Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Ю. В. Прохоров, Односторонние устойчивые распределения и закон Бенфорда, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 178–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:14:32

Таким образом, мы показали, что

$$2(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2 \sup_{t \geq s} \int_0^\infty \frac{y^2}{\sigma} \varphi_{t,s}(y | \sqrt{u}, \sqrt{u}) dy \rightarrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Оценим $\sup_{t \geq s} \sigma \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u})$. Для этого заметим, что

$$\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t) = g(s) + g(t) - 2h(s),$$

$$\frac{g(s) + g(t) - 2h(s)}{g(s)g(t) - h^2(s)} = \frac{1}{g(t)} + \frac{(h(s) - h(t))^2}{(g(s)g(t) - h^2(s))g(t)}.$$

Отсюда $\exp\{-(u/(2\sigma^2))(\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t))\} \leq C_{10} \exp\{-u/(2g(t))\} \leq C_{11} \exp\{-uc/G\}$. Последнее неравенство справедливо, так как при $u \rightarrow \infty$ имеет место равномерная по t оценка $g(t) = G/(2c) + O(1/u)$. Итак, $\sigma \varphi_{t,s}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) = (2\pi)^{-1} \exp\{-(u/(2\sigma^2))(\mathbf{D}Z_s + \mathbf{D}Z_t - 2\text{cov}(Z_s, Z_t))\} \leq C_{11}/(2\pi) \exp\{-uc/G\}$.

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{E}N(N-1) = o(\exp\{-uc/G\})$. Последняя оценка вместе с (6), (7) и (8) завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988, 175 с.
2. *Питербарг В. И.* Метод Райса для гауссовских случайных полей. — *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, т. 2, с. 187–204.
3. *Hüsler J., Piterbarg V.* Extremes of a certain class of Gaussian processes. — *Stochastic Process. Appl.*, 1999, v. 83, № 2, p. 257–271.
4. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977, 368 с.
5. *Debicki K.* Ruin probability for Gaussian integrated process. — *Stochastic Process. Appl.*, 2002, v. 98, № 1, p. 151–174.
6. *Kulkarni V., Rolski T.* Fluid model driven by an Ornstein–Uhlenbeck process. — *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 1994, v. 8, p. 403–417.
7. *Norris I.* A storage model with self-similar input. — *Queueing Syst. Theory Appl.*, 1994, v. 16, № 3–4, p. 387–396.
8. *Narayan O.* Exact asymptotic queue length distribution for fractional Brownian traffic. — *Advances in Performance Analysis*, 1998, v. 1, p. 39–63.

Поступила в редакцию
15.X.2003

© 2004 г.

КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**

ОДНОСТОРОННИЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАКОН БЕНФОРДА¹⁾

Пусть Y — случайная величина, имеющая одностороннее устойчивое распределение с параметром α . В работе доказано, что распределение вероятностей дробной части логарифма Y по любому основанию

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna.q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта № НШ-1758.2003.1

большому 1 при $\alpha \rightarrow 0$ сходится к равномерному на отрезке $[0, 1]$ распределению. Отсюда вытекает, что распределение вероятностей первой значащей цифры Y при малых α приближенно описывается законом Бенфорда.

Ключевые слова и фразы: одностороннее устойчивое распределение, закон Бенфорда, формула суммирования Пуассона.

1. Односторонние устойчивые распределения. Под односторонними устойчивыми распределениями мы понимаем в этой статье устойчивые распределения, плотности вероятностей которых положительны при любом $x > 0$ и равны нулю при любом $x < 0$. Эти распределения зависят от двух параметров: α и λ , $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$.

Случайная величина $Y_{\alpha, \lambda}$ имеет одностороннее устойчивое распределение тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции $f(t; Y_{\alpha, \lambda}) = \mathbf{E} e^{itY_{\alpha, \lambda}}$ имеет вид

$$\ln f(t; Y_{\alpha, \lambda}) = -\lambda |t|^\alpha e^{-i\pi\alpha/2} \operatorname{sign}(t),$$

где

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

(см. [5, теорема В.3, с. 22; замечание 2.6, с. 286; замечание 3, с. 96]).

