Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, О стохастических моделях и оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 3, 417–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:38:36

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 53
Выпуск 3, 2008 год
июль, август, сентябрь

© 2008 г.

ШИРЯЕВ А. Н.*

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ И ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ В ЗАДАЧАХ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ¹⁾

Настоящая статья является вступительной к тематическому выпуску²⁾, посвященному оптимальным и асимптотически оптимальным методам принятия решений в задачах скорейшего обнаружения изменений вероятностных характеристик у наблюдаемых процессов (задачи о «разладке»), а также некоторым общим вопросам теории оптимальных правил остановки, на которой основано решение этих задач.

Как вводная, статья преследует две цели: с одной стороны, дать *общую* модель, охватывающую разнообразные схемы, описывающие появление «разладки», и, с другой стороны, кратко описать те конкретные модели и те общие вопросы, относящиеся к теории оптимальных правил остановки, которые содержатся в публикуемых в настоящем выпуске статьях.

Ключевые слова и фразы: метод «контрольных карт», CUSUM-метод, задачи о «разладке», θ -модель, байесовская G -модель, моменты остановки, оптимальные правила остановки.

1. Введение

1.1. Первыми работами, в которых были предложены *статистические* методы контроля за ходом производственных процессов, были работы Уолтера Э. Шьюарта (Walter A. Shewhart, 1891–1967), публикация которых относится к 1920–30-м годам (см. [1], [2]). В этих работах был предложен метод «контрольных карт», который и поныне широко используется для обнаружения производственных «сбоев». Суть этого метода может быть описана следующим образом.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 08-01-00740, 08-01-91200-ЯФ).

²⁾ Содержание тематического выпуска (список авторов и подбор статей) было полностью сформировано А. Н. Ширяевым. — *Прим. гл. ред.*

Пусть получены измерения $x_1, x_2, \dots$, считающиеся наблюдениями над независимыми случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots$, имеющими гауссовское распределение $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma)$ при нормальном ходе производства и распределение $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma)$ при наступлении «сбоя», $\mu_1 \neq \mu_0$.

Метод «контрольных карт» предписывает поднимать «тревогу» о появлении «сбоя» в момент $\tau = \inf\{n \geq 1: |x_n - \mu_0| \geq 3\sigma\}$.

Для этого «правила 3σ » вероятность ложной тревоги α (на каждом шаге) равна $\mathbf{P}_{(\mu_0, \sigma)}\{|\xi_1 - \mu_0| \geq 3\sigma\} = 2\Phi(-3) \approx 0.0027$ и среднее время $\mathbf{E}_{(\mu_0, \sigma)}\tau$ до объявления ложной тревоги определяется формулой $\mathbf{E}_{(\mu_0, \sigma)}\tau = (1 - \alpha) + 2\alpha(1 - \alpha) + \dots = 1/\alpha \approx 370$. При заданном μ_1 нетрудно найти и вероятность правильного обнаружения «сбоя» $\beta = \mathbf{P}_{(\mu_1, \sigma)}\{|\xi_1 - \mu_0| \geq 3\sigma\}$ и $\mathbf{E}_{(\mu_1, \sigma)}\tau$.

Как отмечено, метод «контрольных карт» нашел широкое применение, и связано это, прежде всего, с их простотой в реальной работе. В то же самое время видны и недочеты этого метода. Довольно-таки понятно, что этот метод будет давать хорошие результаты по быстрому обнаружению «сбоев», когда отклонение μ_1 от μ_0 значительно. Но при μ_1 , близких к μ_0 , эффективность будет мала. Кроме того, надо иметь в виду, что в этом методе не учитывается возможная корреляция в наблюдаемых данных, которая имеет место в случаях, когда интервал между наблюдениями мал.

Предположение гауссовости также можно подвергать критике, и, конечно, вопрос об оптимальности (даже в гауссовском случае) метода «контрольных карт» является далеко не простым (см. об этом далее раздел 5).

1.2. Высказанные замечания привели к появлению более изощренных методов обнаружения «сбоя», характеризующихся тем, что решение в каждый момент времени n принимается не только по значению x_n , но в зависимости от всей «истории» $(x_1, \dots, x_n)$.

Именно на этом пути появились так называемый метод «кумулятивных сумм» (CUSUM — Cumulative Sums; Пейдж [3], [4]), метод «экспоненциально взвешенных скользящих средних» (EWMA — Exponentially Weighted Moving Average; Робертс [5], [6]). См. также [7], [8]. Новые подходы к задачам скорейшего обнаружения были представлены в докладе А. Н. Колмогорова и А. Н. Ширяева «Применение марковских процессов к обнаружению разладки производственного процесса» на VI Совещании по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 5–10 сентября 1960 г.)¹⁾. Развитием этих подходов стали работы [9]–[12].

Вопросы эффективности разных методов наискорейшего обнаруже-

¹⁾ Доклад состоялся на секции «Марковские процессы» на вечернем заседании 6 сентября. (См. информацию о VI Совещании в VI томе нашего журнала (в. 1, с. 141).) Текст доклада не был опубликован. — *Прим. ред.*

ния естественно изучать в рамках общей теории оптимальных правил остановки, отождествляя моменты подачи сигнала о появлении «сбоя», «разладки», «спонтанно возникающего эффекта» с моментами остановки (см. [13], [14]).

1.3. В настоящем выпуске представлены работы по оптимальным правилам остановки с акцентом, как правило, на проблематику скорейшего обнаружения. К этой проблематике, имеющей традиционные области применения (контроль за ходом производственных процессов, радиолокация, сейсмология и др.), в последнее время проявляется значительное внимание в связи с такими явлениями, как биотерроризм, инфекционные болезни [15], [16], компьютерные интервенции [17]. (См. также статьи в двух тематических выпусках журнала «Sequential Analysis» [18] и библиографию в них.) Для удобства читателя в разделе 6 будут даны краткие аннотации публикуемых в настоящем выпуске статей с описанием их значения для общей теории и их интереса для приложений.

В разделе 2 будут предложены вероятностные модели, предназначенные для формализации различных задач о «разладке». В разделах 3–5 описываются базисные статистики и указываются решения или пути решения некоторых задач о разладке. Для простоты все изложение здесь ведется для дискретного времени. Предложенные в разделе 2 модели легко переносятся и на случай непрерывного времени (в этой связи укажем на недавнюю работу [19], о которой нам сообщил А. А. Новиков).

2. Вероятностно-статистические « θ -модели» и байесовские « G -модели»

2.1. Будем отправляться от *бинарного* вероятностно-статистического фильтрованного эксперимента

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}; \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty), \quad (1)$$

где $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ — фильтрация, или поток σ -алгебр таких, что $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ с $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$.

Меру $\mathbf{P}^0$ в (1) будем отождествлять с вероятностным распределением на $(\Omega, \mathcal{F})$, когда «разладка» присутствует с самого начала ($\theta = 0$). Мера $\mathbf{P}^\infty$ отвечает случаю отсутствия «разладки» вообще ($\theta = \infty$).

Через $\mathbf{P}_n^0 = \mathbf{P}^0|_{\mathcal{F}_n}$ и $\mathbf{P}_n^\infty = \mathbf{P}^\infty|_{\mathcal{F}_n}$ обозначаем сужения мер $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ на $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$.

Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, доминирующая меры $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$. (В качестве таковой можно взять меру $\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^0 + \mathbf{P}^\infty)$.)

