Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Кобельков, О задаче разорения для гауссовского стационарного процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 171–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:13:00

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen M. F.* From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. River Edge: World Scientific, 1992, 550 p.
2. *Chen M. F.* Estimation of spectral gap for Markov chains. — *Acta Math. Sinica*, 1996, v. 12, № 4, p. 337–360.
3. *Chen M. F.* Explicit bounds of the first eigenvalue. — *Sci. China Ser. A*, 2000, v. 43, № 10, p. 1051–1059.
4. *Coolen-Schrijner P., Van Doorn E. A.* On the convergence to stationarity of birth-death processes. — *J. Appl. Probab.*, 2001, v. 38, № 3, p. 696–706.
5. *Diaconis P., Saloff-Coste L.* Walks on generating sets of Abelian groups. — *Probab. Theory Related Fields*, 1996, v. 105, № 3, p. 393–421.
6. *Van Doorn E. A.* Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1985, v. 17, № 3, p. 514–530.
7. *Fernández R., Fröhlich J., Sokal A. D.* Random Walks, Critical Phenomena and Triviality in Quantum Field Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 444 p.
8. *Granovsky B., Zeifman A.* The decay function of nonhomogeneous birth-death processes, with application to mean-field models. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 72, № 1, p. 105–120.
9. *Granovsky B., Zeifman A.* The N -limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains. — *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*, 2000, v. 16, № 4, p. 235–248.
10. *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* Nonstationary Markovian queues. — *J. Math. Sci. (New York)*, 2000, v. 99, № 4, p. 1415–1438.
11. *Karlin S.* Total positivity, absorption probabilities and applications. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1964, v. 111, p. 33–107.
12. *Луггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Наука, 1989, 550 с.
13. *Ycart B.* The philosophers' process: an ergodic reversible nearest particle system. — *Ann. Appl. Probab.*, 1993, v. 3, № 2, p. 356–363.
14. *Зейфман А. И.* Качественные свойства неоднородных процессов рождения и гибели. — *Проблемы устойчивости стохастических моделей*. М.: ВНИИСИ, 1988, с. 32–40.
15. *Zeifman A.* Some estimates of the rate of convergence for birth and death processes. — *J. Appl. Probab.*, 1991, v. 28, № 2, p. 268–277.
16. *Zeifman A.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. — *Stochastic Process. Appl.*, 1995, v. 59, № 1, p. 157–173.

Поступила в редакцию
19.XII.2001

Исправленный вариант
30.VI.2003

© 2004 г.

КОБЕЛЬКОВ С. Г.*

**О ЗАДАЧЕ РАЗОРЕНИЯ ДЛЯ
ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА**

Найдена точная асимптотика для вероятности разорения в случае, когда интенсивность доходов описывается гауссовским стационарным процессом.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: sergey@dodo.inm.ras.ru

Ключевые слова и фразы: гауссовский процесс, метод Райса, вероятность разорения.

1. Введение. В статье рассматривается случайный процесс

$$Y_t = \int_0^t X_s ds - ct,$$

где X_t — стационарный действительнoзначный центрированный гауссовский процесс с действительной дважды дифференцируемой ковариационной функцией $R(t)$, $c > 0$. Такая модель возникает, например, в задачах финансового разорения, передачи и хранения информации (см. [6]–[8]).

Цель данной работы — найти точную асимптотику вероятности разорения

$$\mathcal{P}(u) = \mathbf{P}\{\exists t \geq 0: Y_t \geq u\} = \mathbf{P}\left\{\max_{t \geq 0} Y_t \geq u\right\}$$

при $u \rightarrow \infty$.