Не ограничивая общности выводов этой работы, можно принять $\lambda = 1$. Случайную величину с характеристической функцией, приведенной выше, где $\lambda = 1$, будем обозначать Y_α . Тогда соответствующая плотность распределения вероятностей $p(x; Y_\alpha)$ в обозначениях [5, с. 24] равна $g(x; \alpha, \beta)$ с $\beta = 1$.

Как известно, выражение этих плотностей через элементарные функции или «классические» специальные функции возможно лишь в исключительных случаях. Напомним здесь два примера:

$$\begin{aligned} g\left(x; \frac{1}{2}, 1\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} e^{-1/(4x)}, & x > 0 \quad (\text{см. [5, с. 79]}), \\ g\left(x; \frac{1}{3}, 1\right) &= \frac{x^{-3/2}}{3\pi} K_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{-1/2}\right), & x > 0 \quad (\text{см. [5, с. 188]}), \end{aligned}$$

где $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) порядка ν (см. [7, раздел 9.6]).

Плотность $g(x; \alpha, 1)$ бесконечно дифференцируема по x , и производные всех порядков стремятся к нулю при $x \downarrow 0$ (см. [5, формула 2.5.18, с. 121]). При $x \rightarrow \infty$ имеем $g(x; \alpha, 1) \sim \pi^{-1} \Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha) x^{-(\alpha+1)}$ (см. [5, формула 2.4.8, с. 110]).

Теперь сформулируем некоторые известные утверждения, нужные нам в дальнейшем.

Лемма 1. Все устойчивые плотности распределений одновершинны (см. [5, §2.7]).

Лемма 2. Плотность случайной величины $X_\alpha = \ln Y_\alpha$ одновершинна (см. [5, замечание в конце с. 176] и [2]).

Следствие 1. При любом $\eta > 0$ плотность $p(x; \eta X_\alpha)$ одновершинна. Поэтому, в частности, распределение $\log Y_\alpha$ по любому основанию большему 1 будет одновершинным.

Лемма 3. Пусть $s = \sigma + i\tau$, σ и τ — действительные числа. В полосе $-1 < \sigma < \alpha$ существует интеграл

$$\int_0^\infty x^s g(x; \alpha, 1) dx = \int_0^\infty e^{s \ln x} g(x; \alpha, 1) dx,$$

и его значение равно $\Gamma(1 - s/\alpha)/\Gamma(1 - s)$ (см. [4, теорема 3] или [5, теорема 2.6.3, с. 143]).

Следствие 2. Характеристическая функция случайной величины $X_\alpha = \ln Y_\alpha$ равна $\Gamma(1 - it/\alpha)/\Gamma(1 - it)$.

Лемма 4. Пусть U — какая-либо случайная величина, имеющая ограниченную, непрерывную и одновершинную плотность вероятностей $p(x; U)$. Тогда плотность дробной части $\{U\}$ при любом $0 \leq x \leq 1$ удовлетворяет неравенству

$$|p(x; \{U\}) - 1| \leq 2 \max_x p(x; U).$$

Утверждение леммы 4 лишь формой записи отличается от неравенства, указанного в [6, пример 6, §8, глава II — задача Пуанкаре о рулетке].

2. Неравенство для плотности $p(x; X_\alpha)$. Оценим теперь максимум (одновершинной!) плотности вероятностей $p(x; X_\alpha)$.

Имеем

$$p(x; X_\alpha) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t; X_\alpha)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f(t; X_\alpha)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} = I_1 + I_2.$$

Модуль характеристической функции X_α равен

$$|f(t; X_\alpha)| = \left| \frac{\Gamma(1 - it/\alpha)}{\Gamma(1 - it)} \right| = \left| \frac{\Gamma(1 + it/\alpha)}{\Gamma(1 + it)} \right|.$$