Обозначая $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_n}$, $n \geq 0$, положим

$$L_n^0 = \frac{d\mathbf{P}_n^0}{d\mathbf{P}_n}, \quad L_n^\infty = \frac{d\mathbf{P}_n^\infty}{d\mathbf{P}_n} \quad \text{и} \quad L^0 = \frac{d\mathbf{P}^0}{d\mathbf{P}}, \quad L^\infty = \frac{d\mathbf{P}^\infty}{d\mathbf{P}}$$

— соответствующие производные Радона–Никодима.

Понятно, что $L_n^0 = \mathbf{E}(L^0 \mid \mathcal{F}_n)$ и $L_n^\infty = \mathbf{E}(L^\infty \mid \mathcal{F}_n)$ ($\mathbf{P}$ -п.н.), где $\mathbf{E}$ — усреднение по мере $\mathbf{P}$.

Через $L_n = L_n^0/L_n^\infty$ обозначаем производную Лебега (абсолютно непрерывной компоненты меры $\mathbf{P}_n^0$ по отношению к мере $\mathbf{P}_n^\infty$), определяемую из разложения Лебега: для всякого $A \in \mathcal{F}_n, n \geq 0$,

$$\mathbf{P}_n^0(A) = \mathbf{E}^\infty \left[\frac{L_n^0}{L_n^\infty} I(A) \right] + \mathbf{P}_n^0(A \cap \{L_n^\infty = 0\}). \tag{2}$$

(Здесь $\mathbf{E}^\infty$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^\infty$; неопределенность $0/0$ в отношении $L_n = L_n^0/L_n^\infty$ понимается как 0.) По аналогии с обозначением $\frac{d\mathbf{P}_n^0}{d\mathbf{P}_n^\infty}$ для производной Радона–Никодима (в случае $\mathbf{P}_n^0 \ll \mathbf{P}_n^\infty$) логично было бы L_n обозначать также $\left[\frac{d\mathbf{P}_n^0}{d\mathbf{P}_n^\infty} \right]_{\text{Leb}}$.

2.2. Будем связывать с (равномерно интегрируемыми) мартингалами $(L_n^0)_{n \geq 0}$ и $(L_n^\infty)_{n \geq 0}$ их стохастические логарифмы (см. [20]) $M^0 = (M_n^0)_{n \geq 0}$ и $M^\infty = (M_n^\infty)_{n \geq 0}$, определяемые формулами

$$M_n^0 = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L_k^0}{L_{k-1}^0}, \quad M_n^\infty = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L_k^\infty}{L_{k-1}^\infty}, \tag{3}$$

где $\Delta L_k^0 = L_k^0 - L_{k-1}^0, \Delta L_k^\infty = L_k^\infty - L_{k-1}^\infty$ и $M_0^0 = M_0^\infty = 0$.

Из (3) следует, что

$$L_n^0 = \mathcal{E}(M^0)_n, \quad L_n^\infty = \mathcal{E}(M^\infty)_n, \tag{4}$$

где принято стандартное обозначение

$$\mathcal{E}(M)_n = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M_k) \tag{5}$$

для (дискретной) стохастической экспоненты (см. [20]) от $M = (M_k)_{k \geq 0}$ с $M_0 = 0$.

Из (3) также находим, что ($\mathbf{P}$ -п.н.)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\Delta M_n^0| \mid \mathcal{F}_{n-1}] &\leq \mathbf{E} \left[\left| \frac{\Delta L_n^0}{L_{n-1}^0} \right| \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \leq 1 + \mathbf{E} \left[\frac{L_n^0}{L_{n-1}^0} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{L_{n-1}^0} \mathbf{E}[L_n^0 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq 2. \end{aligned}$$

В то же самое время $\mathbf{E}[M_n^0 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}^0$ ($\mathbf{P}$ -п.н.). Следовательно (см. [21, гл. VII, § 1, теорема 1]), последовательность $M^0 = (M_n^0)_{n \geq 0}$ является локальным мартингалом. То же верно и для $M^\infty = (M_n^\infty)_{n \geq 0}$.

2.3. Для каждого $\theta \in \overline{\mathbf{N}} (= \{0, 1, 2, \dots, \infty\})$ определим локальные мартингалы $M^\theta = (M_n^\theta)_{n \geq 0}$ по формулам: $M_0^\theta = 0$ и для $n \geq 1$

$$\Delta M_n^\theta = I(n < \theta) \Delta M_n^\infty + I(n \geq \theta) \Delta M_n^0. \tag{6}$$

По локальному мартингалу M^θ построим на $(\Omega, \mathcal{F})$ вероятностную меру $\mathbf{P}^\theta$, полагая для $A \in \mathcal{F}$ ($= \mathcal{F}_\infty$)

$$\mathbf{P}^\theta(A) = \mathbf{E}[I(A) \mathcal{E}(M^\theta)_\infty], \quad \text{где } \mathcal{E}(M^\theta)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(M^\theta)_n. \quad (7)$$

Покажем, что $\mathcal{E}(M^\theta)_\infty \geq 0$ и $\mathbf{E}\mathcal{E}(M^\theta)_\infty = 1$, откуда будет следовать, что определенная формулой (7) мера $\mathbf{P}^\theta$ действительно является вероятностной мерой.

Для $\theta = 0$ и $\theta = \infty$ меры, определяемые правыми частями в (7), очевидно, совпадают с исходными мерами $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$. Для $1 \leq \theta \leq n$

$$\mathcal{E}(M^\theta)_n = \mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1} \frac{\mathcal{E}(M^0)_n}{\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}}. \quad (8)$$

(Если $\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1} = 0$, то $\mathcal{E}(M^0)_n = 0$ для всех $n \geq \theta$ и отношение $\mathcal{E}(M^0)_n / \mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}$ полагается равным нулю.)

Из (8) для $1 \leq \theta \leq n$ находим, что

$$\mathcal{E}(M^\theta)_n = \mathcal{E}(M^0)_n \frac{\mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1}}{\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}}, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}(M^\theta)_\infty = \mathcal{E}(M^0)_\infty \frac{\mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1}}{\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}}. \quad (10)$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{E}(M^\theta)_\infty \geq 0$ и что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathcal{E}(M^\theta)_\infty &= \mathbf{E}\mathbf{E}\left[\mathcal{E}(M^0)_\infty \frac{\mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1}}{\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}} \mid \mathcal{F}_{\theta-1}\right] \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{\mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1}}{\mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}} \mathbf{E}[\mathcal{E}(M^0)_\infty \mid \mathcal{F}_{\theta-1}]\right) = \mathbf{E}\mathcal{E}(M^\infty)_{\theta-1} = 1, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{E}[\mathcal{E}(M^0)_\infty \mid \mathcal{F}_{\theta-1}] = \mathbf{E}[L_\infty^0 \mid \mathcal{F}_{\theta-1}] = L_{\theta-1}^0 = \mathcal{E}(M^0)_{\theta-1}$.

В случае $n < \theta$ из (6) находим, что

$$\mathcal{E}(M^\theta)_n = \mathcal{E}(M^\infty)_n, \quad (11)$$

где, согласно (4), $\mathcal{E}(M^\infty)_n = L_n^\infty \geq 0$ и, очевидно, $\mathbf{E}\mathcal{E}(M^\infty)_n = \mathbf{E}L_n^\infty = \mathbf{P}_n(\Omega) = 1$.

Обозначая $L_n^\theta = \mathcal{E}(M^\theta)_n$ ($= \frac{d\mathbf{P}_n^\theta}{d\mathbf{P}_n}$), из (6)–(11) получаем, что

$$L_n^\theta = I(n < \theta) L_n^\infty + I(n \geq \theta) L_n^0 \frac{L_{\theta-1}^\infty}{L_{\theta-1}^0}, \quad (12)$$

где $L_{-1}^0 = L_{-1}^\infty = 1$, $L_0^0 = L_0^\infty = 1$.

