq N-1$, систем алгебраических уравнений (6) и (7) соответственно. Далее мы будем обозначать решения этих систем $\delta_k^*, \sigma_k^*, 1 \leq k \leq N-1$, соответственно. Решение систем (6) и (7) в явном виде для всех N оказывается возможным только в немногих частных случаях.

Пример 1. Рассмотрим ПРГ с постоянными интенсивностями $a_k = a, b_{k+1} = b, k = 0, \dots, N-1$. В [8] было получено следующее решение системы (6): $\delta_1^* = 2\sqrt{b/a} \cos[\pi/(N+1)]$ и $\beta = a + b - \delta_1^* a = a + b - 2\sqrt{ab} \cos \pi/(N+1) \rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, N \rightarrow \infty$.

Найдем теперь решение системы (7). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае $\sigma_k^* = \delta_k^*, 1 \leq k \leq N-1$. Тогда получаем $\zeta_k = a + b + \delta_{k+1}^* a + b/\delta_k^* = a + b + \delta_1^* a, k = 0, \dots, N-1$. Следовательно,

$$\chi = a + b + 2\sqrt{ab} \cos \frac{\pi}{N+1} \rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, \quad N \rightarrow \infty.$$

Наша работа посвящена главным образом развитию способов решения системы (7) и сравнительному анализу поведения β и χ при $N \rightarrow \infty$. При этом все оценки, полученные далее, основаны на использовании (4).

3. Модели среднего поля. Общие результаты. В этом пункте мы изучаем эргодический марковский процесс $\varphi_t, t \geq 0$, с взаимодействием ближайших частиц (спинов) на полном графе с N узлами (см. [12], [8]). Пространство состояний такого процесса — это множество всех 2^N бинарных векторов (= конфигураций) длины N так, что 0 означает, что соответствующий узел свободен, а 1 — что он занят. Напомним также, что граф с N узлами называется полным, если каждый его узел имеет $N-1$ соседних узлов. Такие процессы известны в статистической физике как модели среднего поля (см. ссылки в [7], [8]). Они задаются посредством $2N$ интенсивностей перескоков $\lambda_k, \mu_k, k = 0, \dots, N-1$, где λ_k и μ_k — соответственно интенсивности рождения и гибели для свободного (соответственно, занятого) узла на графе, если у него имеется k занятых соседних узлов. Известна связь [8] между моделями среднего поля φ_t и ПРГ $X_t, t \geq 0$:

$$X_t = |\varphi_t|, \quad t \geq 0,$$

где $|\varphi_t|$ обозначает общее количество занятых узлов в момент времени $t, t \geq 0$, в конфигурации φ_t , а X_t — ПРГ на $E = \{0, 1, \dots, N\}$ с интенсивностями

$$a_k = (N-k)\lambda_k, \quad b_{k+1} = (k+1)\mu_k, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (8)$$

Следующая теорема дает оценки χ для моделей среднего поля. Так как χ зависит от N , мы будем далее писать χ_N .

Теорема 2. Пусть $\lambda_k > 0, \mu_k > 0, k = 0, \dots, N-1$. Тогда

$$G_N < \chi_N \leq J_N, \quad N \geq 3, \quad (9)$$

где

$$G_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \left((N-k) \lambda_k + (k+1) \mu_k \right), \quad (10)$$

$$H_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \left((N-k) \lambda_k + (k+1) \mu_k + (N-k-1) \lambda_{k+1} + k \mu_{k-1} \right), \quad (11)$$

$$J_N = \min \left(H_N; N \max_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k) \right). \quad (12)$$

Доказательство. Имеем из (2) и (8)

$$\zeta_k = (N-k) \lambda_k + (k+1) \mu_k + (N-k-1) \lambda_{k+1} \sigma_{k+1} + k \mu_{k-1} \sigma_k^{-1} \quad (13)$$

при всех $\sigma_k > 0, 1 \leq k \leq N-1$.