Случайный процесс $\int_0^t X_s ds$ является процессом со стационарными приращениями. Вероятность разорения $\mathcal{P}(u)$ для различных моделей процессов со стационарными приращениями изучалась во многих работах. Различные оценки получены в [6], [7]. В [3], [8] найдена точная асимптотика $\mathcal{P}(u)$ при $u \rightarrow \infty$ для $Y_t = B_{\alpha/2}(t) - ct$, где $B_{\alpha/2}$ — дробное броуновское движение. Наиболее близкой по постановке задачи является работа [5]. В ней асимптотика вероятности разорения была найдена в следующем виде:

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\mathcal{H}_\eta G}{c^2} e^{-Hc^2/G^2} e^{-uc/G} (1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$. Здесь $\mathcal{H}_\eta$ — обобщенная константа Пикандса для процесса $\eta = c(G\sqrt{2})^{-1} \int_0^t X_t dt$, определяемая как

$$\mathcal{H}_\eta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} \exp\{\max_{t \in [0, T]} (\sqrt{2}\eta(t) - \mathbf{D}\eta(t))\}}{T}.$$

Этот результат получен в условиях положительности интеграла $\int_0^t R(s) ds$ для всех $t > 0$ и сходимости интеграла $\int_0^\infty s^2 |R(s)| ds$ при помощи метода двойных сумм [1]. При этом константа $\mathcal{H}_\eta$ не вычислена, и остается неясным, как она зависит от характеристик исходного процесса X_t .

В настоящей работе найдена точная асимптотика для $\mathcal{P}(u)$ в явном виде при помощи метода Райса [2]. Мы отказываемся от вышеприведенных условий, но требуем гладкости $R(t)$.

Теорема. Пусть для гауссовского центрированного действительнoзначного стационарного процесса X_t с ковариационной функцией $R(t)$ выполнены следующие условия: $R(t)$ дважды дифференцируема для любого t , $G = \int_0^\infty R(s) ds > 0$, $H = \int_0^\infty s R(s) ds < \infty$. Тогда

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\sqrt{R(0)}}{c\sqrt{2\pi}} e^{-Hc^2/G^2} e^{-uc/G} (1 + o(1)) \quad (u \rightarrow \infty).$$

Таким образом, обобщенная константа Пикандса для процесса η в случае непрерывно дифференцируемой $R(t)$ равна $\sqrt{R(0)}/(\sqrt{2\pi}Gc)$.

Для оценки $\mathcal{P}(u) = \mathbf{P}\{\max_{t \geq 0} Y_t \geq u\}$ будем использовать метод Райса, основанный на оценке момента числа пересечений траекториями процесса уровня u .

Определим случайную величину $N_u([0, T])$, равную числу пересечений уровня u процессом Y_t на отрезке $[0, T]$. В [1], [2] показано, что для случайного процесса с непрерывно дифференцируемыми траекториями и произвольного отрезка S имеет место соотношение

$$0 \leq \mathbf{E} N_u(S) - \mathbf{P}\left\{\max_{t \in S} Y_t \geq u\right\} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} N_u(S)(N_u(S) - 1). \quad (1)$$

В следующем пункте мы найдем точную асимптотику величины $\mathbf{E} N_u([0, \infty))$ при $u \rightarrow \infty$. В третьем пункте мы покажем, во-первых, что для некоторых $\alpha = \alpha(u)$,

$\beta = \beta(u)$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{P}\{\max_{t \in [0, \alpha]} Y_t > u\} + \mathbf{P}\{\max_{t \in [\beta, \infty]} Y_t > u\} = o(\mathbf{E}N_u([0, \infty)))$ ($u \rightarrow \infty$). Во-вторых, мы покажем, что $\mathbf{E}N_u([\alpha, \beta])(N_u([\alpha, \beta]) - 1) = o(\mathbf{E}N_u([0, \infty)))$. Отсюда в силу вышеприведенного неравенства (1) следует, что

$$\mathcal{P}(u) = \mathbf{E}N_u([0, \infty))(1 + o(1)) \quad (u \rightarrow \infty).$$

2. Оценка $\mathbf{E}N_u([0, \infty))$. Среднее число пересечений уровня u процессом Y_t на отрезке $[0, T]$ вычисляется по формуле Райса (см. [1]):

$$\mathbf{E}N_u([0, T]) = \int_0^T \int_0^\infty |y| p_t(u, y) dy dt,$$

где $p_t(u, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин Y_t, Y'_t . Введем обозначения: $a(t) = \text{cov}(Y_t, Y_t)$, $b(t) = \text{cov}(Y_t, Y'_t)$, $d(t) = \text{cov}(Y'_t, Y'_t)$, $\sigma(t) = \sqrt{a(t)d(t) - b(t)^2}$. Имеем $a(t) = \int_0^t \int_0^t R(s-v) ds dv = 2t \int_0^t R(s) ds - 2 \int_0^t sR(s) ds$, $b(t) = \int_0^t R(s) ds$, $d(t) = R(0)$.

