Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Оценки момента разладки по большим выборкам при неизвестных распределениях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 3, 437–457

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:55:42

ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ

© 2008 г.

БОРОВКОВ А. А.*

ОЦЕНКИ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ ПО БОЛЬШИМ
ВЫБОРКАМ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ¹⁾

Пусть дана выборка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящая из n независимых наблюдений в произвольном измеримом пространстве $\mathcal{X}$ и устроенная следующим образом: первые θ наблюдений имеют распределение F , остальные $n - \theta$ наблюдений — распределение $G \neq F$, при этом распределения F и G нам неизвестны, n и θ велики. В [1] были построены оценки θ^* момента разладки θ с собственной величиной погрешности (т.е. такие, что $\mathbf{P}_\theta\{|\theta^* - \theta| > k\}$ сходится к нулю с ростом k) в предположении, что существует известная функция h , для которой средние значения $h(x_j)$ относительно распределений F и G различны. Там же построены последовательные процедуры. В предлагаемой работе получены аналогичные результаты при ослаблении названного выше предположения или даже при его отсутствии. Один вариант ослабления состоит в предположении, что существуют известные функции $h_1, h_2, \dots, h_l$ на $\mathcal{X}$ такие, что хотя бы для одной из них средние значения $h_j(x_i)$ относительно распределений F и G различны. Другой вариант ослабления не предполагает существования известных нам функций h_j , но допускает возможность оценивать неизвестные распределения F и G по начальной и конечной частям выборки X . Рассмотрены также последовательные процедуры.

Ключевые слова и фразы: задача о разладке при неизвестных распределениях, момент разладки, последовательное оценивание.

1. Оценки момента разладки по всей выборке

1.1. Введение. Пусть дана выборка

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00810) и программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-8980-2006.1).

состоящая из n независимых наблюдений в произвольном измеримом пространстве $\mathcal{X}$. Относительно элементов выборки X мы предполагаем, что первые θ наблюдений имеют распределение F , остальные $n - \theta$ наблюдений — распределение $G \neq F$, при этом распределения F и G нам не известны, а значения θ , $n - \theta$ неограниченно растут при $n \rightarrow \infty$. Задаче об оценке θ^* момента разладки θ по всей выборке X при неизвестных распределениях F и G посвящено значительное количество работ (см., например, [2]–[9]). Краткий обзор результатов из [2]–[9] содержится в [1]. В [8], как и в [1], содержатся также результаты, относящиеся к последовательным процедурам. Более подробные комментарии по поводу результатов работы [8] содержатся в пп. 1.4, 2.4.

Условие $F \neq G$ в [1] трактуется как существование известной нам функции h такой, что $\mathbf{E}h(x^{(F)}) \neq \mathbf{E}h(x^{(G)})$ (здесь и далее $x^{(H)}$ обозначает случайную величину с распределением H (H принимает значения F или G)). При выполнении этого условия в [1] построены оценки θ^* и получены неравенства для $\mathbf{P}_\theta\{|\theta^* - \theta| > k\}$, правые части которых найдены в явном виде (они зависят, естественно, от свойств распределений F и G).

Цель настоящей работы — получить аналогичные результаты при ослаблении названного выше условия о существовании известной функции h или даже при полном отказе от него.

Ослабление этого условия имеет следующий вид.

$[\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_l]$. *Существуют известные нам l измеримых функций $h_1, \dots, h_l$, для которых соотношение $F \neq G$ влечет за собой выполнение по крайней мере одного из неравенств*

$$\mathbf{E}h_j(x^{(F)}) \neq \mathbf{E}h_j(x^{(G)}), \quad j = 1, \dots, l.$$

Например, в случае нормальных (или близких к ним) распределений F и G , когда известно лишь, что $F \neq G$, невозможно указать одну функцию h такую, что $F \neq G$ влечет $\mathbf{E}h(x^{(F)}) \neq \mathbf{E}h(x^{(G)})$. Но если взять две функции $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2$, то с необходимостью соотношение $F \neq G$ влечет за собой выполнение $[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2]$ и это условие перестает быть ограничением. Аналогичная ситуация может иметь место и для других параметрических семейств, например, для семейств равномерных распределений, гамма-распределений и др. Если мы имеем дело с k -мерными нормальными распределениями, $k > 1$, то для того, чтобы «различать» F и G , надо взять $l = k + k(k + 1)/2$ функций (k линейных и $k(k + 1)/2$ квадратичных, соответствующих первым и вторым моментам).