Отсюда

$$\zeta_k > (N-k) \lambda_k + (k+1) \mu_k, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (14)$$

для всех $\sigma_k > 0, 1 \leq k \leq N-1$. Из (14), в соответствии с (4), вытекает левое неравенство в (9). Для доказательства правого неравенства в (9) положим вначале $\sigma_k = \mu_{k-1}/\lambda_k, k = 1, \dots, N-1$. Тогда получим

$$\zeta_k = N(\lambda_k + \mu_k), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (15)$$

откуда $\chi_N \leq N \max_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k)$. Далее, полагая $\sigma_k = 1, 1 \leq k \leq N-1$, получим $\chi_N \leq H_N$ и, следовательно, правое неравенство в (9).

Пример 2. Рассмотрим модель Изинга: $\lambda_k = e^{v(2k-(N-1))}, \mu_k = \lambda_k^{-1}, k = 0, \dots, N-1, v = \text{const} \in \mathbb{R}$. Из определений (10) и (12) следует, что

$$G_N \geq \lambda_{N-1} + N \mu_{N-1} = N e^{-v(N-1)} + e^{v(N-1)}, \quad (16)$$

$$J_N \leq N(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) = N(e^{v(N-1)} + e^{-v(N-1)}). \quad (17)$$

Отсюда в силу (9)

$$N e^{-v(N-1)} + e^{v(N-1)} \leq \chi_N \leq N(e^{v(N-1)} + e^{-v(N-1)}). \quad (18)$$

Наше следующее утверждение выделяет модели среднего поля с экстремальным значением χ_N .

Теорема 3. Пусть $\lambda_k > 0, \mu_k > 0, k = 0, \dots, N-1$. Тогда при $N \geq 3$

$$N \min_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k) \leq \chi_N \leq N \max_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k). \quad (19)$$

При этом хотя бы одно из равенств в (19) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda_k + \mu_k = \text{const} \quad (20)$$

при всех $0 \leq k \leq N-1$.

Доказательство. Двусторонняя оценка (19) следует из равенств (15), которые получаются из (2) при выборе $\sigma_k = \mu_{k-1}/\lambda_k, k = 1, \dots, N-1$.

Докажем теперь вторую часть утверждения теоремы. Предположим, что

$$\chi_N = N \max_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k). \quad (21)$$

Пусть снова $\sigma_k, 1 \leq k \leq N-1$, выбраны так, что выполняется (15). Тогда, согласно (21), $\zeta_1 \leq N \max_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k) = \chi_N = \zeta_1^*$, что влечет $\sigma_1^* \geq \sigma_1$. Аналогично получаем $\sigma_k^* \geq \sigma_k$ при всех $1 \leq k \leq N-1$. В частности, $\sigma_{N-1}^* \geq \sigma_{N-1}$. С другой стороны, $\zeta_{N-1} \leq \zeta_{N-1}^*$ влечет $\sigma_{N-1}^* \leq \sigma_{N-1}$. Значит, $\sigma_{N-1}^* = \sigma_{N-1}$, откуда следует, что $\sigma_k^* = \sigma_k, k = N-2, \dots, 1$. Таким образом, из (21) вытекает, что все ζ_k в (15) равны между собой, т.е. выполняется (20).

Случай $\chi_N = N \min_{0 \leq k \leq N-1} (\lambda_k + \mu_k)$ рассматривается аналогично.