Формуле (12) можно придать следующий компактный вид:

$$L_n^\theta = L_{\theta-1}^\infty \frac{L_n^0}{L_{(\theta-1) \wedge n}^0}. \quad (13)$$

О п р е д е л е н и е 1. Фильтрованный вероятностно-статистический эксперимент

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}; \mathbf{P}^\theta, \theta \in \overline{\mathbf{N}}), \quad (14)$$

где меры $\mathbf{P}^\theta$ определены формулой (7), называем θ -моделью, построенной по бинарному фильтрованному вероятностно-статистическому эксперименту $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}; \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty)$.

П р и м е р 1. Пусть $\Omega = \mathbf{R}^\infty$ — пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, и пусть $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ — две вероятностные меры на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$, а $\mathbf{P}_n^0$ и $\mathbf{P}_n^\infty$ — сужения мер $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ на σ -алгебру $\sigma(x: x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$. Предположим, что $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ имеют плотности $f_n^0(x_1, \dots, x_n)$ и $f_n^\infty(x_1, \dots, x_n)$, скажем, по n -мерной лебеговой мере $d\mathbf{P}_n$. Тогда $L_n^0(x) = f_n^0(x_1, \dots, x_n)$, $L_n^\infty(x) = f_n^\infty(x_1, \dots, x_n)$ и для $1 < \theta \leq n$

$$\begin{aligned} L_n^\theta(x) &= f_{\theta-1}^\infty(x_1, \dots, x_n) \frac{f_n^0(x_1, \dots, x_n)}{f_n^\infty(x_1, \dots, x_n)} \\ &= f_{\theta-1}^\infty(x_1, \dots, x_{\theta-1}) f_{n, \theta-1}^0(x_\theta, \dots, x_n | x_1, \dots, x_{\theta-1}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $f_{n, \theta-1}^0(x_\theta, \dots, x_n | x_1, \dots, x_{\theta-1})$ — условная плотность. В случае независимых наблюдений имеем

$$L_n^\theta(x) = f_1^\infty(x_1) \cdots f_{\theta-1}^\infty(x_{\theta-1}) f_\theta^0(x_\theta) \cdots f_n^0(x_n) \quad (16)$$

с естественными обозначениями для одномерных плотностей.

2.4. Если в « θ -моделях» параметр θ был просто параметром из множества $\overline{\mathbf{N}}$, то в определяемых ниже « G -моделях» под θ понимается случайная величина с функцией распределения G .

Пусть $\Omega' = \mathbf{N} (= \{0, 1, 2, \dots\})$, $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbf{N})$ и $\mathbf{P}' = \mathbf{P}'(\cdot)$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}'$, определяемая функцией распределения $G = G(n)$, $n \geq 0$.

Положим $\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, $\overline{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{F}'$, и пусть для $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}'$

$$\overline{\mathbf{P}}^G(A \times B) = \sum_{\theta \in B} \mathbf{P}^\theta(A) \Delta G(\theta). \quad (17)$$

Будем обозначать продолжение этой меры на $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ тем же символом $\overline{\mathbf{P}}^G$.

О п р е д е л е н и е 2. Фильтрованный вероятностно-статистический эксперимент

$$(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}; \overline{\mathbf{P}}^G),$$

где меры $\overline{\mathbf{P}}^G$ определены формулой (17), называем G -моделью, построенной по бинарному фильтрованному вероятностно-статистическому эксперименту $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}; \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty)$ и распределению вероятностей $G = G(n)$, $n \geq 0$.

Если $A \in \mathcal{F}_n$, то будем полагать $\mathbf{P}^G(A) = \overline{\mathbf{P}}^G(A \times \mathbf{N})$. Тогда из (17) получаем

$$\mathbf{P}^G(A) = \sum_{\theta=0}^n \mathbf{P}_n^\theta(A) \Delta G(\theta) + (1 - G(n)) \mathbf{P}_n^\infty(A), \quad (18)$$

где учтено то, что $\mathbf{P}_n^\theta(A) = \mathbf{P}_n^\infty(A)$ для $A \in \mathcal{F}_n$, если $\theta > n$.

Полагая $\mathbf{P}_n^G = \mathbf{P}^G|_{\mathcal{F}_n}$ и $L_n^G = \frac{d\mathbf{P}_n^G}{d\mathbf{P}_n^A}$, находим, что

$$L_n^G = \sum_{\theta=0}^{\infty} L_n^\theta \Delta G(\theta). \quad (19)$$

Учитывая (12), приходим к следующему представлению:

$$L_n^G = L_n^0 \sum_{\theta=0}^n \frac{L_{\theta-1}^\infty}{L_{\theta-1}^0} \Delta G(\theta) + L_n^\infty (1 - G(n)), \quad (20)$$

где $L_{-1}^\infty = L_{-1}^0 = 1$.

П р и м е р 2 (см. [9], [11]). Пусть θ имеет геометрическое распределение G ($G(0) = \pi$, $\Delta G(n) = (1 - \pi) q^{n-1} p$, $n \geq 1$). Ясно, что

$$\mathbf{P}'\{\theta = 0\} = \pi \quad (= G(0)), \quad \mathbf{P}'(\theta = k \mid \theta > 0) = q^{k-1} p, \quad (21)$$

где $0 \leq \pi < 1$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

Поэтому

$$L_n^G = \pi L_n^0 + (1 - \pi) \sum_{k=0}^{n-1} p q^k \frac{L_k^\infty}{L_k^0} + (1 - \pi) q^n L_n^\infty. \quad (22)$$

Отсюда для случая, рассмотренного в примере 1, находим, что плотность $f_n^G(x_1, \dots, x_n)$ ($= L_n^G$) имеет вид

$$\begin{aligned} f_n^G(x_1, \dots, x_n) &= \pi f_n^0(x_1, \dots, x_n) \\ &+ (1 - \pi) f_n^0(x_1, \dots, x_n) \sum_{k=0}^{n-1} p q^k \frac{f_k^\infty(x_1, \dots, x_k)}{f_k^0(x_1, \dots, x_k)} \\ &+ (1 - \pi) q^n f_n^\infty(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (23)$$

что с учетом (15) можно переписать как

$$\begin{aligned} f_n^G(x_1, \dots, x_n) &= \pi f_n^0(x_1, \dots, x_n) \\ &+ (1 - \pi) \sum_{k=0}^{n-1} p q^k f_k^\infty(x_1, \dots, x_k) f_{n,k}^0(x_{k+1}, \dots, x_n \mid x_1, \dots, x_k) \\ &+ (1 - \pi) q^n f_n^\infty(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (24)$$

3. Базисные статистики в « θ -моделях»

3.1. Отношения правдоподобия $L_n^0 = \frac{dP_n^0}{dP_n^\infty}$, $L_n^\infty = \frac{dP_n^\infty}{dP_n^\infty}$ и $L_n^\theta = \frac{dP_n^\theta}{dP_n^\infty}$ играют ключевую роль при построении для « θ -моделей» достаточных статистик в задачах различения гипотез, оценки параметров, скорейшего обнаружения.

В задаче различения двух гипотез H_N^0 и H_N^∞ о том, что для $n \leq N$ «действует» или распределение P_N^0 , или P_N^∞ , достаточной статистикой (в постановке Неймана–Пирсона) является статистика $L_N = L_N^0/L_N^\infty$ ($= \left[\frac{dP_N^0}{dP_N^\infty} \right]_{\text{Leb}}$), сводящаяся к отношению правдоподобия $\frac{dP_N^0}{dP_N^\infty}$, когда $P_N^0 \ll P_N^\infty$.