Задачу можно поставить и несколько иначе. При наблюдении за выборкой X нас может интересовать не возможность изменения распределения, а нечто меньшее — возможность изменения лишь некоторого

количества характеристик вида $\mathbf{E}h_j(x_i)$, где $h_j(\cdot)$ — заданные функции. Мы приходим, таким образом, к следующей постановке задачи: даны известные измеримые функции $h_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, l$, такие, что в момент θ меняется хотя бы одно из значений $\mathbf{E}h_j(x_i)$. Задача, по-прежнему, состоит в оценивании параметра θ . Очевидно, что в момент времени θ с необходимостью будет меняться и распределение (но не наоборот). Таким образом, нас интересуют такие изменения распределения, при которых найдется хотя бы одно $j \in \{1, \dots, l\}$, для которого

$$\mathbf{E}h_j(x^{(F)}) \neq \mathbf{E}h_j(x^{(G)}). \quad (1)$$

Отметим, что значение j из (1) (возможно, не единственное) нам *не известно*.

Можно вообще отказаться от условий вида $[\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_l]$. В качестве альтернативного условия можно предполагать возможность оценивать неизвестные распределения F и G (или функционалы от них) по начальной и конечной частям выборки X . Именно, мы можем предполагать, что существует *известная* нам последовательность

$$M = M(n) = o(n), \quad M \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

такая, что

$$M < \theta < n - M \quad (2)$$

при всех достаточно больших n . Это условие, очевидно, всегда выполняется, если

$$\frac{\theta}{n} \rightarrow \rho \in (0, 1) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Это последнее условие предполагается выполненным во многих работах (ср. с [2]–[9]).

Несколько более общее условие состоит в предположении, что θ — случайная величина (байесовский подход) такая, что для распределения P этой величины выполняется условие

$$[\mathbf{P}]: \quad P_{(M)} := P[1, M] \rightarrow 0, \quad P^{(M)} := P[n - M, n] \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, где $M = o(n)$, $M \rightarrow \infty$.

Отметим, что условия $\theta \rightarrow \infty$, $n - \theta \rightarrow \infty$ присутствуют во всех утверждениях и в известном смысле являются необходимыми и, стало быть, не ограничивают общности. Отказ от этих условий делает задачу о моменте разладки при неограниченно растущих n малосодержательной. Условия (2), $[\mathbf{P}]$ суть лишь некоторая спецификация условий $\theta \rightarrow \infty$, $n - \theta \rightarrow \infty$, предполагающая знание нужной нам последовательности M .

1.2. Основные результаты об оценивании θ по всей выборке X при выполнении условия $[h_1, \dots, h_l]$. Пусть выполнено условие $[h_1, \dots, h_l]$. Положим

$$y_i^{(j)} = h_j(x_i), \quad S_l^{(j)} = \sum_{i=1}^l y_i^{(j)},$$

$$y^{(H,j)} = h_j(x^{(H)}), \quad a^{(H,j)} = \mathbf{E}h_j(x^{(H)}), \quad y^{(H,j,0)} = y^{(H,j)} - a^{(H,j)},$$

$$Q_j(t) = \sum_{i=1}^t \left(y_i^{(j)} - \frac{S_t^{(j)}}{t} \right)^2 + \sum_{i=t+1}^n \left(y_i^{(j)} - \frac{S_n^{(j)} - S_t^{(j)}}{n-t} \right)^2. \quad (4)$$

В [1] в качестве одного из подходов к оцениванию θ в случае $l = 1$ был рассмотрен прием, состоящий в наблюдении за траекторией $Q_1(t)$ и выборе в качестве θ значения t , при котором достигается наименьшее значение $Q_1(t)$. При $l > 1$ естественно рассматривать аналог этого подхода, когда наблюдается l траекторий $Q_1(t), \dots, Q_l(t)$ и в качестве оценки параметра θ выбирается значение

$$\theta^* = \arg \min_t Q(t), \quad Q(t) := \sum_{k=1}^l Q_k(t), \quad (5)$$

где достигается «усредненный» минимум.

Ниже мы найдем оценки вероятностей отклонений θ^* от θ при некоторых дополнительных предположениях относительно распределений F и G , касающихся поведения «хвостов» этих распределений.

1.2.1. Сначала рассмотрим случай, когда *распределения величин $y^{(H,j)}$ удовлетворяют условию Крамера*.