Модели среднего поля, обладающие свойством (20), можно рассматривать как нелинейные модели голосования. Напомним, что стандартная (линейная) модель голосования с шумом (noisy voter model) определяется интенсивностями

$$\lambda_k = \lambda_0 + kh, \quad \mu_k = \mu_{N-1} + (N - k - 1)h, \quad 0 \leq k \leq N - 1, \quad (22)$$

где $h \geq 0$, а $\lambda_0 \geq 0$ и $\mu_{N-1} \geq 0$ не зависят от N . Это — притягивающий (attractive, см. [12]) процесс в том смысле, что интенсивности рождения λ_k не убывают, а интенсивности гибели μ_k не возрастают с ростом k . Если в модели (22) изменить поведение интенсивностей перескоков на противоположное, так что

$$\lambda_k = \lambda_0 - kh = \lambda_{N-1} + (N - k - 1)h, \quad \mu_k = \mu_0 + kh, \quad 0 \leq k \leq N - 1, \quad (23)$$

где $h \geq 0$, а $\lambda_{N-1} \geq 0$ и $\mu_0 \geq 0$ не зависят от N , то полученный процесс естественно назвать линейной моделью антиголосования с шумом. Ясно, что модели (22) и (23) удовлетворяют условию (20). В [8] доказано, что (22) и (23) — единственные модели среднего поля, для которых спектральная лагуна β_N принимает наименьшее возможное значение, равное $\lambda_0 + \mu_{N-1}$. Отсюда в силу теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Среди всех моделей среднего поля обе граничные точки спектра достигают своих экстремальных значений только в случае линейных моделей голосования и антиголосования с шумом.

4. Асимптотика χ_N при $N \rightarrow \infty$ для моделей среднего поля. Начнем рассмотрение с моделей среднего поля, известных как случайные блуждания на полных графах (см., например, [5]). Для таких моделей $\lambda_k = \mu_k$, $k = 0, \dots, N - 1$. Асимптотика спектральной лагуны β_N при $N \rightarrow \infty$ для таких процессов исследована в [9].

Двусторонняя оценка χ_N для этих процессов немедленно вытекает из (13) и (19).

Следствие 2. Пусть $\lambda_k = \mu_k > 0$, $k = 0, \dots, N - 1$. Тогда

$$(N + 1) \max_{0 \leq k \leq N-1} \lambda_k \leq \chi_N \leq 2N \max_{0 \leq k \leq N-1} \lambda_k, \quad N \geq 3. \quad (24)$$

Оценка (24) наводит на мысль, что для указанных процессов существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\chi_N}{N \max_{0 \leq k \leq N-1} \lambda_k} = C, \quad 1 \leq C \leq 2.$$

Наш следующий результат показывает справедливость этой гипотезы для класса случайных блужданий на полных графах с интенсивностями вида $\lambda_k = \mu_k = k^s$, $k = 0, \dots, N - 1$, $s \geq 0$. Отметим, что случай $s = 1$ соответствует модели блуждания, введенной в работе [5]. Поскольку $k = 0$ является поглощающим состоянием для данного процесса, мы будем рассматривать соответствующий ему эргодический ПРГ на пространстве $E = \{1, \dots, N\}$. Нахождение константы C потребовало специальной техники для выбора весов σ_k .

Теорема 4. Пусть $E = \{1, \dots, N\}$, $\lambda_k = \mu_k = k^s$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, N - 1$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\chi_N}{N^{1+s}} = M_s, \quad (25)$$

где M_s — наибольшее значение функции $f(u) := u^s(1 + 2\sqrt{u(1-u)})$ при $u \in [0, 1]$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $1 = f(1) \leq M_s \leq M_0 = 2$. При $s = 0$ полагаем $\sigma_k = 1$, $k = 1, \dots, N - 1$. Тогда $\zeta_1 = 2N - 1$ и $\zeta_k = 2N$, $1 < k \leq N - 1$. Отсюда, согласно (4), получаем $\chi_N/N \rightarrow 2 = M_0$ при $N \rightarrow \infty$. Это доказывает (25) для $s = 0$.