Легко видеть, что $a(t) = O(t^2)$, $b(t) = O(t)$ при $t \rightarrow 0$, а при $t \rightarrow \infty$ имеем $a(t) = O(t)$, $b(t) = O(1)$.

Докажем конечность предела

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} N_u([0, T]) \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y}{2\pi\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [d(t)(u+ct)^2 - 2b(t)(u+ct)(y+c) + a(y+c)^2] \right\} dy dt.$$

Введем обозначение $\gamma = \gamma(t, u) = c\sqrt{a(t)}/\sigma(t) - b(t)(u+ct)/(\sqrt{a(t)}\sigma(t))$ и преобразуем интеграл следующим образом:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{a(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma^\infty ye^{-y^2/2} dy - \gamma(1 - \Phi(\gamma)) \right) \exp \left\{ -\frac{(u+ct)^2}{2a(t)} \right\} dt,$$

где $\Phi(t)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Заметим, что $g(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_\gamma^\infty ye^{-y^2/2} dy - \gamma(1 - \Phi(\gamma))$ — ограниченная функция, а $\sigma(t)/a(t) = O(1/t)$ при $t \rightarrow 0$ и является ограниченной функцией при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, предел I существует при всех $u > 0$.

Теперь изучим поведение полученного интеграла при $u \rightarrow \infty$. Сделаем замену: $t = t(\tau) = u\tau/c - 2H/G$. Тогда

$$I = \frac{u}{\sqrt{2\pi}c} \int_{2cH/(Gu)}^\infty \frac{\sigma(t(\tau))}{a(\tau)} g(t(\tau)) \exp \left\{ -u^2 \frac{(1 - 2cH/(Gu) + \tau)^2}{2a(\tau)} \right\} d\tau, \quad (2)$$

где

$$a(\tau) = 2\tau \frac{u}{c} \int_0^{t(\tau)} R(s) ds - \frac{4H}{G} \int_0^{t(\tau)} R(s) ds - 2 \int_0^{t(\tau)} sR(s) ds.$$

Заметим, что существует $\tau_1 > 2$ такое, что для всех $\tau > \tau_1$, $u > 1$ выполнено $a(\tau) \geq \tau uG/c$ и, кроме того, $\sigma(t(\tau))/a(\tau) \leq C_1$. Тогда

$$I_1 = \frac{u}{\sqrt{2\pi}c} \int_{\tau_1}^\infty \frac{\sigma(t(\tau))}{a(\tau)} g(t(\tau)) \exp \left\{ -u^2 \frac{(1 - 2cH/(Gu) + \tau)^2}{2a(\tau)} \right\} d\tau \\ \leq C_2 u \int_{\tau_1}^\infty \exp \left\{ -u \frac{c\tau}{2G} \right\} d\tau = C_2 \frac{2G}{c} \exp \left\{ -\frac{uc\tau_1}{2G} \right\} = o \left(\exp \left\{ -\frac{uc}{G} \right\} \right).$$

Аналогично существуют $0 < \tau_0 < 1$, не зависящее от u , и u_0 такие, что для всех $u > u_0$, $2cH/(Gu) \leq \tau \leq \tau_0$ справедлива оценка $a(\tau) \leq C_3 \tau_0 uG/c$. При этом $\sigma(t(\tau))a(\tau)^{-1} \leq C_3 [\tau - 2cH/(Gu)]^{-1} cu^{-1}$. Тогда

$$I_2 = \frac{u}{\sqrt{2\pi}c} \int_{2cH/(Gu)}^{\tau_0} \frac{\sigma(t(\tau))}{a(\tau)} g(t(\tau)) \exp \left\{ -u^2 \frac{(1 - 2cH/(Gu) + \tau)^2}{2a(\tau)} \right\} d\tau \\ \leq C_4 \tau_0 \exp \left\{ -u \frac{(1 - 2cH/(Gu) + \tau_0)^2 c}{\tau_0 G} \right\} = o \left(\exp \left\{ -\frac{uc}{G} \right\} \right).$$