Говорят, что случайная величина ξ удовлетворяет двустороннему условию Крамера, если в окрестности точки $\lambda = 0$ выполняется

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi} < \infty. \quad (6)$$

Через $\mathbf{P}_\theta$ обозначим распределение в пространстве последовательностей X при фиксированном значении θ и положим

$$y^{(H)} = \sum_{j=1}^l y^{(H,j)}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1) и $\delta(t)$ — любая фиксированная функция такая, что $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда:

1) если случайная величина $y^{(G)}$ удовлетворяет двустороннему условию Крамера, то существует число $\varphi_1 < 1$ (оно определено в доказательстве), при котором справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_\theta\{\theta^* - \theta > k\} \leq 2\varphi_1^k[1 + o(1)] \quad \text{при } \theta \rightarrow \infty, \quad n - \theta \rightarrow \infty;$$

2) если случайная величина $y^{(F)}$ удовлетворяет двустороннему условию Крамера, то существует число $\varphi_2 < 1$, при котором

$$\mathbf{P}_\theta\{\theta^* - \theta < -k\} \leq 2\varphi_2^k[1 + o(1)] \quad \text{при } \theta \rightarrow \infty, \quad n - \theta \rightarrow \infty.$$

Оценки $o(1)$ в приведенных неравенствах являются равномерными по всем $k > 0$, $k \leq \theta \delta(\theta)$, $k \leq (n - \theta) \delta(n - \theta)$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} z^{(G,j)} &= 2y^{(G,j,0)}(a^{(F,j)} - a^{(G,j)}) - (a^{(F,j)} - a^{(G,j)})^2, \\ z^{(F,j)} &= 2y^{(F,j,0)}(a^{(F,j)} - a^{(G,j)}) + (a^{(F,j)} - a^{(G,j)})^2, \\ z^{(G)} &= \sum_{j=1}^l z^{(G,j)}, \quad z^{(F)} = \sum_{j=1}^l z^{(F,j)}, \end{aligned}$$

где ввиду условия (1) выполнены неравенства $\mathbf{E}z^{(F)} > 0$ и $\mathbf{E}z^{(G)} < 0$.

Отметим, что если $y^{(H)}$ удовлетворяет условию Крамера (6), то этому же условию удовлетворяет и $z^{(H)}$. Отметим также, что если для случайной величины ξ выполнено условие Крамера (6) и $a = \mathbf{E}\xi < 0$, то $\varphi'(0) = a < 0$, $\varphi := \min_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda) < 1$ и этот минимум всегда достигается.

Для величины $Q(t)$, определенной в (5), имеем

$$Q(t) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n (y_i^{(j)})^2 - \tilde{Q}(t),$$

где

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{j=1}^l \tilde{Q}^{(j)}(t), \quad \tilde{Q}^{(j)}(t) = \frac{(S_t^{(j)})^2}{t} + \frac{(S_n^{(j)} - S_t^{(j)})^2}{n - t}.$$

Таким образом, $\theta^* = \arg \max_t \tilde{Q}(t)$. Для $k > 0$ и $y_i^{(j,0)} = y_i^{(j)} - \mathbf{E}y_i^{(j)}$ имеем

$$\begin{aligned} S_{\theta+k}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{\theta} y_i^{(j,0)} + \theta a^{(F,j)} + \sum_{i=\theta+1}^{\theta+k} y_i^{(j,0)} + k a^{(G,j)}, \\ S_n^{(j)} - S_{\theta+k}^{(j)} &= \sum_{i=\theta+1}^n y_i^{(j,0)} + (n - \theta) a^{(G,j)} - \sum_{i=\theta+1}^{\theta+k} y_i^{(j,0)} - k a^{(G,j)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, справедливы разложения:

$$\frac{1}{\theta + k} = \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{k}{\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{\theta} - \frac{k}{\theta^2} + o\left(\frac{k}{\theta^2}\right) \quad (8)$$

при $k \leq \theta \delta(\theta)$, $\theta \rightarrow \infty$, и

$$\frac{1}{n - \theta - k} = \frac{1}{n - \theta} \left(1 - \frac{k}{n - \theta}\right)^{-1} = \frac{1}{n - \theta} + \frac{k}{(n - \theta)^2} + o\left(\frac{k}{(n - \theta)^2}\right) \quad (9)$$

при $k \leq (n - \theta) \delta(n - \theta)$, $n - \theta \rightarrow \infty$. Используя представления (7), (8) и (9), получаем

$$\tilde{Q}(\theta + k) = Q_0 + Z_k + \varepsilon, \quad (10)$$

где

$$Z_k = 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (a^{(F,j)} - a^{(G,j)}) y_{\theta+i}^{(j,0)} - k \sum_{j=1}^l (a^{(F,j)} - a^{(G,j)})^2, \quad (11)$$

а значение

$$Q_0 = \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^{\theta} y_i^{(j,0)} + \theta a^{(F,j)} \right)^2 \frac{1}{\theta} + \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=\theta+1}^n y_i^{(j,0)} + (n - \theta) a^{(G,j)} \right)^2 \frac{1}{n - \theta}$$