Последовательность $L = (L_N)_{N \geq 0}$ лежит и в основе вальдовского метода последовательного различения двух гипотез H^0 и H^∞ (о том, что действующей мерой является P^0 или P^∞). Метод «контрольных карт» Шьюарта, являющийся одним из первых методов для обнаружения «сбоев» в вероятностных характеристиках наблюдаемого процесса, основан, в сущности, на рассмотрении поведения отношений

$$S_n = \frac{L_n^n}{L_n^\infty}, \quad n \geq 0. \quad (25)$$

3.2. Метод кумулятивных сумм (CUSUM-метод, [3], [4]) основан на статистиках

$$T_n = \max_{\theta \geq 0} \frac{L_n^\theta}{L_n^\infty}, \quad n \geq 0. \quad (26)$$

(Если $P_n = P_n^\infty$, то $L_n^\infty = 1$ и $L_n^\theta = \frac{dP_n^\theta}{dP_n^\infty}$.) Согласно (13), $L_n^\theta = L_n^\infty$ для $\theta > n$. Поэтому

$$T_n = \max \left(1, \max_{0 \leq \theta \leq n} \frac{L_n^\theta}{L_n^\infty} \right) \quad (27)$$

и, опять же в силу (13),

$$T_n = \max \left(1, \max_{0 \leq \theta \leq n} \left(\frac{L_n^0}{L_n^\infty} \frac{L_{\theta-1}^\infty}{L_{\theta-1}^0} \right) \right) = \max \left(1, \max_{0 \leq \theta \leq n} \frac{L_n}{L_{\theta-1}} \right), \quad \text{где } L_{-1} = 1.$$

Положим $Z_n = \ln L_n$ и $\gamma_n = \ln T_n$. Тогда видим, что

$$\gamma_n = \max \left(0, Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta \right). \quad (28)$$

Покажем, что для γ_n , $n \geq 1$, справедливы также следующие полезные соотношения:

$$\gamma_n = Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta, \quad (29)$$

$$\gamma_n = \max(0, \gamma_{n-1} + \Delta Z_n), \quad (30)$$

где $\gamma_0 = 0$, $\Delta Z_n = Z_n - Z_{n-1} = \ln(L_n/L_{n-1})$.

Действительно, пусть в (28) $Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta < 0$. Тогда $\gamma_n = 0$ и в то же время

$$Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta = Z_n - \min(Z_n, \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta) = 0,$$

т.е. (29) выполнено.

Если же $Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta \geq 0$, то из (28) получаем $\gamma_n = Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta$. Но $Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta = Z_n - \min(Z_n, \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta) = Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta$. Тем самым, $\gamma_n = Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta$, т.е. (29) снова выполнено.

Для доказательства (30) достаточно заметить, что в силу (28) и (29) $\gamma_n = \max(0, Z_{n-1} - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta + \Delta Z_n) = \max(0, \gamma_{n-1} + \Delta Z_n)$. В разделе 5 будет рассмотрена одна из задач скорейшего обнаружения в « θ -моделях», в которых CUSUM-статистика является оптимальной.

4. Базисные статистики в « G -моделях»

Обратимся к « G -модели», введенной в п. 2.4 (определение 2).

Для $n = 0$ положим $\pi_0 = \pi$ и для $n \geq 1$

$$\pi_n = \bar{\mathbf{P}}^G(\theta \leq n | \mathcal{F}_n). \quad (31)$$

Из формулы Байеса находим

$$\pi_n = \frac{\sum_{\theta \leq n} L_n^\theta \Delta G(\theta)}{L_n^G}. \quad (32)$$

Во многих случаях гораздо удобнее оперировать не с π_n , а с (эквивалентной) статистикой

$$\varphi_n = \frac{\pi_n}{1 - \pi_n}, \quad (33)$$

для которой из (20) и (13) при $n \geq 1$ получаем следующие представления:

$$\varphi_n = \frac{\sum_{\theta \leq n} L_n^\theta \Delta G(\theta)}{\sum_{\theta > n} L_n^\theta \Delta G(\theta)} = \frac{L_n^0 \sum_{\theta \leq n} (L_{\theta-1}^\infty / L_{\theta-1}^0) \Delta G(\theta)}{(1 - G(n)) L_n^\infty}. \quad (34)$$

Отсюда с учетом введенного ранее обозначения $L_n = L_n^0 / L_n^\infty$ находим представление

$$\varphi_n = \frac{1}{1 - G(n)} \sum_{\theta \leq n} \frac{L_n}{L_{\theta-1}} \Delta G(\theta), \quad (35)$$

из которого получаем рекуррентные соотношения

$$\varphi_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} \left[\frac{\Delta G(n)}{1 - G(n)} + \frac{1 - G(n-1)}{1 - G(n)} \varphi_{n-1} \right] \quad \text{с} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{1 - \pi}. \quad (36)$$

Пример 3 (см. [9], [11]). Пусть G — геометрическое распределение (см. (21)) с $\Delta G(0) = G(0) = \pi$, $\Delta G(n) = (1 - \pi) q^{n-1} p$ для $n \geq 1$. Для этого распределения $1 - G(n) = \mathbf{P}'\{\theta > n\} = (1 - \pi) q^n$,

$$\frac{\Delta G(n)}{1 - G(n)} = \frac{p}{q}, \quad \frac{1 - G(n-1)}{1 - G(n)} = \frac{1}{q}, \tag{37}$$

и из (36) находим, что

$$\varphi_n = \frac{L_n}{q L_{n-1}} [p + \varphi_{n-1}]. \tag{38}$$

Если положить $\varphi_n(p) = \varphi_n/p$, то получим

$$\varphi_n(p) = \frac{L_n}{q L_{n-1}} [1 + \varphi_{n-1}(p)]. \tag{39}$$

Пусть $\psi_n = \lim_{p \downarrow 0} \varphi_n(p)$ и $\varphi_0 = 0$. Из (39) следует, что

$$\psi_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} [1 + \psi_{n-1}], \quad n \geq 1, \tag{40}$$

с $\psi_0 = 0$.

Если в примере 1

$$f_n^0(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f^0(x_i), \quad f_n^\infty(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f^\infty(x_i)$$

(случай наблюдений, независимых и одинаково распределенных по каждой из мер $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$), то (40) принимает следующий вид:

$$\psi_n = \frac{f^0(x_n)}{f^\infty(x_n)} [1 + \psi_{n-1}]. \tag{41}$$

Из (40) получаем также, что

$$\Delta \psi_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} + \psi_{n-1} \left(\frac{L_n}{L_{n-1}} - 1 \right). \tag{42}$$

Отсюда видно, что $\mathbf{E}^\infty[\Delta \psi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 1$ или, равносильно,

$$\mathbf{E}^\infty[\psi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 + \psi_{n-1}.$$

Таким образом, относительно меры $\mathbf{P}^\infty$ последовательность $(\psi_n)_{n \geq 0}$ образует неотрицательный субмартингал. В статистической литературе последовательные методы, основанные на принятии решений на основе наблюдений за $(\psi_n)_{n \geq 0}$, получили название «процедур Ширяева–Робертса».

5. О некоторых постановках задач скорейшего обнаружения и их решениях

5.1. Рассмотрим поток σ -алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, входящий в определение бинарного вероятностно-статистического эксперимента (1). Пусть τ — момент остановки (марковский момент, т.е. случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения в множестве $\bar{\mathbf{N}} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ и такая, что для каждого $n \geq 0$ событие $\{\tau \leq n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$).

Как для « θ -моделей», так и для « G -моделей» момент τ будем идентифицировать с моментом объявления тревоги о том, что произошла «разладка». Если θ — момент появления «разладки», то с каждым τ можно связать следующие три события:

$$\{\tau < \theta\}, \quad \{\tau = \theta\}, \quad \{\tau > \theta\},$$

имеющие ясную интерпретацию «ложной тревоги», «правильной подачи сигнала тревоги» и «подачи сигнала тревоги с запаздыванием».