Пусть теперь $s > 0$. Обозначим $M_s = f(\hat{u})$, где $\hat{u} = \hat{u}(s)$, $s > 0$. Покажем прежде всего, что $\hat{u}(s) < 1$ при всех $s > 0$. Действительно, рассматривая функцию $\sqrt{f(u)} = u^{s/2}(\sqrt{u} + \sqrt{1-u})$, $u \in [0, 1]$, получаем $\hat{u} = (1 + z^2)^{-1}$, где $z = 2(s + 1 + \sqrt{s^2 + 6s + 1})^{-1} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Зафиксируем теперь достаточно большое k_0 , обозначим $k/N = t$ и выберем σ_k следующим образом:

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{M_s}{t^s(1-t)}, & 1 \leq k \leq k_0, \\ \frac{M_s - t^s + \sqrt{D}}{2t^s(1-t)}, & k_0 < k \leq N\hat{u}, \\ \frac{M_s - t^s - \sqrt{D}}{2t^s(1-t)}, & N\hat{u} < k \leq N - k_0, \\ (M_s - 1)^{-1}, & N - k_0 < k \leq N - 1, \end{cases} \quad (26)$$

где $D = D(t) = (M_s - t^s)^2 - 4t^{1+2s}(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Заметим, что из определения M_s вытекает $D(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$.

Найдем асимптотику по N величин ζ_k в диапазонах изменения k , соответствующих (26). Во-первых, поскольку $t \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $1 \leq k \leq k_0$, мы получаем для этого диапазона

$$\zeta_k = (N+1)k^s + M_s N^{1+s} + k(k-1)^s \frac{k^s(N-k)}{M_s N^{1+s}} = M_s N^{1+s} + w_{1k}, \quad (27)$$

где $|w_{1k}|/N^{1+s} \leq v_N \rightarrow 0$, если $N \rightarrow \infty$.

Во втором и третьем диапазонах имеем $0 < t < 1$ при всех N и $s \geq 0$. Основываясь на этом, нетрудно показать, что в этих диапазонах изменения k

$$\zeta_k = M_s N^{1+s} + w_{2k}, \quad (28)$$

где $|w_{2k}|/N^{1+s} \leq v_N \rightarrow 0$, если $N \rightarrow \infty$.

Наконец, в последнем диапазоне изменения k , с учетом того, что k_0 фиксировано, а $t \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $N-1 \geq k > N-k_0$, получаем

$$\zeta_k = N^{1+s} + N^{1+s}(M_s - 1) + w_{3k}, \quad (29)$$

где $|w_{3k}|/N^{1+s} \leq v_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Интересно сравнить асимптотическое поведение χ_N и β_N как функций от s для рассмотренных выше случайных блужданий на полных графах.

В [9] получено, что при $0 \leq s < 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-s} \beta_N = 2^{1-s}, \quad (30)$$

а при всех $s \geq 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \beta_N = 1. \quad (31)$$

Этот результат означает, что при больших N значение параметра $s = 1$ для спектральной лакуны является критическим, в том смысле, что при переходе через это значение поведение β_N как функции s резко меняется. С другой стороны, в условиях теоремы 4 имеем $M_0 = 2$, $M_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $M_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, поскольку $\hat{u}(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$. Согласно теореме 4, это говорит о том, что порядок роста χ_N равен N^{1+s} при всех $s \geq 0$. Отсюда вытекает, что χ_N как функция от s вообще не имеет критических точек при $N \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь процесс, который можно назвать линейной моделью голосования со смещением. В отличие от случайных блужданий, это — притягивающая модель. Следующее наше утверждение устанавливает асимптотическое поведение χ_N для этих моделей.

Теорема 5. Рассмотрим линейную модель голосования со смещением: $\lambda_k = \lambda_0 + kh_1$, $\mu_k = \mu_0 - kh_2 = \mu_{N-1} + (N-k-1)h_2$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, где $\lambda_0 \geq 0$, $\mu_{N-1} \geq 0$, $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$ фиксированы, $h_1 + h_2 > 0$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\chi_N}{N^2} = \frac{1}{4} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2. \quad (32)$$

Доказательство. Положим $M = \frac{1}{4}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2$, $k/N = t$ и $D(t) = (t(1-t)(h_1 + h_2) - M)^2 - 4t^2(1-t)^2 h_1 h_2$, $0 \leq t \leq 1$.

