Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Ярославцева, Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 390–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:01:41

14. Кристофф Г., Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. О распределении квадратичных форм от гауссовских случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 301–312.
15. Jaschke S., Klüppelberg C., Lindner A. Asymptotic behavior of tails and quantiles of quadratic forms of Gaussian vectors. — J. Multivariate Anal., 2004, v. 88, p. 252–273.
16. Розовский Л. В. О вероятностях малых отклонений положительных случайных величин. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2004, в. 320, с. 150–159.

Поступила в редакцию
21.X.2003

Исправленный вариант
14.II.2008

© 2008 г.

ЯРОСЛАВЦЕВА Л. С.*

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ¹⁾

В настоящей заметке получена первая неклассическая оценка точности приближения короткими асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме в $\mathbf{R}^1$ для независимых слагаемых, которые необязательно одинаково распределены. В случае независимых одинаково распределенных слагаемых при выполнении условия Крамера оценка имеет правильный порядок сходимости $(1/n)$, а множитель при главном члене убывания есть сумма степеней третьего и четвертого псевдомоментов слагаемых.

Ключевые слова и фразы: неклассическая оценка, псевдомомент, асимптотические разложения, центральная предельная теорема.

1. Введение. Неклассическими оценками в центральной предельной теореме (далее ЦПТ) называются оценки типа неравенства Эссеена, в которых абсолютные моменты заменяются на другие характеристики, отражающие близость распределения рассматриваемых случайных величин к нормальному закону. Примером таких характеристик являются псевдомоменты (см. ниже). Изучению неклассических оценок были посвящены работы ряда авторов (см., например, [1]–[4]). Однако в этих работах рассматривалась лишь точность приближения нормальным законом в ЦПТ. Автором же настоящей статьи с использованием метода, предложенного в [5], были получены неклассические оценки точности приближения короткими асимптотическими разложениями в ЦПТ.

2. Обозначения и формулировка результатов. Рассмотрим последовательность $X_1, \dots, X_n$ независимых случайных величин с нулевыми средними. Мы обозначаем $F_k, \sigma_k^2, \alpha_{3,k}$ и $\beta_{3,k}$ функцию распределения, дисперсию, третий и абсолютный третий момент X_k соответственно и предполагаем, что $\beta_{3,k} < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Для $r \geq 0$ введем r -й псевдомомент X_k

$$\nu_{r,k} = \int_{\mathbf{R}} |x|^r |F_k - \Phi_k|(dx),$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: ladila@mail.ru

где $\Phi_k(x) = \Phi(x/\sigma_k)$, $k = 1, \dots, n$, и $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$. Пусть

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2, \quad L_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^3, \quad K_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^4, \\ \alpha_3 = \sum_{k=1}^n \alpha_{3,k}, \quad \beta_3 = \sum_{k=1}^n \beta_{3,k}, \quad \nu_r = \sum_{k=1}^n \nu_{r,k}.$$

Будем предполагать, что $B_n \neq 0$, и положим

$$\theta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{|t| > B_n^3/(36\beta_3)} |f_k(t)|,$$

где f_k — характеристическая функция случайной величины (с.в.) $B_n^{-1}X_k$. Обозначим через $F^{[n]}$ функцию распределения с.в. $B_n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$ и рассмотрим ее короткие асимптотические разложения:

$$G^{[n]}(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi} B_n^3} (1 - x^2) e^{-x^2/2}.$$

Нас интересует оценка величины

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - G^{[n]}(x)|.$$

Теорема. Существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$D_n \leq M \left(\frac{\nu_4}{B_n^4} + \frac{\nu_4^{1/2} K_n^{1/2}}{B_n^4} + \frac{\nu_3^2}{B_n^6} + \frac{\nu_3^{4/3} L_n^{2/3}}{B_n^6} + \left(1 + \frac{\beta_3}{B_n^3}\right) \left(\frac{\beta_3}{B_n^3}\right)^4 + \theta_n^n \left(\frac{\beta_3}{B_n^3}\right)^{-1} \right).$$

Следствие. В случае, когда $X_1, \dots, X_n$ распределены одинаково, получим

$$D_n \leq M \left(\frac{1}{n} \left[\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4} + \left(\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4}\right)^{1/2} + \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3}\right)^{4/3} \right] + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3}\right) \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3}\right)^4 + \theta_n^n \sqrt{n} \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3}\right)^{-1} \right).$$

3. Доказательство теоремы. Далее c будет обозначать универсальную абсолютную постоянную.