Чтобы судить о том, в каком смысле является эффективным описанный выше метод «контрольных карт», рассмотрим « G -модель», описанную в примере 2 (с $\pi = 0$). Будем называть момент τ^* оптимальным (или G -оптимальным), если

$$\bar{\mathbf{P}}^G\{\tau^* = \theta\} = \sup_{\tau} \bar{\mathbf{P}}^G\{\tau = \theta\}. \quad (43)$$

Введем (для общих « G -моделей») вероятность

$$\tilde{\pi}_n = \bar{\mathbf{P}}^G(\theta = n | \mathcal{F}_n), \quad n \geq 1.$$

По формуле Байеса

$$\tilde{\pi}_n = \frac{L_n^n \Delta G(n)}{L_n^G}. \quad (44)$$

По формуле (32)

$$1 - \pi_n = \frac{L_n^\infty (1 - G(n))}{L_n^G}. \quad (45)$$

Из (44) и (45) видим, что

$$\tilde{\pi}_n = (1 - \pi_n) \frac{L_n}{L_{n-1}} \frac{\Delta G(n)}{1 - G(n)}, \quad (46)$$

где $L_n = L_n^0 / L_n^\infty$. Для « G -модели», описанной в примере 2, из (37), (15), и (46) находим, что

$$\tilde{\pi}_n = (1 - \pi_n) \frac{f^0(x_n)}{f^\infty(x_n)} \frac{p}{q}.$$

Пара $(\pi_n, x_n)_{n \geq 0}$ образует (по мере $\overline{\mathbf{P}}^G$) марковскую последовательность и

$$\sup_{\tau} \overline{\mathbf{P}}^G \{ \tau = \theta \} = \sup_{\tau} \overline{\mathbf{E}}^G \tilde{\pi}_{\tau} = \sup_{\tau} \overline{\mathbf{E}}^G g(\pi_{\tau}, x_{\tau}), \tag{47}$$

где $g(\pi, x) = (1 - \pi)(f^0(x)/f^{\infty}(x))(p/q)$.

Тем самым, отыскание оптимального момента τ^* в (43) сводится к отысканию оптимального момента в задаче

$$\overline{\mathbf{E}}^G g(\pi_{\tau^*}, x_{\tau^*}) = \sup_{\tau} \overline{\mathbf{E}}^G g(\pi_{\tau}, x_{\tau}). \tag{48}$$

В [22] показано, что

$$\tau^* = \inf \left\{ n \geq 1: \frac{f^0(x_n)}{f^{\infty}(x_n)} \geq c^* \right\}, \tag{49}$$

где c^* — некоторая константа, определяемая по p , f^0 и f^{∞} . Здесь важно подчеркнуть, что хотя задача (48) формулируется как задача для *двумерной* марковской последовательности, ответ (49) носит «одномерный» характер, будучи определяемым лишь поведением второй компоненты $(x_n)_{n \geq 0}$.

Если $f^0(x)$ и $f^{\infty}(x)$ являются гауссовскими плотностями с параметрами (μ_0, σ) и (μ_{∞}, σ) , где $\mu_0 > \mu_{\infty}$, то момент τ^* принимает следующий вид:

$$\tau^* = \inf \{ n \geq 1: x_n \geq c^*(\mu_0, \mu_{\infty}, \sigma^2, p) \},$$

где $c^*(\mu_0, \mu_{\infty}, \sigma^2, p)$ — некоторая константа. (Ср. с методом «контрольных карт» Шьюарта, описанным в п. 1.1.)

5.2. Приведем, следуя статьям [11], [12], [24]–[30], формулировки ряда основных задач скорейшего обнаружения, которым посвящено значительное число работ. Об относящихся сюда работах, помещаемых в настоящий выпуск, будет сказано далее в разделе 6.

Пусть $\mathfrak{M}_{(\alpha)} = \{ \tau: \overline{\mathbf{P}}^G \{ \tau < \theta \} \leq \alpha \}$, где $0 < \alpha \leq 1$.

Вариант А (условно-экстремальная и байесовская постановки). Найти оптимальный момент $\tau_{(\alpha)}^*$, для которого

$$\overline{\mathbf{E}}^G (\tau_{(\alpha)}^* - \theta \mid \tau_{(\alpha)}^* \geq \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}} \overline{\mathbf{E}}^G (\tau - \theta \mid \tau \geq \theta). \tag{50}$$

Для решения этой условно-экстремальной задачи естественно обратиться к решению следующей байесовской задачи: найти оптимальный момент, на котором достигается

$$\mathbb{A}(c) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}} \left[\overline{\mathbf{P}}^G \{ \tau < \theta \} + c \overline{\mathbf{E}}^G (\tau - \theta)^+ \right]. \tag{51}$$

Вариант В (обобщенно-байесовская постановка). Пусть $\mathfrak{M}_{\geq T} = \{\tau < \infty: \mathbf{E}^\infty \tau \geq T\}$, где $T > 0$. Требуется найти оптимальный момент, на котором достигается

$$\mathbb{B}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \sum_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^\theta(\tau - \theta)^+. \quad (52)$$

Вариант С (первая минимаксная постановка). Найти оптимальный момент в задаче

$$\mathbb{C}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \sup_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta). \quad (53)$$

Вариант D (вторая минимаксная постановка). Найти оптимальный момент в задаче

$$\mathbb{D}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \sup_{\theta \geq 1} \operatorname{ess\,sup}_\omega \mathbf{E}^\theta((\tau - \theta)^+ \mid \mathcal{F}_{\theta-1})(\omega). \quad (54)$$

(По поводу других постановок, в частности, по поводу варианта E скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима наблюдения, см. [10]–[12], [23], [24].)

5.3. Обрисуем вкратце методы решения задач в вариантах A–D. В варианте A для каждого момента остановки справедливо представление

$$\overline{\mathbf{P}}^G\{\tau < \theta\} + c\overline{\mathbf{E}}^G(\tau - \theta)^+ = \overline{\mathbf{E}}^G\left\{(1 - \pi_\tau) + c \sum_{n=0}^{\tau-1} \pi_n\right\} \quad (55)$$

(в случае $\tau = 0$ сумма в (55) считается равной нулю).

В условиях примера 2 для независимых по каждой из мер $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ наблюдений $x_1, x_2, \dots$ последовательность $(\pi_n)_{n \geq 0}$ является марковской и из общей теории оптимальных правил остановки (см. [14], [25]) вытекает, что оптимальный момент τ_c^* существует и имеет следующий вид: $\tau_c^* = \inf\{n \geq 0: \pi_n \geq A(c)\}$, где $A(c)$ — некоторая константа. Если распределения $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ таковы, что для заданного α найдется $c = c(\alpha)$ такое, что $\overline{\mathbf{P}}^G\{\tau_{c(\alpha)}^* < \theta\} = \alpha$, то момент $\tau_{c(\alpha)}^*$ будет оптимальным в условно-экстремальной постановке в классе $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

Покажем, следуя [26], как в варианте В отыскание оптимального правила остановки можно свести к решению некоторой задачи об оптимальной остановке для приведенной выше последовательности $(\psi_n)_{n \geq 0}$ (см. (40)).