Имеем $0 \leq D(t) \leq M^2$, $0 \leq t \leq 1$, $D(0) = D(1) = M^2$, $D(\frac{1}{2}) = 0$.

Фиксируя теперь достаточно большое k_0 , выберем

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{MN}{\lambda_k}, & k \leq k_0, \\ \frac{M - t(1-t)(h_1 + h_2) + \sqrt{D(t)}}{2h_1 t(1-t)}, & k_0 < k \leq \frac{N}{2}, \\ \frac{M - t(1-t)(h_1 + h_2) - \sqrt{D(t)}}{2h_1 t(1-t)}, & \frac{N}{2} < k \leq N - k_0, \\ \frac{\mu_N + (N - k)h_2}{MN}, & N - k_0 < k \leq N - 1. \end{cases} \quad (33)$$

Для первого и последнего диапазонов изменения k доказательство проводится непосредственным вычислением. Во втором диапазоне, поскольку $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, получаем

$$\zeta_k = N^2 \left(t(1-t)(h_1 + h_2) + \frac{M - t(1-t)(h_1 + h_2) + \sqrt{D(t)}}{2} + \frac{2h_1 h_2 t^2 (1-t)^2}{M - t(1-t)(h_1 + h_2) + \sqrt{D(t)}} + w_{4k} \right) = N^2(M + w_{5k}), \quad (34)$$

где $|w_{4k}| \leq v_N$, $|w_{5k}| \leq v_N \rightarrow 0$, если $N \rightarrow \infty$. Для третьего диапазона доказательство проводится аналогично. В результате получаем утверждение теоремы.

Отметим, что для частного случая линейной модели голосования без смещения имеем $h_1 = h_2 = h$. Отсюда в силу теоремы 3

$$\chi_N = N(\lambda_k + \mu_k) = N(\lambda_0 + \mu_N + Nh) = N^2 h + o(N^2), \quad (35)$$

что согласуется с (32).

З а м е ч а н и е 2. Естественно сравнить асимптотическое поведение χ_N для случайных блужданий, удовлетворяющих условиям теоремы 4 при $s = 1$, и для моделей голосования, рассмотренных в теореме 5. Формулы (25) и (32) показывают, что порядок роста χ_N для обеих моделей равен N^2 . И это несмотря на то, что первая модель — отталкивающая, а вторая — притягивающая.

П р и м е р 3. Рассмотрим процесс трапезы философов (см. [13]), для которого $\lambda_0 > 0$, $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, N - 1$, и $\mu_k = \mu > 0$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Поскольку не все интенсивности перескоков положительны, прямое применение рассматриваемого метода невозможно. В связи с этим введем вспомогательный ПРГ с интенсивностями $\lambda_0 > 0$, $\lambda_k = \varepsilon > 0$, $k = 1, \dots, N - 1$, $\mu_k = \mu$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Обозначим нижнюю границу спектра для этого процесса $(-\chi_N(\varepsilon))$. Тогда, очевидно, $\chi_N = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \chi_N(\varepsilon)$.

1) Пусть $\mu > \lambda_0$. Тогда при достаточно больших N выполняется неравенство $(N - 1)\mu > N\lambda_0$. Выбирая $\sigma_1 = \varepsilon^{-1}(\mu - (N - 1)^{-1}N\lambda_0) > 0$ и $\sigma_k = \varepsilon^{-1}\mu$, $2 \leq k \leq N - 1$, получим $\zeta_0 = N\mu$ и $\zeta_k = N\mu + O(\varepsilon)$, $1 \leq k \leq N - 1$. Следовательно, устремляя ε к нулю, имеем $\chi_N = N\mu$ при достаточно больших N .