Представим оцениваемый интеграл (2) как сумму $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_3 = \frac{u}{\sqrt{2\pi c}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sigma(t(\tau))}{a(\tau)} g(t(\tau)) \exp \left\{ -u^2 \frac{(1 - 2cH/(Gu) + \tau)^2}{2a(\tau)} \right\} d\tau. \quad (3)$$

Оценим I_3 . Для этого рассмотрим функцию $f(\tau) = (1 - 2cH/(Gu) + \tau)^2 [a(\tau)/(2u)]^{-1}$. После подстановки выражения для $a(\tau)$ в последнее равенство и очевидных преобразований получим:

$$f(\tau) = \frac{(1 + \tau)^2 c}{\tau G} \left(1 + \frac{c}{uG\tau} \left(3H + \frac{u\tau}{c} \int_{t(\tau)}^{\infty} R(s) ds - 2 \frac{H}{G} \int_{t(\tau)}^{\infty} R(s) ds - \int_{t(\tau)}^{\infty} s R(s) ds \right) \right) - \frac{4(1 + \tau) c^2 H}{\tau G^2} \frac{1}{u} + R(u, \tau), \quad \text{где } |R(u, \tau)| \leq \frac{C_5}{u^2}. \quad (4)$$

Заметим, что $\exp\{-C_5/u\} \leq \exp\{-uR(u, \tau)/4\} \leq \exp\{C_5/u\}$. Таким образом, члены порядка $1/u^2$ в (4) на асимптотику интеграла (3) не влияют.

Следовательно, при $u \rightarrow \infty$ будет выполнено

$$I_3 = \frac{u}{\sqrt{2\pi c}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} h(\tau) \exp \left\{ -u \frac{(1 + \tau)^2 c}{4\tau G} \right\} d\tau (1 + o(1)), \quad (5)$$

где

$$h(\tau) = \frac{\sigma(t(\tau))}{a(\tau)} g(t(\tau)) \exp \left\{ -\frac{Hc^2(1 + \tau)(3 - \tau)}{4\tau^2 G^2} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{u}{4} \left(f(\tau) - \frac{(1 + \tau)^2 c - R(u, \tau)}{\tau G} \right) \right\}.$$

Легко видеть, что имеют место следующие равномерные сходимости по τ на $[\tau_0, \tau_1]$ при $u \rightarrow \infty$:

$$\frac{a(\tau)}{u} \rightarrow \frac{2\tau G}{c}, \quad \frac{\sigma(t(\tau))}{\sqrt{u}} \rightarrow \sqrt{2\tau G R(0) c^{-1}}, \quad b(t(\tau)) \rightarrow G.$$

При этом существует не зависящая от u константа $C_6 > 0$ такая, что $a(\tau) \geq C_6 u(\tau - 2Hc/(Gu))$ и одновременно $\sigma(t(\tau)) \geq C_6 \sqrt{u} \sqrt{R(0)(\tau - 2Hc/(Gu))}$. Из разложения (4) ясно, что $\frac{1}{4} u(f(\tau) - [(1 + \tau)^2 c - R(u, \tau)]/(\tau G))$ равномерно сходится к нулю. Следовательно, имеет место равномерная сходимость к пределу при $u \rightarrow \infty$ для функции $\sqrt{u}h(\tau)$. Таким образом, используя доказанную выше равномерную сходимость и метод Лапласа [4] оценки интегралов, из (5) получаем

$$I_3 = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{4G\pi}{uc}} h(\tau^*) \exp \left\{ -u \frac{(1 + \tau^*)^2 c}{4\tau^* G} \right\} (1 + o(1)) \quad (u \rightarrow \infty),$$

где τ^* — точка минимума функции $(1 + \tau)^2/\tau$, т.е. $\tau^* = 1$. Нетрудно вычислить, что при $\tau = \tau^*$, $u \rightarrow \infty$ выполнено $\gamma = \gamma(t(\tau^*), u) \rightarrow 0$, а следовательно, $g(t(\tau^*)) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}$ и

$$h(1) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2Gd(0)/c}}{2G/c} \exp \left\{ -\frac{Hc^2}{G^2} \right\}.$$