Поскольку $\xi^+ = \sum_{k=1}^\infty I(\xi \geq k)$, то $(\tau - \theta)^+ = \sum_{k=1}^\infty I(\tau - \theta \geq k) = \sum_{k \geq \theta+1} I(\tau \geq k)$ и, значит,

$$\mathbf{E}^\theta(\tau - \theta)^+ = \sum_{k=\theta+1}^\infty \mathbf{E}^\theta I(\tau \geq k) = \sum_{k=\theta+1}^\infty \mathbf{E}^k \left[I(\tau \geq k) \frac{d(\mathbf{P}^\theta \mid \mathcal{F}_{k-1})}{d(\mathbf{P}^k \mid \mathcal{F}_{k-1})} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=\theta+1}^{\infty} \mathbf{E}^k \left[I(\tau \geq k) \frac{L_{k-1}^{\theta}}{L_{k-1}^k} \right] = \sum_{k=\theta+1}^{\infty} \mathbf{E}^{\infty} \left[I(\tau \geq k) \frac{L_{k-1}^{\theta}}{L_{k-1}^k} \right] \\
&= \sum_{k=\theta+1}^{\infty} \mathbf{E}^{\infty} \left[I(\tau \geq k) \frac{L_{k-1}^0 L_{\theta-1}^{\infty} / L_{\theta-1}^0}{L_{k-1}^{\infty}} \right] \\
&= \sum_{k=\theta+1}^{\infty} \mathbf{E}^{\infty} \left[I(\tau \geq k) \frac{L_{k-1}}{L_{\theta-1}} \right].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\sum_{\theta=1}^{\infty} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta)^+ &= \mathbf{E}^{\infty} \sum_{\theta=1}^{\infty} \left[\sum_{k=\theta+1}^{\infty} I(\tau \geq k) \frac{L_{k-1}}{L_{\theta-1}} \right] \\
&= \mathbf{E}^{\infty} \sum_{\theta=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} I(\theta + 1 \leq k \leq \tau) \frac{L_{k-1}}{L_{\theta-1}} = \mathbf{E}^{\infty} \sum_{k=2}^{\tau} \left[\sum_{\theta=1}^{k-1} \frac{L_{k-1}}{L_{\theta-1}} \right] \\
&= \mathbf{E}^{\infty} \sum_{k=2}^{\tau} \psi_{k-1} = \mathbf{E}^{\infty} \sum_{k=1}^{\tau-1} \psi_k,
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq \tau}} \sum_{\theta=1}^{\infty} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq \tau}} \mathbf{E}^{\infty} \sum_{k=1}^{\tau-1} \psi_k. \quad (56)$$

Как и в варианте А, для отыскания $\mathbb{B}(T)$ в (52) надо рассматривать (согласно методу “множителей Лагранжа”) задачу

$$\inf_{\tau} \mathbf{E}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\tau-1} \psi_k - c\tau \right]. \quad (57)$$

В условиях примера 1 и в предположении независимости наблюдений $x_1, x_2, \dots$ по мерам $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^{\infty}$ из общей теории оптимальных правил остановки для марковских последовательностей (а $(\psi_n)_{n \geq 1}$ является таковой по мере $\mathbf{P}^{\infty}$) находим, что в (57) оптимальный момент τ_c^* имеет вид $\tau_c^* = \inf\{n \geq 1: \psi_n \geq B(c)\}$ с некоторой пороговой константой $B(c)$. Решение условно-экстремальной задачи (52) получается из решения задачи (57) точно так же, как в варианте А.

Точное решение минимаксной задачи в варианте С неизвестно (см. об этом варианте для случая непрерывного времени работу [26]).

Полезно заметить, что если несколько видоизменить данное выше определение $\mathbb{B}(T)$, а именно, положить

$$\mathbb{B}^0(T) = \inf_{\tau: \mathbf{E}^{\infty}_{\tau=T}} \sum_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta)^+, \quad (58)$$

то, поскольку

$$\sum_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta)^+ = \sum_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \mathbf{P}^{\theta}\{\tau \geq \theta\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \sum_{\theta \geq 1} \mathbf{P}^\theta\{\tau \geq \theta\} \\ &= \sup_{\theta \geq 1} \mathbf{E}^\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \mathbf{E}^\theta \tau, \end{aligned}$$

находим, что

$$T^{-1} \mathbb{B}^0(T) \leq C(T). \quad (59)$$

Вопрос об оптимальном моменте остановки в варианте $\mathbb{D}$ (введенном в [28]) решается проще, чем в варианте $\mathbb{C}$. Именно, в [27] показано, что оптимальным является CUSUM-метод. Точнее, момент $\tau_T^* = \inf\{n \geq 0: \gamma_n \geq D(T)\}$, где $D(T)$ — некоторая константа, является оптимальным в классе тех моментов остановки τ , для которых $\mathbf{E}^\infty \tau = T$. (См. также работы [31], [32], посвященные случаю непрерывного времени.)

6. О статьях, публикуемых в настоящем выпуске

Все публикуемые статьи естественным образом разбиваются на две группы — те, которые имеют дело со случайными последовательностями («дискретное время»), и те, которые оперируют со случайными процессами («непрерывное время»). Первая группа состоит из четырех статей, вторая — из семи.

6.1. Дискретное время. В стандартных постановках задач о разладке (раздел 2) исходят из предположения, что меры $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ в (1) известны. В работе *А. А. Боровкова* эти меры не предполагаются априори известными и о том, что происходит разладка, предлагается судить по изменениям некоторых их характеристик. В предположении независимости и одинаковой распределенности наблюдаемых величин $(x_1, x_2, \dots, x_{\theta-1})$ и $(x_\theta, x_{\theta+1}, \dots, x_n)$ по мерам $\mathbf{P}^\infty$ и $\mathbf{P}^0$ соответственно автор строит оценки $\theta^* = \theta^*(x_1, \dots, x_n)$ и изучает вопрос об асимптотическом поведении величин вида $\mathbf{P}_\theta\{\theta - \theta^* > k\}$ при $n \rightarrow \infty$, $n - \theta \rightarrow \infty$. Рассматривается также последовательное оценивание момента θ с помощью специальным образом сконструированных моментов ν . Изучается вопрос об асимптотическом поведении (при $n \rightarrow \infty$) вероятности ложной тревоги $\mathbf{P}_\theta\{\nu < \theta\}$ и среднего времени запаздывания $\mathbf{E}_\theta(\nu - \theta \mid \nu \geq \theta)$, когда сигнал о появлении разладки подается правильно.

Предметом исследования в статье *А. А. Новикова* являются AR(1)-случайные последовательности $X = (X_n)_{n \geq 0}$, описываемые рекуррентными соотношениями $X_n = \lambda X_{n-1} + \eta_n$, $n \geq 1$, $X_0 = x$, с независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \eta_2, \dots$. Для таких последовательностей автор, во-первых, рассматривает вопрос о свойствах моментов $\tau_a = \inf\{n \geq 0: X_n > a\}$ и $\tau_{a,b} = \inf\{n \geq 0: X_n > a \text{ или } X_n < b\}$ и, во-вторых, изучает вопрос о структуре оптимального момента остановки в задаче отыскания

$$V(x) = \sup \mathbf{E}_x[\rho^\tau g(X_\tau) I(\tau < \infty)],$$

где $\rho \in (0, 1)$, $g(x)$ — неотрицательная функция и супремум берется по всем моментам остановки τ . В случае экспоненциально распределенных «обновляющих» величин $\eta_1, \eta_2, \dots$ показывается, что оптимальный момент существует и имеет вид $\tau_{a^*} = \inf\{n \geq 0: X_n > a^*\}$, где для порога a^* указывается способ его нахождения.