не зависит от k , $\varepsilon = \varepsilon(k, \theta, n) \xrightarrow{P} 0$ при $\theta \rightarrow \infty$ и $n - \theta \rightarrow \infty$. Следовательно, согласно (5), (10), (11), $\theta^* - \theta$ есть значение k , которое максимизирует $Z_k + \varepsilon$:

$$\theta^* - \theta = \arg \max_k (Z_k + \varepsilon), \quad (12)$$

при этом суммы Z_k равны суммам независимых одинаково распределенных случайных величин, совпадающих по распределению со случайной величиной $z^{(G)}$, $\mathbf{E} z^{(G)} < 0$. Ввиду представления (12), утверждение п. 1) теоремы 1 следует из леммы 1 в [1] при $\varphi_1 = \min_{\lambda} \varphi^{(G)}(\lambda) < 1$, $\varphi^{(G)}(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda z^{(G)}}$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично при $\varphi_2 = \min_{\lambda} \varphi^{(F)}(\lambda) < 1$.

1.2.2. Рассмотрим теперь случай, когда условие Крамера для $y^{(H)}$ не выполнено.

Функция $V(t)$ называется *правильно меняющейся* при $t \rightarrow \infty$, если она представима в виде $V(t) = t^{-\alpha} L_V(t)$, где $L_V(t)$ — медленно меняющаяся при $t \rightarrow \infty$ функция. В дальнейшем, не оговаривая это особо, мы будем считать, что $\alpha > 1$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1), оценка θ^* определена в (5). Тогда:

1) если $\mathbf{P}\{|y^{(G)}| > t\} \leq V(t)$ для некоторой правильно меняющейся мажоранты $V(t) \equiv t^{-\alpha} L_V(t)$, то существует постоянная $c_1 < \infty$ такая, что справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_{\theta}\{\theta^* - \theta \geq k\} \leq k c_1 V(k) \quad (13)$$

при $\theta \rightarrow \infty$ и $n - \theta \rightarrow \infty$;

2) если $\mathbf{P}\{|y^{(F)}| > t\} \leq W(t)$ для некоторой правильно меняющейся мажоранты $W(t) \equiv t^{-\beta} L_W(t)$, то существует постоянная $c_2 < \infty$ такая, что при $\theta \rightarrow \infty$ и $n - \theta \rightarrow \infty$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}_{\theta}\{\theta^* - \theta \leq -k\} \leq k c_2 W(k). \quad (14)$$

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 1 и теоремы 8 в [1] с использованием леммы 2 в [1]. Это доказательство приводит к неравенству (13), в котором вместо c_1 стоит множитель

$$\left(1 + \frac{1}{2(\alpha + 1)}\right) \left(\frac{A}{2}\right)^{-\alpha} (1 + \varepsilon(k))(1 + o(1)),$$

где $A = \sum_{j=1}^l (a^{(F,j)} - a^{(G,j)})^2$, $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по всем $k > 0$, $k \leq \delta(\theta)\theta$, $k \leq (n - \theta)\delta(n - \theta)$; $\delta(t)$ — любая фиксированная функция такая, что $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ясно, что полученное утверждение влечет за собой (13). Неравенство (14) получается аналогично.

1.3. Оценки параметра θ по всей выборке X по сгруппированным данным. В условии $[\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_l]$, использованном в предыдущем пункте, в качестве функций h_j могут быть взяты моментные функции, гармоники и другие функции, способные при достаточном их количестве «различать» распределения F и G . В этом пункте мы остановимся на индикаторных функциях h_j , что соответствует группировке наблюдений. Мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

$[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$. Существует известное нам разбиение пространства $\mathcal{X}$ на непересекающиеся подмножества $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l, \bigcup_{j=1}^l \mathcal{X}_j = \mathcal{X}$, такое, что

$$\{p_j^{(F)}\} \neq \{p_j^{(G)}\}, \quad \text{где } p_j^{(H)} = H(\mathcal{X}_j) > 0, \quad (15)$$

H принимает значения F и G .

Условие $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ является частным случаем условий $[\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_l]$ и соответствует индикаторным функциям $h_j(x) = I_{\mathcal{X}_j}(x)$. Поэтому для отыскания оценок θ^* мы можем воспользоваться теоремой 1 (условие Крамера для $y^{(H)}$ в этом случае всегда выполнено). Однако если выполнено условие (2), то мы можем воспользоваться несколько иным подходом.