Вспоминая, что $I_1 = o(\exp\{-uc/G\})$ и $I_2 = o(\exp\{-uc/G\})$, получаем окончательную оценку:

$$I = \frac{\sqrt{R(0)}}{c\sqrt{2\pi}} e^{-Hc^2/G^2} e^{-uc/G} (1 + o(1)) \quad (u \rightarrow \infty). \quad (6)$$

3. Оценка второго факториального момента. Перепишем требуемую вероятность в виде

$$\mathcal{P}(u) = \mathbf{P} \left\{ \max_{t>0} \frac{1}{1 + ct/u} \int_0^t X_s ds > u \right\}$$

и обозначим $V_t = (1 + ct/u)^{-1} \int_0^t X_s ds$.

Покажем, что

$$\mathbf{P}\left\{\max_{\alpha > t \geq 0} V_t > u\right\} = o\left(\exp\left\{-\frac{uc}{G}\right\}\right), \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{t \geq \beta} V_t > u\right\} = o\left(\exp\left\{-\frac{uc}{G}\right\}\right) \quad (8)$$

для $\alpha = u/c - \sqrt{u} \ln u$, $\beta = u/c + \sqrt{u} \ln u$.

Заметим, что, в силу непрерывной дифференцируемости ковариационной функции процесса V_t , для всех $u > 0$ и произвольного отрезка $S = [s_0, s_1]$ существует константа $M_1(S)$ такая, что $\mathbf{E}(V(s) - V(t))^2 \leq M_1(S)|s - t|$ для всех $t, s \in S$. В силу неравенства Питербарга [1] $\mathbf{P}\{\max_{t \in S} V_t > u\} < C_1 \max_{t \in S} \mathbf{D}V_t \cdot \exp\{-u^2/[2 \max_{t \in S} \mathbf{D}V_t]\}$, где $\mathbf{D}V_t$ — дисперсия процесса V_t , а C_1 может зависеть только от $s_1 - s_0$.

Представим дисперсию процесса V_t в виде

$$\mathbf{D}V_t = \frac{2Gt}{(1 + ct/u)^2} - \frac{2t \int_t^\infty R(s) ds - 2H + 2 \int_t^\infty sR(s) ds}{(1 + ct/u)^2} = \frac{2Gt}{(1 + ct/u)^2} + R_1,$$

где $|R_1|(1 + ct/u)^2$ равномерно ограничено.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{u^2}{2 \max_{t \in S} \mathbf{D}V_t}\right\} &= \exp\left\{-\frac{uc}{G}\left[1 - \left(1 - \frac{4ct}{u(1 + ct_{\max}/u)^2} - \frac{2R_1c}{Gu}\right)\right]^{-1}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{uc}{G}\left[1 + \left(1 - \frac{4ct_{\max}}{u(1 + ct_{\max}/u)^2} - \frac{2R_1c}{Gu}\right) + R_2\right]\right\} \\ &\leq C_2 \exp\left\{-\frac{uc}{G}\left(1 + \frac{(1 - ct_{\max}/u)^2}{(1 + ct_{\max}/u)^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

где

$$R_2 = \left(\frac{(1 - ct_{\max}/u)^2}{(1 + ct_{\max}/u)^2} - \frac{2cR_1}{Gu}\right)^2 \left(\frac{2c}{Gu} \mathbf{D}V_{t_{\max}}\right)^{-1}, \quad 0 \leq R_2 < C_3,$$

а $t_{\max}$ — точка максимума дисперсии V_t . То есть

$$\mathbf{P}\left\{\max_{\alpha > t \geq 0} V_t > u\right\} \leq C_4 \mathbf{D}V_{t_{\max}} \exp\left\{-\frac{uc}{G}\right\} \exp\left\{-\frac{uc}{G} \frac{(u/c - \alpha)^2}{(2u/c)^2}\right\}.$$

Вспоминая, что $\alpha = u/c - \sqrt{u} \ln u$, получаем требуемую оценку (7).