Исследованию свойств распределений $\mathbf{P}\{\tau_a > t\}$ при $a \uparrow \infty$ для неотрицательных последовательностей $(X_n)_{n \geq 1}$, $X_0 = x$, образующих рекуррентную (по Харрису) марковскую цепь, посвящена работа М. Поллака и А. Г. Тартаковского. В теореме 1 этой работы приводятся условия, при которых (нормированное) распределение для момента τ_a (обозначаемое в работе N_A^x) является экспоненциальным. В качестве примеров подробно изучаются распределения момента τ_a для CUSUM-метода и метода Ширяева–Робертса.

В статье А. Г. Тартаковского рассматривается вопрос об асимптотических свойствах разных процедур скорейшего обнаружения в « θ -моделях» и байесовских « G -моделях». Основные результаты относятся к рассмотрению следующей задачи: найти $\inf \mathbf{E}^G(\tau - \theta | \tau \geq \theta)$ (в обозначениях разделов 2–5), где инфимум берется по классу тех моментов τ , для которых $\mathbf{P}^\infty\{\tau < \infty\} \leq \alpha$. Точное решение этой задачи неизвестно, и автор ограничивается построением асимптотически (при $\alpha \downarrow 0$) оптимальных методов первого порядка.

6.2. Непрерывное время. В работе В. И. Аркина и А. Д. Сластникова развивается вариационный подход к задачам об оптимальной остановке диффузионных процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$, суть которого состоит в следующем. В стандартных задачах об оптимальной остановке вида «найти $V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}_x e^{-\rho\tau} g(X_\tau)$ » обычно предполагается, что $\mathcal{M}$ — класс всех марковских моментов, для которых определены математические ожидания $\mathbf{E}_x e^{-\rho\tau} g(X_\tau)$. Вариационный подход, рассматриваемый в данной работе, заключается в следующем.

Пусть $\mathcal{G} = \{G\}$ — некоторый класс областей G в фазовом пространстве процесса X и $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ — класс моментов остановки, имеющих вид $\tau_G = \inf\{t \geq 0: X_t \in G\}$ при некотором $G \in \mathcal{G}$. Пусть

$$V_{\mathcal{G}}(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{G})} \mathbf{E}_x e^{-\rho\tau} g(X_\tau).$$

Понятно, что $V_{\mathcal{G}} = \sup_{G \in \mathcal{G}} \mathbf{E}_x e^{-\rho\tau_G} g(X_{\tau_G})$. Тем самым, отыскание $V_{\mathcal{G}}(x)$ можно проводить варьированием $\mathbf{E}_x e^{-\rho\tau_G} g(X_{\tau_G})$ по разным областям $G \in \mathcal{G}$. Зачастую при удачном выборе семейства $\mathcal{G}$ можно доказать, что $V_{\mathcal{G}}(x)$ на самом деле совпадает с функцией $V(x)$.

Работа Э. Борду и А. Киприану и работа Г. Пешкира относятся к отысканию оптимальных правил остановки в игровых задачах. Предполагается, что есть два игрока (sup-player и inf-player), каждый из которых может выбирать момент прекращения игры (τ и σ соответственно).

Если выбрана пара (τ, σ) , то «качество» такой игры описывается функцией

$$M_x(\tau, \sigma) = \mathbf{E}_x \left[G_1(\tau, Y_\tau) I(\tau < \sigma) + G_2(\sigma, Y_\sigma) I(\sigma < \tau) + G_3(\tau, Y_\tau) I(\tau = \sigma) \right],$$

где $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ — некоторый наблюдаемый обоими игроками случайный процесс с $Y_0 = x$. Пару (τ^*, σ^*) называют *равновесной по Нэшу* (Nash), если

$$M_x(\tau, \sigma^*) \leq M_x(\tau^*, \sigma^*) \leq M_x(\tau^*, \sigma)$$

для всех моментов остановки τ и σ и всех начальных состояний x .

Говорят, что осуществляется *равновесие по Штакельбергу* (Stackelberg), если

$$V^*(x) = V_*(x),$$

где $V^*(x) = \inf_\sigma \sup_\tau M_x(\tau, \sigma)$ и $V_*(x) = \sup_\tau \inf_\sigma M_x(\tau, \sigma)$. (Если пара (τ^*, σ^*) является равновесной по Нэшу, то имеет место и равновесие по Штакельбергу и $V^*(x) = V_*(x) = M_x(\tau^*, \sigma^*)$.) В работе Э. Борду и А. Киприану доказывается существование пары, равновесной по Нэшу, в стохастической игре, в которой

$$G_1 = G_3, \quad G_1(\tau, Y_\tau) = \exp \{ -q\tau + (x \vee \overline{X}_\tau) \},$$

$$G_2(\sigma, Y_\sigma) = e^{-q\sigma} (\exp \{ x \vee \overline{X}_\sigma \} + \delta \exp \{ X_\sigma \}),$$

где $\overline{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$ и $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — спектрально-отрицательный процесс Леви (т.е. процесс Леви, не имеющий положительных скачков и не являющийся отрицательным субординатором).

В работе Г. Пешкира основной результат (теорема 2.1) состоит в доказательстве того, что если $Y = X$, где $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — строго марковский непрерывный справа процесс, $G_1(\tau, Y_\tau) = G_1(X_\tau)$, $G_2(\sigma, Y_\sigma) = G_2(X_\sigma)$, $G_3(\tau, Y_\tau) = G_3(X_\tau)$, $G_1 \leq G_2 \leq G_3$ и $\mathbf{E}_x \sup_{t \geq 0} |G_i(X_t)| < \infty$, $i = 1, 2, 3$, то имеют место следующие соотношения:

$$\tilde{V}(x) \leq V_*(x) = V^*(x) \leq \hat{V}(x),$$

где $\tilde{V}(x)$ и $\hat{V}(x)$ — некоторые функции, специальным образом сконструированные по субгармоническим мажорантам F функции G_1 и супергармоническим минорантам функции G_2 . Более того, имеют место следующие импликации:

$$\tilde{V} = \hat{V} \iff (\text{существует равновесие по Нэшу}).$$

В разделе 5, где был рассмотрен ряд вариантов задач скорейшего обнаружения момента появления разладки (варианты А, В, С и D), было отмечено, что точное решение в минимаксном варианте С пока не удается получить. Это обстоятельство оправдывает исследования по отысканию асимптотически оптимальных (при $T \rightarrow \infty$) минимаксных правил остановки.

Именно этой цели служит работа *Е. В. Бурнаева, Е. А. Файнберга и А. Н. Ширяева*, посвященная отысканию асимптотически оптимальных (при $T \rightarrow \infty$) рандомизированных моментов остановки в задаче

$$\bar{C}(T) = \inf_{\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{M}}_T} \sup_{\theta} \mathbf{E}^{\theta}(\bar{\tau} - \theta \mid \bar{\tau} \geq \theta),$$

где $\bar{\mathcal{M}}_T$ — класс рандомизированных моментов $\bar{\tau}$ таких, что $\mathbf{E}^{\infty} \bar{\tau} = T$. Предполагается, что наблюдаемый процесс — это процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с

$$X_t = \mu(t - \theta)^+ + \sigma B_t,$$

где $\mu \neq 0$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. Определяя момент $\bar{\tau}_{A(T)}^*$ из $\bar{\mathcal{M}}_T$ в виде

$$\bar{\tau}_{A(T)}^* = \inf \{t \geq 0: \psi_t \geq A(T)\},$$

где процесс $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $d\psi_t = dt + (\mu/\sigma^2) \psi_t dX_t$ с начальным условием ψ_0 , имеющим специально подобранное распределение вероятностей на $[0, A(T)]$, и $A(T)$ выбирается из тех соображений, что $\mathbf{E}^{\infty} \bar{\tau}_{A(T)}^* = T$, авторы показывают, что (при $\mu^2/(2\sigma^2) = 1$)

(а) $\bar{C}(T) = \ln T - 1 - \mathbb{C} + O(T^{-1} \ln^2 T)$ при $T \rightarrow \infty$;

(b) $\sup_{\theta} \mathbf{E}^{\theta}(\bar{\tau}_{A(T)}^* - \theta \mid \bar{\tau}_{A(T)}^* \geq \theta) = \ln T - 1 - \mathbb{C} + O(T^{-1} \ln^2 T)$ при $T \rightarrow \infty$ ($\mathbb{C} = 0.577 \dots$ — константа Эйлера).