Введем характеристику разнораспределенности слагаемых:

$$q_n = \left\lfloor \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}{\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2} \right\rfloor.$$

Если $q_n < 3$, то утверждение теоремы выводится тривиальным образом. Предположим, что $q_n \geq 3$. Обозначим преобразования Фурье–Стилтьеса функций $F^{[n]}$ и $G^{[n]}$ через f и g соответственно. Заметим, что

$$g(t) = \left(1 + \frac{\alpha_3}{6B_n^3} (it)^3\right) e^{-t^2/2}. \quad (1)$$

Пусть $\gamma = B_n^3/\beta_3$, и положим

$$I = \int_{(-\gamma^4/36, \gamma^4/36)} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt.$$

Применяя теорему 2 из [6, гл. V] с $b = 1/\pi$ и $T = \gamma^4/36$, получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - G^{[n]}(x)| \leq c \left(I + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma^4} \right). \quad (2)$$

Имеем

$$I \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (3)$$

где

$$I_1 = \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt, \quad I_2 = \int_A \frac{|f(t)|}{|t|} dt, \quad I_3 = \int_A \frac{|g(t)|}{|t|} dt$$

с $A = (-\gamma^4/36, -\gamma/36) \cup (\gamma/36, \gamma^4/36)$. Из равенств $f(t) = \prod_{k=1}^n f_k(t/B_n)$ и (1) вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Справедливы оценки $I_2 \leq 6\theta_n^n \gamma$, $I_3 \leq c\gamma^{-4}$.

Чтобы оценить I_1 , воспользуемся представлением функции $f(t)$, предложенным в [5]. Введем с.в. Y_k и $\bar{Y}_k$, имеющие нормальное распределение с нулевыми средними и дисперсией σ_k^2 , $k = 1, \dots, n$, и с.в. α_1 и α_2 , равномерно распределенные на $[0, \pi/2]$. Предположим, что $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$, α_1, α_2 независимы. Для $\ell, j \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$S = \sum_{k=1}^n X_k, \quad S_\ell = \sum_{k \neq \ell} X_k, \quad S_{\ell,j} = \sum_{k \notin \{\ell, j\}} X_k$$

и определим $Z, Z_\ell, Z_{\ell,j}$ и $\bar{Z}, \bar{Z}_\ell, \bar{Z}_{\ell,j}$ аналогичным образом, заменяя X_k на Y_k и $\bar{Y}_k$ соответственно. Тогда для всех t имеет место следующее равенство:

$$f(t) = e^{-t^2/2} + \frac{\pi}{2} \sum_{\ell=1}^n A_{1,\ell} + \frac{\pi^2}{4} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j \neq \ell} A_{2,\ell,j}, \quad (4)$$

где

$$A_{1,\ell} = -\frac{it}{B_n} \mathbf{E} \exp\{itB_n^{-1}(\bar{Z}_\ell \cos \alpha_1 + Z_\ell \sin \alpha_1 + X_\ell \cos \alpha_1 + Y_\ell \sin \alpha_1)\} \\ \times (-X_\ell \sin \alpha_1 + Y_\ell \cos \alpha_1)$$

и

$$A_{2,\ell,j} = \frac{(it)^2}{B_n^2} \mathbf{E} \exp\{itB_n^{-1}(S_{\ell,j} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \bar{Z}_{\ell,j} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + Z_\ell \sin \alpha_1 + X_\ell \cos \alpha_1)\} \\ \times \exp\{itB_n^{-1}(Y_\ell \sin \alpha_1 + X_j \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \bar{Y}_j \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)\} \\ \times (-X_\ell \sin \alpha_1 + Y_\ell \cos \alpha_1)(-X_j \sin \alpha_2 + \bar{Y}_j \cos \alpha_2) \cos \alpha_1.$$

Из (4) и (1) следует, что

$$I_1 \leq c \left(\sum_{\ell=1}^n \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} \left| A_{1,\ell} - \frac{\alpha_{3,\ell}}{3\pi B_n^3} (it)^3 e^{-t^2/2} \right| \frac{dt}{|t|} + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j \neq \ell} \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} |A_{2,\ell,j}| \frac{dt}{|t|} \right).$$

Лемма 2. Существует константа $c > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\left| A_{1,\ell} - \frac{\alpha_{3,\ell}}{3\pi B_n^3} (it)^3 e^{-t^2/2} \right| \leq c \frac{\nu_{4,\ell} + \nu_{3,\ell} \sigma_\ell + \nu_{2,\ell} \sigma_\ell^2}{B_n^4} t^4 e^{-t^2/3}.$$