1.4. Оценки параметра θ по сгруппированным данным при выполнении условия (2). Если выполнено условие (2), то мы можем использовать первые и последние M элементов выборки для оценки неизвестных распределений F и G с тем, чтобы получить подходящую «эмпирическую» функцию $h_1^*(x)$, зная которую мы могли бы поступать так же, как в случае выполнения условия $[\mathbf{h}_1]$ (см. [1]).

Итак, пусть выполнены условия $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ и (2). Пусть $\nu_j^{(F)}$, $\nu_j^{(G)}$ — частоты попадания наблюдений в $\mathcal{X}_j$ соответственно в первых и последних M элементах выборки,

$$p_j^{*(H)} = \frac{\nu_j^{(H)}}{M}.$$

Заметим, далее, что в силу (15)

$$s_1 := \sum_{j=1}^l p_j^{(F)} \ln \frac{p_j^{(F)}}{p_j^{(G)}} > 0, \quad s_2 := \sum_{j=1}^l p_j^{(G)} \ln \frac{p_j^{(F)}}{p_j^{(G)}} < 0.$$

Поэтому при любых $\varepsilon_j^{(H)}$ таких, что $|\varepsilon_j^{(H)}| \leq \varepsilon$, и достаточно малых ε будут также выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l p_j^{(F)} \ln \frac{p_j^{(F)}(1 + \varepsilon_j^{(F)})}{p_j^{(G)}(1 + \varepsilon_j^{(G)})} &= s_1 + O(\varepsilon) > 0, \\ \sum_{j=1}^l p_j^{(G)} \ln \frac{p_j^{(F)}(1 + \varepsilon_j^{(F)})}{p_j^{(G)}(1 + \varepsilon_j^{(G)})} &= s_2 + O(\varepsilon) < 0. \end{aligned}$$

В связи с этим естественно ожидать, что для функции

$$h^*(x) = \ln \frac{p_j^{*(F)}}{p_j^{*(G)}} \quad \text{при } x \in \mathcal{X}_j$$

с высокой вероятностью будут выполняться неравенства

$$\mathbf{E}\left(h^*(x^{(F)}) \mid \mathcal{F}\right) > \frac{s_1}{2} > 0, \quad \mathbf{E}\left(h^*(x^{(G)}) \mid \mathcal{F}\right) < -\frac{s_2}{2} < 0, \quad (16)$$

где $\mathcal{F}$ — σ -алгебра, порожденная подвыборками $X_{(M)} := (x_1, \dots, x_M)$ и $X^{(M)} := (x_{n-M+1}, \dots, x_n)$, $x^{(F)}$ и $x^{(G)}$ не зависят от $\mathcal{F}$.

Мы можем перейти теперь к описанию процедуры построения оценки. Пусть выполнено условие (2). Рассмотрим новую выборку $X_{(M)}^{(M)} := (x_{M+1}, \dots, x_{n-M})$ и суммы $S_k = \sum_{i=1}^k h^*(x_{M+i})$. В качестве оценки θ^* возьмем значение

$$\theta^* = M + \min \{k \leq n - 2M : S_k = \bar{S}_{n-2M}\}, \quad (17)$$

где $\bar{S}_r = \max_{k \leq r} S_k$. Такого рода оценки (при неслучайной функции h^* , удовлетворяющей (16) (или условию (D_0) в [1]) были изучены в теореме 1 [1].

Теорема 3. Пусть выполнены условия $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ и (2). Тогда для всех k , $0 \leq k < n - 2M - \theta$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\theta^* - \theta > k\} \leq q_M + 2[\varphi_{(G)} + O(\varepsilon)]^k \quad (18)$$

и для всех k , $0 \leq k < \theta$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\theta^* - \theta < -k\} \leq q_M + 2[\varphi_{(F)} + O(\varepsilon)]^k, \quad (19)$$

где $\varepsilon = M^{-1/4} \rightarrow 0$,

$$\varphi_{(H)} = \min_{\lambda} \sum_{j=1}^l p_j^{(H)} \left(\frac{p_j^{(F)}}{p_j^{(G)}} \right)^{\lambda} < 1,$$

$$q_M \leq 4le^{-b\sqrt{M}(1+o(1))}, \quad b = \min_{j,H} \frac{p_j^{(H)}}{2(1-p_j^{(H)})}.$$

Доказательство. Обозначим через ω элементарное событие из $\mathcal{F}$ и положим при $\varepsilon = M^{-1/4}$

$$\Omega_{M,H} = \left\{ \omega: \max_{j \leq l} |p_j^{*(H)} - p_j^{(H)}| > \varepsilon p_j^{(H)} \right\}, \quad \Omega_M = \Omega_{M,F} \cup \Omega_{M,G}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\theta^* - \theta > k\} \leq q_M + \mathbf{E}(\mathbf{P}\{\theta^* - \theta > k \mid \mathcal{F}; \bar{\Omega}_M), \quad (20)$$