Тем самым, при $T \rightarrow \infty$ рандомизированный момент $\bar{\tau}_{A(T)}^*$ является асимптотически оптимальным с точностью до членов *второго порядка*.

При установлении результата (а) важную роль играет полученная в [26] оценка снизу $\bar{C}(T) \geq B(T)$, где

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \mathbf{E}^{\theta}(\tau - \theta)^+ d\theta$$

с $\mathcal{M}_T = \{\tau: \mathbf{E}_{\infty} \tau = T\}$. Критерий $B(T)$ естественно называть обобщенным байесовским риском, исследование которого проще, нежели исследование $\bar{C}(T)$.

Работа *Е. В. Бурнаева* посвящена отысканию оптимального байесовского правила τ_T^* , для которого

$$\frac{1}{T} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\theta}(\tau_T^* - \theta)^+ d\theta = B(T),$$

в предположении, что разладка состоит в том, что у наблюдаемого процесса Пуассона $X = (X_t)_{t \geq 0}$ в момент θ происходит изменение параметра λ_0 на λ_1 . В теореме 3 показывается, что в качестве оптимального момента τ_T^* можно взять момент $\tau_{A(T)} = \inf \{t \geq 0: \psi_t \geq A(T)\}$, где $d\psi_t = dt + (\lambda_1/\lambda_0 - 1)\psi_t - d(X_t - \lambda_0 t)$, $\psi_0 = 0$. При этом для $T > 0$ уравнение $\mathbf{E}^{\infty} \tau_{A(T)} = T$ имеет решение $A(T)$, которое берется в качестве порогового значения при определении момента $\tau_{A(T)}$.

В том случае, когда для дискретного времени рассматриваются задачи об оптимальной остановке на конечном временном интервале, эффективным методом решения является метод индукции назад. Подобный метод уже не работает в случае непрерывного времени.

В работе *О. Хаджимиадис и В. Пура* задача о «разладке» рассматривается в предположении, что локальный снос у броуновского движения меняется (с нулевого) на одно из двух значений μ_1 или $-\mu_2$. Основным результатом состоит в доказательстве существования (и единственности) так называемого 2-CUSUM момента со свойствами оптимальности в обобщенной второй минимаксной постановке, являющейся расширением постановки в варианте $\mathbb{D}$, введенной в работе [28].

В работе *А. А. Каменова* рассматривается задача об оптимальной остановке

$$\hat{V}_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \left[\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u - c\tau \right],$$

где $\hat{X}_u = \mu u + B_u$ — броуновское движение со сносом. Показывается, что оптимальный момент остановки $\hat{\tau}$ имеет вид $\hat{\tau} = \inf\{t \leq T: \max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t \geq b(t)\}$, где $b = (b(t))_{t \leq T}$ — граничная функция, удовлетворяющая некоторому интегральному уравнению. Исследовано качественное поведение этой функции. Показано, что

$$b(t) = \sqrt{(T-t) \ln \left(\frac{1}{T-t} \right)} + O(T-t) \quad \text{при } t \uparrow T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shewhart W. A.* The application of statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product. — J. Amer. Statist. Assoc., 1925, v. 20, № 152, p. 546–548.
2. *Shewhart W. A.* Economic Control of Quality of Manufactured Product. New York: Van Nostrand Reinhold, 1931. (Republished in 1980 by the American Society for Quality Control, Milwaukee.)
3. *Page E. S.* Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, p. 100–114.
4. *Page E. S.* Control charts with warning lines. — Biometrika, 1955, v. 42, p. 243–257.
5. *Roberts S. W.* Control charts based on geometric moving average. — Technometrics, 1959, v. 1, p. 239–250.
6. *Roberts S. W.* A comparison of some control chart procedures. — Technometrics, 1966, v. 8, p. 411–430.
7. *Wetherill G. B.* Sampling Inspection and Quality Control. London/New York: Chapman & Hall / Halsted Press, 1977, 146 p.
8. *Hawkins D. M., Olwell D. H.* Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement. New York: Springer-Verlag, 1998, 247 p.
9. *Ширяев А. Н.* Обнаружение спонтанно возникающих эффектов. — Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 4, с. 799–801.
10. *Ширяев А. Н.* Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. — Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 5, с. 1039–1042.
11. *Ширяев А. Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
12. *Ширяев А. Н.* К обнаружению разладок производственного процесса. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 3, с. 264–281; в. 4, с. 431–445.

13. Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов. — Тр. МИАН, 1988, т. 182, с. 4–23.
14. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. 2-е изд. М.: Наука, 1976, 272 с.
15. Roundtable on bioterrorism detection: Information system-based surveillance. — J. Amer. Medical Informatics Assoc., 2002, v. 9, p. 105–115.
16. Frisén M. Properties of use of the Shewhart method and its followers. — Sequential Anal., 2007, v. 26, № 2, p. 171–193.
17. Tartakovsky A. G., Veeravalli V. Change-point detection in multichannel and distributed systems. — Applied Sequential Methodologies. Ed. by M. Mukhopadhyay, S. Datta, and S. Chattopadhyaya. New York: Dekker, 2004, p. 339–370.
18. Sequential Analysis. Design Methods and Applications, 2007, v. 26, № 2, 3. Celebrating eighty years of control charts. Walter A. Shewhart's Legacy. Taylor and Francis.
19. Kavtaradze T., Lazrieva N., Mania M., Muliere P. A Bayesian-martingale approach to the general disorder problem. — Stochastic Process. Appl., 2007, v. 117, № 8, p. 1093–1120.
20. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorem for Stochastic Processes. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 661 p.
21. Ширяев А. Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007, 967 с.
22. Boydecki T. Probability maximizing approach to optimal stopping and its application to a disorder problem. — Stochastics, 1979, v. 3, № 1, p. 61–71.
23. Shiryaev A. N. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. — Mathematical Finance–Bachelier Congress 2000: Selected papers from the First World Congress of the Bachelier Finance Society (Paris, 2000). Ed. by H. Geman et al. Berlin: Springer-Verlag, Springer Finance, 2002, p. 487–521.
24. Ширяев А. Н. От «разладки» к нелинейной фильтрации и теории мартингалов. — Математические события XX века. М.: ФАЗИС, 2003, с. 491–518.
25. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
26. Feinberg E. A., Shiryaev A. N. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. — Statist. Decisions, 2006, v. 24, № 4, p. 445–470.
27. Moustakides G. V. Optimal stopping times for detecting changes in distributions. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 4, p. 1379–1387.
28. Lorden G. Procedures for reacting to a change in distribution. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, p. 1897–1908.
29. Pollak M. Optimal detection of a change in distribution. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 1, p. 206–227.
30. Pollak M., Siegmund D. A diffusion process and its application to detecting a change in the drift of Brownian motion. — Biometrika, 1985, v. 72, № 2, p. 267–280.
31. Beibel M. A note on Ritov's Bayes approach to the minimax property of the CUSUM procedure. — Ann. Statist., 1996, v. 24, № 4, p. 1804–1812.
32. Ширяев А. Н. Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 4, с. 173–174.

Поступила в редакцию
19.III.2008