Последнее равенство справедливо, так как $\overline{(\Gamma(1 - it/\alpha)/\Gamma(1 - it))} = \Gamma(1 + it/\alpha)/\Gamma(1 + it)$. Теперь,

$$\int_0^1 \left| \frac{\Gamma(1 + it/\alpha)}{\Gamma(1 + it)} \right| dt \leq \frac{1}{|\Gamma(1 + i)|} \int_0^1 |\Gamma(1 + it/\alpha)| dt.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и формулой [8, 2.2.4.1], получаем

$$\left(\int_0^1 \left| \Gamma\left(1 + \frac{it}{\alpha}\right) \right| dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left| \Gamma\left(1 + \frac{it}{\alpha}\right) \right|^2 dt \leq \alpha \int_0^\infty |\Gamma(1 + iy)|^2 dy = \alpha \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$I_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{\text{sh}(\pi)}} \sqrt{\alpha} \leq 0.1472 \sqrt{\alpha}.$$

Оценим I_2 . Используя формулу [7, 6.1.31], получаем при $t \geq 1$ и $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(1 + it/\alpha)}{\Gamma(1 + it)} \right| &= \sqrt{\frac{\pi t/\alpha}{\text{sh}(\pi t/\alpha)}} \sqrt{\frac{\text{sh}(\pi t)}{\pi t}} = \sqrt{\frac{1/\alpha}{e^{\pi t/\alpha} - e^{-\pi t/\alpha}}} \sqrt{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{1}} \\ &= \frac{e^{-\pi t(1/\alpha - 1)/2} \sqrt{1 - e^{-2\pi t}}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-2\pi t/\alpha}}} \leq \frac{e^{-\pi t/4\alpha}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-4\pi}}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-4\pi}}} \int_1^\infty e^{-\pi t/4\alpha} dt \leq \frac{4}{\pi^2 \sqrt{1 - e^{-4\pi}}} \sqrt{\alpha} \leq 0.4053 \sqrt{\alpha}.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Лемма 5. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ и всех x

$$p(x; X_\alpha) \leq 0.6 \sqrt{\alpha}.$$

Пусть $\eta > 0$ — какое-либо число. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$p(x; \eta X_\alpha) = \frac{1}{\eta} p\left(\frac{x}{\eta}; X_\alpha\right) \quad \text{и} \quad \max_x p(x; \eta X_\alpha) \leq \frac{1}{\eta} 0.6 \sqrt{\alpha}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. При $\alpha \rightarrow 0$ и любом $\eta > 0$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\eta X_\alpha\}) - 1| \rightarrow 0.$$

Выбирая $\eta = \lg e$, получаем $\eta X_\alpha = \lg(e) \ln Y_\alpha = \lg Y_\alpha$, и из последнего неравенства вытекает следствие.

Следствие 3. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\lg Y_\alpha\}) - 1| \leq 2.77 \sqrt{\alpha}.$$

3. Применение формулы суммирования Пуассона. В этом параграфе для более точной оценки $\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\eta X_\alpha\}) - 1|$ мы применим формулу суммирования Пуассона.

По формуле суммирования Пуассона имеем

$$\begin{aligned} p(x; \{\eta X_\alpha\}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(x+k; \eta X_\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi\eta n; X_\alpha) e^{-2\pi n i x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1-i2\pi\eta n)} e^{-2\pi n i x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} e^{2\pi n i x} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$p(x; \{\eta X_\alpha\}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} e^{2\pi n i x} \right) + r_N(x),$$

где

$$r_N(x) = 2 \sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} e^{2\pi n i x} \right).$$

Оценим величину $\max_{0 \leq x \leq 1} |r_N(x)|$. Используя полученное выше равенство, имеем, при $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} e^{2\pi n i x} \right) \right| &\leq \left| \frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} \right| \\ &= \frac{e^{-\pi^2 \eta n (1/\alpha-1)} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta n}}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta n/\alpha}}} \leq \frac{e^{-\pi^2 \eta n (1/\alpha-1)}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |r_N(x)| &\leq 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}}} \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\pi^2 \eta n (1/\alpha-1)} \\ &= \frac{2e^{-\pi^2 \eta N (1/\alpha-1)}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}} (1-e^{-\pi^2 \eta (1/\alpha-1)})}. \end{aligned}$$

В итоге доказано утверждение 2.