где $q_m = \mathbf{P}(\Omega_M)$. Рассмотрим сначала второе слагаемое в правой части (20). На множестве $\bar{\Omega}_M$, дополнительном к Ω_M , выполнено (16). Кроме того, θ^* и $\mathcal{F}$ независимы. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 1 из [1], в силу которой при $\omega \in \bar{\Omega}_M$, $0 \leq k < n - 2M - \theta$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\{\theta^* - \theta > k \mid \mathcal{F}\} \leq 2\varphi_1^k, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \min_{\lambda} \mathbf{E}(e^{\lambda h^*(x^{(G)})} \mid \mathcal{F}) = \min_{\lambda} \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^l p_j^{(G)} \left(\frac{p_j^{*(F)}}{p_j^{*(G)}} \right)^{\lambda} \mid \mathcal{F} \right) \\ &= \min_{\lambda} \mathbf{E} \left[\left(\sum_{j=1}^l p_j^{(G)} \left(\frac{p_j^{(F)}}{p_j^{(G)}} \right)^{\lambda} + O(\varepsilon) \right) \mid \mathcal{F} \right] = \varphi_{(G)} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

$O(\varepsilon)$ в правой части равномерно по $\omega \in \bar{\Omega}_M$, $O(\varepsilon)$ в промежуточном равенстве равномерно и по λ .

Для оценки слагаемого q_M в (20) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. При $\varepsilon = M^{-1/4}$, $M \rightarrow \infty$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{j \leq l} |p_j^{*(H)} - p_j^{(H)}| > \varepsilon p_j^{(H)} \right\} \leq 2le^{-b\sqrt{M}(1+o(1))}, \quad (22)$$

где

$$b = \min_{j,H} \frac{p_j^{(H)}}{2(1-p_j^{(H)})}. \quad (23)$$

Доказательство. В силу экспоненциального неравенства Чебышёва

$$\mathbf{P}\left\{\max_{j \leq l} (p_j^{*(H)} - p_j^{(H)}) > \varepsilon p_j^{(H)}\right\} \leq \sum_{j=1}^l e^{-M\Lambda_j^{(H)}(p_j^{(H)}(1+\varepsilon))},$$

где

$$\Lambda_j^{(H)}(v) = v \ln \frac{v}{p_j^{(H)}} + (1-v) \ln \frac{1-v}{1-p_j^{(H)}}$$

есть функция уклонений случайной величины в схеме Бернулли с вероятностью значения 1, равной $p_j^{(H)}$. Аналогично,

$$\mathbf{P}\left\{\min_j (p_j^{*(H)} - p_j^{(H)}) < -\varepsilon p_j^{(H)}\right\} \leq \sum_{j=1}^l e^{-M\Lambda_j^{(H)}(p_j^{(H)}(1-\varepsilon))}.$$

Функции $\Lambda_j^{(H)}$ и их первые производные равны 0 в точке $p_j^{(H)}$, а вторые производные положительны, так что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Lambda_j^{(H)}(p_j^{(H)} \pm \varepsilon p_j^{(H)}) = \frac{\varepsilon^2 p_j^{(H)}}{2(1-p_j^{(H)})} + O(\varepsilon^3).$$

Поэтому при $\varepsilon = M^{-1/4}$, $M \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{j \leq l} |p_j^{*(H)} - p_j^{(H)}| > \varepsilon p_j^{(H)}\right\} \leq 2le^{-Mb\varepsilon^2(1+O(\varepsilon))} = 2le^{-b\sqrt{M}(1+o(1))},$$

где b определено в (23). Лемма доказана.

Сопоставляя (20), (21) и утверждение леммы, мы получим (18). Неравенство (19) доказывается точно так же с помощью теоремы 1 в [1]. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если вместо (2) выполнено более широкое условие $[\mathbf{P}]$, то утверждение теоремы 3, очевидно, сохранится, если в правые части неравенств (18), (19) добавить слагаемые $P_{(M)} + P^{(M)}$.