Покажем теперь, что справедлива оценка (8). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\max_{\beta \leq t < \infty} V_t > u\right\} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{\beta+k \leq t < \beta+k+1} V_t > u\right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} C_5 u \exp\left\{-u^2 \left[2 \frac{2G(\beta+k)}{(1 + c(\beta+k)/u)^2}\right]^{-1}\right\} \\ &= C_5 u \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\beta+k)}{4G} \left(\frac{u}{\beta+k} + c\right)^2\right\} \leq C_6 u \exp\left\{-\frac{\beta(u/\beta + c)^2}{4G}\right\} \\ &\leq C_7 u \exp\left\{-\frac{uc}{4G} - \frac{uc}{4G} - \frac{uc}{2G} - \frac{c^2 \sqrt{u} \ln u}{4G}\right\} = o\left(\exp\left\{-\frac{uc}{G}\right\}\right), \end{aligned}$$

при получении этой оценки мы использовали тот факт, что $\mathbf{D}V_t \leq uG/c$ при достаточно больших u и величина

$$\begin{aligned} &\left|u^2 \left[2 \frac{2G(\beta+k)}{(1 + c(\beta+k)/u)^2}\right]^{-1} - u^2 \left[2 \max_{\beta+k \leq t < \beta+k+1} \mathbf{D}V_t\right]^{-1}\right| \\ &\leq u^2 |R_1| \left[\frac{2G(\beta+k)}{(1 + c(\beta+k)/u)^2} \left(\frac{2G(\beta+k)}{(1 + c(\beta+k)/u)^2} + R_1\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

равномерно ограничена по u .

Таким образом, (7) и (8) доказаны, и нам осталось оценить второй факториальный момент числа пересечений уровня u процессом Y_t на промежутке $[\alpha, \beta]$. Положим $Z_t = [(1 + ct)\sqrt{u}]^{-1} \int_0^{ut} X_s ds$. Тогда

$$\mathcal{P}(u) = \mathbf{P} \left\{ \max_{t>0} \frac{1}{(1 + ct/u)} \int_0^t X_s ds > u \right\} = \mathbf{P} \left\{ \max_{t>0} Z_t > \sqrt{u} \right\}.$$

Пересечению уровня u процессом Y_t в точке t_0 соответствует пересечение уровня $\sqrt{u}$ процессом Z_t в точке t_0/u , причем эти события совпадают. Таким образом, достаточно оценить второй факториальный момент процесса Z_t на отрезке $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$, где $\tilde{\alpha} = \alpha/u$, $\tilde{\beta} = \beta/u$.

Подставляя явные выражения для α и β в определение $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и оценивая дисперсию Z_t аналогично оценке $\mathbf{D}Y_t$, находим

$$\tilde{\alpha} \rightarrow \frac{1}{c}, \quad \tilde{\beta} \rightarrow \frac{1}{c}, \quad \mathbf{D}Z_t \rightarrow \frac{G}{2c} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Воспользуемся явной формулой для второго факториального момента [1]:

$$\mathbf{E}N_{\sqrt{u}}([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) (N_{\sqrt{u}}([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) - 1) = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \int_0^\infty \int_0^\infty y_1 y_2 \varphi_{t,s,t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y_1, y_2) dy_1 dy_2 ds dt,$$

где $\varphi_{t,s,t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y_1, y_2)$ — совместная плотность величин Z_t, Z_s, Z'_t, Z'_s . Обозначая $\Omega = \{(s, t): x \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}], y \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]\}$, имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \int_0^\infty \int_0^\infty y_1 y_2 \varphi_{t,s,t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y_1, y_2) dy_1 dy_2 ds dt \\ & \leq \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} ds dt \int_0^\infty \int_0^\infty (y_1^2 + y_2^2) \varphi_{t,s,t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ & \leq \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} ds dt \int_0^\infty y^2 \varphi_{t,s,t}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y) dy + \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} ds dt \int_0^\infty y^2 \varphi_{t,s,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y) dy, \end{aligned}$$

здесь $\varphi_{t,s,t}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y)$ — совместная плотность величин Z_t, Z_s, Z'_t , а $\varphi_{t,s,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y)$ — совместная плотность величин Z_t, Z_s, Z'_s . Оценим первый интеграл; оценка второго интеграла проводится аналогично.