Утверждение 2. Имеет место следующее представление плотности $\{\eta X_\alpha\}$: при любом целом $N \geq 2$

$$p(x; \{\eta X_\alpha\}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1+2\pi\eta n i/\alpha)}{\Gamma(1+2\pi\eta n i)} e^{2\pi n i x} \right) + r_N(x),$$

где

$$|r_N(x)| \leq \frac{2e^{-\pi^2 \eta N (1/\alpha-1)}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1-e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}} (1-e^{-\pi^2 \eta (1/\alpha-1)})}.$$

Оценим отклонение $\{\eta X_\alpha\}$ от равномерного на $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\eta X_\alpha\}) - 1| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| 2 \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)} e^{2\pi ni x} \right) + r_N(x) \right| \\ &= 2 \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} e^{2\pi i x} \right) \right| + \tilde{\Delta}_N,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}|\tilde{\Delta}_N| &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left| 2 \sum_{n=2}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)} e^{2\pi ni x} \right) + r_N(x) \right| \\ &\leq 2 \sum_{n=2}^{N-1} \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)} \right| + \frac{2e^{-\pi^2 N(1/\alpha-1)}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}} (1 - e^{-\pi^2 \eta(1/\alpha-1)})}.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} e^{2\pi i x} \right) \right| &= \left| \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} e^{2\pi i x_0} \right) \right| \\ &= \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} \right|,\end{aligned}$$

где

$$x_0 = -\frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} \right) + \frac{r}{2}$$

и целое r выбрано так, чтобы $0 \leq x_0 \leq 1$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 4. *Имеет место следующая оценка отклонения распределения $\{\eta X_\alpha\}$ от равномерного: при любом целом $N \geq 2$*

$$\Delta = 2 \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta i)} \right| + \tilde{\Delta}_N,$$

где

$$|\tilde{\Delta}_N| \leq 2 \sum_{n=2}^{N-1} \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)} \right| + \frac{2e^{-\pi^2 N(1/\alpha-1)}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-4\pi^2 \eta N/\alpha}} (1 - e^{-\pi^2 \eta(1/\alpha-1)})}.$$

З а м е ч а н и е 4. Так как по формуле [7, 6.1.25]

$$\left| \Gamma \left(1 + \frac{2\pi\eta ni}{\alpha} \right) \right| = \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)}{\Gamma(1)} \right| = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(2\pi\eta n/\alpha)^2}{(1+j)^2} \right)^{-1/2},$$

то $|\Gamma(1 + 2\pi\eta ni/\alpha)/\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)|$ монотонно возрастает по α .

В таблице 1 приведены значения оценки величин Δ и $|\tilde{\Delta}_N|$ в зависимости от параметра α при $\eta = 1$. Поскольку последняя очень мала, полученная оценка Δ близка к истинному значению отклонения для рассматриваемых α . При вычислениях бралось $N = 3$.

4. Оценка отклонения распределения первой значащей цифры Y_α от закона Бенфорда. Закон первой значащей цифры (или закон Бенфорда) — это эмпирическая закономерность, наблюдаемая в ряде обширных собраний статистических данных, в соответствии с которой первая значащая цифра принимает значение $d = 1, 2, \dots, 9$ с частотой, примерно равной $\lg(1 + 1/d)$.

История открытия, попытки обоснования закона первой значащей цифры детально описаны в [3] и [1], где также дан обширный список относящейся к этому закону литературы.

В отдельных случаях математическое обоснование закона первой значащей цифры может опираться на следующие соображения. Если X — случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением вероятностей, то случайная величина $Y = 10^X$ имеет первую значащую цифру, равную d , с вероятностью $\lg(1 + 1/d)$. Если теперь X — случайная величина, дробная часть которой распределена приблизительно равномерно на $[0, 1]$, то первая значащая цифра величины Y принимает значение d с вероятностью, близкой к $\lg(1 + 1/d)$. При этом часто приближенная равномерность распределения дробной части X может быть установлена с помощью формулы суммирования Пуассона. Также возможно предсказать и величину отклонения распределения первой значащей цифры Y от закона Бенфорда. А именно, так как

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} &= \mathbf{P}\{D_1(10^X) = d\} = \mathbf{P}\{\lg d \leq \{X\} < \lg(d+1)\} \\ &= \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} p(x; \{X\}) dx = \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} (p(x; \{X\}) - 1) dx, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} - \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \right| &= \left| \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} (p(x; \{X\}) - 1) dx \right| \\ &\leq \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{X\}) - 1|. \end{aligned}$$

Подставляя в это формулу Y_α и используя следствие 3, имеем:

Утверждение 3. *Имеет место следующая оценка отклонения распределения первой значащей цифры случайной величины Y_α от закона Бенфорда:*

$$\left| \mathbf{P}\{D_1(Y_\alpha) = d\} - \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \right| \leq 2.77 \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \sqrt{\alpha}.$$

Это неравенство может быть улучшено, а именно, пользуясь следствием 4 имеем утверждение.