Несколько иной подход к оцениванию θ по сгруппированным данным предложен в [10] в предположении, что выполнены условия $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\theta, n - \theta) > 0.$$

Строятся отношения

$$p_{j,k} = \frac{\nu_{j,k}}{k} \quad \text{и} \quad q_j^{(n-k)} = \frac{\nu_j^{(n-k)}}{n-k},$$

где $\nu_{j,k}$ и $\nu_j^{(n-k)}$ — числа элементов выборок $(x_1, \dots, x_k)$ и $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ соответственно, попавших в множество $\mathcal{X}_j$. Затем рассматриваются суммы $S_k = \sum_{i=1}^k h_k(x_i)$, где

$$h_k(x) = I_{\mathcal{X}_j}(x) \ln \frac{p_{j,k}}{q_j^{(n-k)}},$$

и в качестве θ^* выбирается значение

$$\theta^* = \min \{k \leq n: S_k = \bar{S}_n\}, \quad \bar{S}_n = \max_{k \leq n} S_k.$$

Приведена схема доказательства того, что $|\theta^* - \theta| = O_p(1)$.

1.5. О построении оценок θ без предположения $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$.

Если случайные величины x_i целочисленны и ограничены, скажем, $\mathcal{X} = \{1, \dots, l\}$, то условие $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$, фигурирующее в теореме 3, выполнено очевидным образом и, стало быть, перестает быть ограничением. Если $\mathcal{X}_i$ ограничены, $\mathcal{X} = [-N, N]$, а распределения F и G имеют на $[-N, N]$ положительные плотности, то от условия $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ (или от необходимости строить разбиение $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l\}$) можно избавиться следующим образом. В качестве функции $h^*(x)$, фигурирующей в предыдущем пункте, следует взять $\ln(f^*(x)/g^*(x))$, где f^*, g^* — ядерные оценки плотностей f и g для F и G соответственно, построенные с помощью прямоугольных ядер:

$$f^*(x) = \Delta^{-1}(F_M(x+\Delta) - F_M(x)), \quad g^*(x) = \Delta^{-1}(G^{(M)}(x+\Delta) - G^{(M)}(x)),$$

$-N \leq x \leq N - \Delta$, где $\Delta = \Delta(M) \rightarrow 0$, $\Delta M \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$ (например, $\Delta = M^{-1/2}$), F_M , $G^{(M)}$ — эмпирические функции распределения, построенные соответственно по первым и последним M наблюдениям. Аналогично предыдущему можно построить множества

$$\Omega_{M,F} = \left\{ \max_{-N \leq x \leq N-\Delta} |f^*(x) - f(x)| > \varepsilon f(x) \right\},$$

$$\Omega_{M,G} = \left\{ \max_{-N \leq x \leq N-\Delta} |g^*(x) - g(x)| > \varepsilon g(x) \right\}$$

так, что $q_M = \mathbf{P}\{\Omega_{M,F} \cup \Omega_{M,G}\} \rightarrow 0$ при $\varepsilon = M^{-1/8}$, $M \rightarrow \infty$. В этом случае утверждения (18), (19) теоремы 3 (при прежнем определении (17) оценки θ^*) сохраняются при

$$\varphi_{(F)} = \min_{\lambda} \int_{-N}^{N-\Delta} f(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{\lambda} dx + o(1) < 1,$$

$$\varphi_{(G)} = \min_{\lambda} \int_{-N}^{N-\Delta} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{\lambda} dx + o(1) < 1$$

для $M \rightarrow \infty$.

Аналогичные построения можно делать и в общем случае (с заменой интеграла, например в $\varphi_{(F)}$, на $\int dF(x) \left(\frac{dF(x)}{dG(x)} \right)^\lambda$), но в этом случае они будут выглядеть сложнее. Кроме того, возникают технические трудности, связанные с элементами выборки вне $[-N, N]$ при некотором N . Эти трудности можно устранить, если нам известно такое N , что сужения распределений F и G на $[-N, N]$ различны.

Таким образом, построения оценок θ^* с «собственной» ошибкой (сравнимой с 1) возможно, если предполагать лишь выполнение (2).

С другой стороны, если использовать только эмпирические функции распределения $F_t(x)$ и $F^{(n-t)}(x)$, построенные по выборкам $X_{(t)}$ и $X^{(n-t)}$ соответственно, и минимизировать по t те или иные функционалы от этих функций, то получить точность для θ^* лучше, чем $O(\sqrt{n})$, невозможно. Действительно, названные эмпирические функции к моменту $t = \theta$, сравнимому с n (см. условие (3)), набирают «шум» порядка $1/\sqrt{n}$ и чтобы на этом фоне выделить изменение распределения, нужно порядка $\sqrt{n}$ или более наблюдений.

2. Последовательное оценивание моментов разладки

При рассмотрении последовательных процедур мы не будем фиксировать объем выборки n , считая его, если понадобится, неограниченным. Однако нам будет удобно сохранить растущий параметр n , который можно ассоциировать с большим возможным объемом наблюдений, и считать, что $\theta = \theta(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. (Делать основным растущим параметром неизвестное θ не всегда удобно.)