Перейдем к условной плотности:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} ds dt \int_0^\infty y^2 \varphi_{t,s,t}(\sqrt{u}, \sqrt{u}, y) dy \\ & = \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) ds dt \int_0^\infty y^2 \varphi_{t,s}(y|\sqrt{u}, \sqrt{u}) dy ds dt. \end{aligned}$$

Здесь через $\varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u})$ обозначена совместная плотность величин Z_t, Z_s , а через $\varphi_{t,s}(y|\sqrt{u}, \sqrt{u})$ — условная плотность случайной величины Z'_t при условии $Z_t = \sqrt{u}, Z_s = \sqrt{u}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}N(N-1) &= \mathbf{E}N_{\sqrt{u}}([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) (N_{\sqrt{u}}([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) - 1) \\ &\leq 2 \iint_{\Omega \cap \{t \geq s\}} \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) ds dt \int_0^\infty y^2 \varphi_{t,s}(y|\sqrt{u}, \sqrt{u}) dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем явные выражения для плотностей:

$$\begin{aligned} \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \left\{ -\frac{u}{2\sigma^2} (\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t)) \right\}, \\ \varphi_{t,s}(y|\sqrt{u}, \sqrt{u}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (y - m(\sqrt{u}, \sqrt{u}))^2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbf{D}Z_t \mathbf{D}Z_s - (\text{cov}(Z_t, Z_s))^2, \\ m(\sqrt{u}, \sqrt{u}) &= \frac{\sqrt{u}}{\sigma^2} \left(\mathbf{D}Z_s b(t) - \text{cov}(Z_t, Z_s)(b(t) + b(s)) + \mathbf{D}Z_t b(s) \right), \\ b(s) &= \text{cov}(Z'_t, Z_s), \\ \Delta &= \mathbf{D}Z'_t - \frac{\mathbf{D}Z_s b^2(t) - 2\text{cov}(Z_t, Z_s) b(s) b(t) + \mathbf{D}Z_t b^2(s)}{\sigma^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Тривиальная оценка интеграла (9) дает

$$\mathbf{E}N(N-1) \leq 2(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2 \sup_{t \geq s} \sigma \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) \sup_{t \geq s} \int_0^\infty \frac{y^2}{\sigma} \varphi_{t,s}(y | \sqrt{u}, \sqrt{u}) dy. \quad (11)$$

Заметим, что $(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2 = 4(\ln^2 u)/u$. Покажем, что первый супремум имеет порядок $\exp\{-uc/G\}$, а второй растет не быстрее, чем $\sqrt{u}$.

Оценим следующий интеграл при $t \geq s$:

$$\int_0^\infty \frac{y^2}{\sigma} \varphi_{t,s}(y | \sqrt{u}, \sqrt{u}) dy = \int_{-\sqrt{u}m/\Delta}^\infty \frac{(\Delta y + \sqrt{u}m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy,$$

где $\sqrt{u}m = m(\sqrt{u}, \sqrt{u})$.

Выпишем необходимые соотношения для последующей оценки порядков m и Δ , которые получаются непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned}Z'_t &= -\frac{c}{(1+ct)^2\sqrt{u}} \int_0^{ut} X_s ds + \frac{\sqrt{u}X_{ut}}{1+ct}, \\ \mathbf{D}Z'_t &= \frac{uR(0)}{(1+ct)^2} + \frac{c^2}{(1+ct)^4} \left(2t \int_0^{ut} R(s) ds - \frac{2}{u} \int_0^{ut} sR(s) ds \right) \\ &\quad - \frac{c}{(1+ct)^3} \int_0^{ut} R(s) ds, \\ \text{cov}(Z'_t, Z_s) &= \frac{1}{(1+cs)(1+ct)} \int_0^{us} R(p-ut) dp \\ &\quad - \frac{c}{(1+ct)^2(1+cs)u} \int_0^{us} \int_0^{ut} R(p-q) dp dq.\end{aligned}\quad (12)$$