2) Пусть $\mu \leq \lambda_0$. В этом случае при всех N выполняется неравенство $(N - 1)\mu < N\lambda_0$. Выбирая $\sigma_k = k\mu/(N\lambda_0 - k\mu)$, $k = 1, \dots, N - 1$, имеем $\zeta_k = N\lambda_0 + \mu + O(\varepsilon)$, $0 \leq k \leq N - 1$. Отсюда, устремляя ε к нулю, получаем $\chi_N = N\lambda_0 + \mu$.

В итоге получаем $\chi_N = N \max(\lambda_0, \mu)$, и, следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\chi_N}{N} = \max(\lambda_0, \mu) > 0.$$

З а м е ч а н и е 3. В [8] с помощью аналогичных рассуждений получено, что для процесса трапезы философов $\beta_N = \mu + \min(\mu, N\lambda_0)$.

Заключительное замечание. Наше исследование асимптотического поведения β_N и χ_N для различных моделей среднего поля показывает, что скорость роста χ_N значительно выше, чем скорость роста β_N . Оказалось, что для всех рассмотренных нами моделей среднего поля $\chi_N \geq N\beta_N$ при достаточно больших N . Нам представляется, что этот факт заслуживает внимания специалистов в области статистической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen M. F.* From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. River Edge: World Scientific, 1992, 550 p.
2. *Chen M. F.* Estimation of spectral gap for Markov chains. — *Acta Math. Sinica*, 1996, v. 12, № 4, p. 337–360.
3. *Chen M. F.* Explicit bounds of the first eigenvalue. — *Sci. China Ser. A*, 2000, v. 43, № 10, p. 1051–1059.
4. *Coolen-Schrijner P., Van Doorn E. A.* On the convergence to stationarity of birth-death processes. — *J. Appl. Probab.*, 2001, v. 38, № 3, p. 696–706.
5. *Diaconis P., Saloff-Coste L.* Walks on generating sets of Abelian groups. — *Probab. Theory Related Fields*, 1996, v. 105, № 3, p. 393–421.
6. *Van Doorn E. A.* Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1985, v. 17, № 3, p. 514–530.
7. *Fernández R., Fröhlich J., Sokal A. D.* Random Walks, Critical Phenomena and Triviality in Quantum Field Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 444 p.
8. *Granovsky B., Zeifman A.* The decay function of nonhomogeneous birth-death processes, with application to mean-field models. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 72, № 1, p. 105–120.
9. *Granovsky B., Zeifman A.* The N -limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains. — *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*, 2000, v. 16, № 4, p. 235–248.
10. *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* Nonstationary Markovian queues. — *J. Math. Sci. (New York)*, 2000, v. 99, № 4, p. 1415–1438.
11. *Karlin S.* Total positivity, absorption probabilities and applications. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1964, v. 111, p. 33–107.
12. *Луггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Наука, 1989, 550 с.
13. *Ycart B.* The philosophers' process: an ergodic reversible nearest particle system. — *Ann. Appl. Probab.*, 1993, v. 3, № 2, p. 356–363.
14. *Зейфман А. И.* Качественные свойства неоднородных процессов рождения и гибели. — *Проблемы устойчивости стохастических моделей*. М.: ВНИИСИ, 1988, с. 32–40.
15. *Zeifman A.* Some estimates of the rate of convergence for birth and death processes. — *J. Appl. Probab.*, 1991, v. 28, № 2, p. 268–277.
16. *Zeifman A.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. — *Stochastic Process. Appl.*, 1995, v. 59, № 1, p. 157–173.

Поступила в редакцию
19.XII.2001

Исправленный вариант
30.VI.2003

© 2004 г.

КОБЕЛЬКОВ С. Г.*

**О ЗАДАЧЕ РАЗОРЕНИЯ ДЛЯ
ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА**

Найдена точная асимптотика для вероятности разорения в случае, когда интенсивность доходов описывается гауссовским стационарным процессом.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: sergey@dodo.inm.ras.ru