Утверждение 4. *Имеет место следующая оценка отклонения распределения первой значащей цифры случайной величины Y_α от закона Бенфорда: при любом целом $N \geq 2$*

$$\left| \mathbf{P}\{D_1(Y_\alpha) = d\} - \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi \lg(e) i/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi \lg(e) i)} \right| \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \tilde{\Delta}_N,$$

где

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_N| &\leq 2 \sum_{n=2}^{N-1} \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi \lg(e) ni/\alpha)}{\Gamma(1 + 2\pi \lg(e) ni)} \right| \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \\ &\quad + \frac{2e^{-\pi^2 N(1/\alpha-1)} \lg(1 + 1/d)}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - e^{-4\pi^2 \lg(e) N/\alpha}} (1 - e^{-\pi^2 \lg(e)(1/\alpha-1)})}. \end{aligned}$$

В таблице 2 приведены значения оценки отклонения в зависимости от параметра α при $d = 1$ (максимальное значение по d). При вычислениях бралось $N = 3$.

Таблица 1

α	оценка Δ	оценка $ \tilde{\Delta}_N $
0.30	$3.640 \cdot 10^{-10}$	$3.628 \cdot 10^{-20}$
0.35	$3.704 \cdot 10^{-8}$	$4.059 \cdot 10^{-16}$
0.40	$1.176 \cdot 10^{-6}$	$4.376 \cdot 10^{-13}$
0.45	$1.720 \cdot 10^{-5}$	$9.926 \cdot 10^{-11}$
0.50	$1.463 \cdot 10^{-4}$	$7.567 \cdot 10^{-9}$
0.55	$8.395 \cdot 10^{-4}$	$2.612 \cdot 10^{-7}$
0.60	$3.589 \cdot 10^{-3}$	$4.983 \cdot 10^{-6}$
0.65	$1.227 \cdot 10^{-2}$	$6.035 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

α	оценка отклонения
0.15	$4.395 \cdot 10^{-11}$
0.20	$4.820 \cdot 10^{-8}$
0.25	$3.134 \cdot 10^{-6}$
0.30	$4.984 \cdot 10^{-5}$
0.35	$3.553 \cdot 10^{-4}$
0.40	$1.538 \cdot 10^{-3}$
0.45	$4.788 \cdot 10^{-3}$
0.50	$1.187 \cdot 10^{-2}$

В заключении мы выражаем благодарность профессорам Г. И. Ивченко, В. Ф. Колчину, В. В. Сенатову и Д. М. Чибисову за их замечания, способствовавшие улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill T. P. A statistical derivation of the significant-digit law. — Statist. Sci., 1995, v. 10, № 4, p. 354–363.
2. Kanter M. Stable densities under change of scale and total variation inequalities. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 697–707.
3. Raimi R. A. The first digit problem. — Amer. Math. Monthly, 1976, v. 83, № 7, p. 521–538.
4. Золотарев В. М. Преобразования Меллина–Стилтьеса в теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 11, в. 4, с. 444–468.
5. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
7. Абрамовитц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983, 750 с.

Поступила в редакцию
20.1.2004

© 2004 г.

УРУСОВ М. А.*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ И НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ

Пусть $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля, и пусть θ — момент достижения им своего максимума, т.е. $B_\theta = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$. Обозначим $(\mathcal{F}_t^B)_{0 \leq t \leq 1}$ фильтрацию, порожденную B . Доказывается, что для любого $(\mathcal{F}_t^B)$ -момента остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$) имеет место равенство

$$\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathbf{E}|\theta - \tau| + \frac{1}{2}.$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва. Россия; e-mail: urusov@mech.math.msu.su