Лемма 3. Если $t \in (-\gamma/36, \gamma/36)$, то

$$|A_{2,\ell,j}| \leq \frac{(\nu_{3,\ell} + \nu_{2,\ell} \sigma_\ell)(\nu_{3,j} + \nu_{2,j} \sigma_j)}{B_n^6} t^6 e^{-t^2/12}.$$

Используя простой факт, что $\nu_{r_1,k} \leq 2\nu_{r_2,k}^{r_1/r_2}$ для любых положительных $r_2 \geq r_1$, и неравенство Гёльдера, мы получим

$$I_1 \leq c \left(\frac{\nu_4}{B_n^4} + \frac{\nu_4^{1/2} K_n^{1/2}}{B_n^4} + \frac{\nu_3^2}{B_n^6} + \frac{\nu_3^{4/3} L_n^{2/3}}{B_n^6} \right). \quad (5)$$

Утверждение теоремы вытекает из оценок (2), (3), (5) и леммы 1.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, проф. В. В. Ульянову, за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem. — Lecture Notes in Math., 1968, v. 330, p. 531–543.
2. Паулаускас В. Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II. — Литов. матем. сб., 1969, т. 9, № 4, с. 791–815.

3. Ротарь В. И. Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 4, с. 774–790; 1978, т. 23, в. 1, с. 55–66.
4. Sazonov V. V., Ul'yanov V. V. On the accuracy of normal approximation. — J. Multivariate Anal., 1982, v. 12, № 3, p. 371–384.
5. Бенджус В. Новый подход к аппроксимациям в теории вероятностей и теории операторов. — Liet. Matem. Rink., 2003, т. 43, № 4, с. 444–470.
6. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
16.V.2008

© 2008 г.

LUO S.*

ON COVARIANCE AND QUANTUM FISHER INFORMATION¹⁾

Для квантового состояния и множества наблюдаемых можно построить ассоциированную матрицу ковариаций и естественную матрицу квантовой информации Фишера. Эти две матрицы характеризуют неопределенность и информацию, содержащиеся в наблюдаемых для соответствующего состояния. В статье установлено неравенство между двумя матрицами. Это неравенство можно интерпретировать как общее квантование принципа неопределенности Гейзенберга с точки зрения статистического оценивания. В частности, из этого неравенства следует новое соотношение неопределенности, которое уточняет знаменитое соотношение неопределенности Шрёдингера.

Ключевые слова и фразы: ковариация, квантовая информация Фишера, соотношения неопределенности, детерминант.

1. Introduction. The mathematical aspect of quantum mechanics, conveniently formulated in a Hilbert space framework [15], can be most efficiently and elegantly interpreted in the language of probability and statistics [9]. In generic situations, there are irreducible randomness in both quantum states, which are represented by density operators (positive operators with unit trace), and observables, which are represented by self-adjoint operators. For simplicity, we will work in finite dimensional Hilbert spaces. However, in principle we can follow the method given in [9] to generalize these arguments to embrace infinite dimensional cases.

Given a quantum state ρ and a set of observables $H_1, \dots, H_n$, the covariance matrix $C := (C_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$ is defined as

$$C_{\alpha\beta} := \text{cov}_\rho(H_\alpha, H_\beta) \equiv \text{tr } \rho H_\alpha H_\beta - (\text{tr } \rho H_\alpha)(\text{tr } \rho H_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Here tr denotes trace. In particular, $V(\rho, H_\alpha) := C_{\alpha\alpha}$ is the variance of the observable H_α in the state ρ . It should be remarked that the matrix (1) is only a formal analog of the classical covariance matrix, and it does not refer to a single quantum measurement.

In the context of two observables which are often incompatible (non-commutative), the celebrated Heisenberg uncertainty relation (cf. [1], [9])

$$V(\rho, H_1) V(\rho, H_2) \geq \frac{1}{4} |\text{tr } \rho [H_1, H_2]|^2 \quad (2)$$

is often interpreted as setting a fundamental limit to the accuracy of simultaneous measurement of the observables H_1 and H_2 in terms of their commutator $[H_1, H_2] := H_1 H_2 - H_2 H_1$,

* Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 100080 Beijing, P. R. China; e-mail: luosl@amt.ac.cn

¹⁾ This work is supported by NSFC (grants № 10571166 and 10771208) and by Science Fund for Creative Research Groups (grant № 10721101).