Введем функции $f(s) = \text{cov}(Z'_t, Z_s)$, $g(t) = \mathbf{D}Z_t$, $h(s) = \text{cov}(Z_t, Z_s)$. Справедливы следующие очевидные соотношения:

$$h'(t) = f(t) = 2^{-1}g'(t), \quad f'(t) = \mathbf{D}Z'_t, \quad g''(t) = 2(f'(t) + h''(t)). \quad (13)$$

По формуле Тейлора, используя (13), имеем

$$\begin{aligned}m\sigma^2 &= O((s-t)^3), \quad \Delta^2\sigma^2 = O((s-t)^3), \\ \sigma^2 &= (g''(\xi)g(t) - 2h(\xi)h''(\xi) - 2h'(\xi)^2)(s-t)^2, \quad \xi \in (s, t).\end{aligned}\quad (14)$$

Кроме того, из (12), (14)

$$\sigma^2 \geq \frac{uR(0)}{8} (s-t)^2, \quad |m|\sigma^2 \leq C_8 u, \quad \Delta\sigma \leq C_8 u, \quad C_8 > 0. \quad (15)$$

Перейдем теперь непосредственно к оценке интеграла в (11). Учитывая (14) и (15), получим

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{u}m/\Delta}^\infty \frac{(\Delta y + \sqrt{u}m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy &= \frac{\Delta^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-m\sqrt{u}/\Delta}^\infty y^2 \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\ &+ \frac{2m\sqrt{u}\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-m\sqrt{u}/\Delta}^\infty y \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + \frac{um^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-m\sqrt{u}/\Delta}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \leq C_9 \sqrt{u}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$2(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2 \sup_{t \geq s} \int_0^\infty \frac{y^2}{\sigma} \varphi_{t,s}(y | \sqrt{u}, \sqrt{u}) dy \rightarrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Оценим $\sup_{t \geq s} \sigma \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u})$. Для этого заметим, что

$$\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t) = g(s) + g(t) - 2h(s),$$

$$\frac{g(s) + g(t) - 2h(s)}{g(s)g(t) - h^2(s)} = \frac{1}{g(t)} + \frac{(h(s) - h(t))^2}{(g(s)g(t) - h^2(s))g(t)}.$$

Отсюда $\exp\{-(u/(2\sigma^2))(\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t))\} \leq C_{10} \exp\{-u/(2g(t))\} \leq C_{11} \exp\{-uc/G\}$. Последнее неравенство справедливо, так как при $u \rightarrow \infty$ имеет место равномерная по t оценка $g(t) = G/(2c) + O(1/u)$. Итак, $\sigma \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) = (2\pi)^{-1} \exp\{-(u/(2\sigma^2))(\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t))\} \leq C_{11}/(2\pi) \exp\{-uc/G\}$.

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{E}N(N-1) = o(\exp\{-uc/G\})$. Последняя оценка вместе с (6), (7) и (8) завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988, 175 с.
2. *Питербарг В. И.* Метод Райса для гауссовских случайных полей. — *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, т. 2, с. 187–204.
3. *Hüsler J., Piterbarg V.* Extremes of a certain class of Gaussian processes. — *Stochastic Process. Appl.*, 1999, v. 83, № 2, p. 257–271.
4. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977, 368 с.
5. *Debicki K.* Ruin probability for Gaussian integrated process. — *Stochastic Process. Appl.*, 2002, v. 98, № 1, p. 151–174.
6. *Kulkarni V., Rolski T.* Fluid model driven by an Ornstein–Uhlenbeck process. — *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 1994, v. 8, p. 403–417.
7. *Norris I.* A storage model with self-similar input. — *Queueing Syst. Theory Appl.*, 1994, v. 16, № 3–4, p. 387–396.
8. *Narayan O.* Exact asymptotic queue length distribution for fractional Brownian traffic. — *Advances in Performance Analysis*, 1998, v. 1, p. 39–63.

Поступила в редакцию
15.X.2003

© 2004 г.

КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**

ОДНОСТОРОННИЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАКОН БЕНФОРДА¹⁾

Пусть Y — случайная величина, имеющая одностороннее устойчивое распределение с параметром α . В работе доказано, что распределение вероятностей дробной части логарифма Y по любому основанию

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna.q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта № НШ-1758.2003.1