2.1. Последовательное оценивание при выполнении условий $[h_1, \dots, h_l]$. В условиях этого пункта в дополнение к $[h_1, \dots, h_l]$ мы будем предполагать также, что нам известны значения

$$a_j = \mathbf{E}h_j(x^{(F)}), \quad j = 1, \dots, l, \quad (24)$$

и постоянная $b > 0$ такая, что

$$\max_j \left| \mathbf{E}h_j(x^{(F)}) - \mathbf{E}h_j(x^{(G)}) \right| > 2b. \quad (25)$$

Другими словами, мы знаем, что максимальное ожидаемое изменение $\mathbf{E}h_j(x^{(H)})$ при переходе от $H = F$ к $H = G$ превосходит известное нам значение $2b$.

Предположение о том, что значения a_j нам известны, является естественным, так как «начальное» поведение наблюдаемой системы обычно известно. Если a_j неизвестны, то при выполнении условия

$$\theta > M \quad (26)$$

(первого неравенства в условии (2)) значения a_j можно оценить по первым M наблюдениям величиной $M^{-1} \sum_{i=1}^M h_j(x_i)$ (см. об этом далее замечание 3).

Условие (25) можно трактовать и иначе: нам неизвестна величина b в (25), но мы можем указать «значимое» для эксперимента максимальное изменение $\mathbf{E}h_j(x^{(H)})$ (при замене $H = F$ на $H = G$), момент появления которого нам важно определить. Меньшие изменения для нас не существенны, их можно «не замечать» и считать, что в момент смены F на G (если таковая имела место) «разладки» в новом для нас понимании не произошло.

Отметим, что на самом деле такого рода «количественные» оговорки о существенности изменений должны присутствовать во всех задачах о разладке, так как небольшие изменения F могут оставаться не замеченными при любой процедуре. Например, если в схеме серий $\rho(F, G) = O(1/\sqrt{n})$, где ρ — какая-нибудь метрика, то в течение n наблюдений такое изменение с положительной вероятностью не будет выявлено даже при известных F и G и при использовании оптимальных процедур.

Итак, либо мы будем предполагать, что выполнено (25), либо мы сами назначаем величину b и ищем такой момент разладки, при котором выполнено (25). При этом если (25) не выполнено, то момент смены F на G может оказаться не обнаруженным.

Иные подходы, не связанные с (25), будут рассмотрены в пп. 2.2, 2.3.

При выполнении (25) рассмотрим $2l$ случайных блужданий

$$w_{\pm}^{(j)}(k) = \max[0, w_{\pm}^{(j)}(k-1) \pm (h_j(x_k) - a_j) - b], \quad j = 1, \dots, l.$$

Так как $\mathbf{E}[\pm(h_j(x^{(F)}) - a_j) - b] = -b < 0$, то до момента разладки блуждания $w_{\pm}^{(j)}$ будут эргодическими. Если максимум в (25) достигается на номере j и

$$\mathbf{E}[h_j(x^{(G)}) - h_j(x^{(F)})] \geq 2b, \quad (27)$$

то после момента разладки средний снос блуждания $w_{+}^{(j)}$ будет удовлетворять неравенству

$$\mathbf{E}h_j(x^{(G)}) - a_j - b \geq b > 0. \quad (28)$$

Если вместо (27) выполнено

$$\mathbf{E}[h_j(x^{(G)}) - h_j(x^{(F)})] \leq -2b,$$

то средний снос блуждания $w_{-}^{(j)}$ будет удовлетворять неравенству

$$\mathbf{E}[-h_j(x^{(G)}) + a_j - b] \geq b > 0. \quad (29)$$

Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда все случайные величины $h_j(x^{(F)})$ удовлетворяют двустороннему условию Крамера и нам известно число $\mu > 0$ такое, что

$$\mu < \min_j \lambda_j, \quad \lambda_j = \sup \{ \lambda: \mathbf{E} e^{\lambda |h_j(x^{(F)})|} < \infty \},$$

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \mu \left[\pm (h_j(x^{(F)}) - a_j) - b \right] \right\} < 1 \quad (30)$$

при всех j . Тогда по аналогии с результатами [1] мы приходим к следующей естественной процедуре построения момента остановки, «ближайшего» к точке θ : наблюдения продолжаются до момента $\nu = \nu(N, d(k))$, когда впервые произойдет хотя бы одно из событий

$$w_{\pm}^{(j)}(k) \geq N + d(k)$$

при некотором N и $d(k) = \mu^{-1} \ln k$, $k = 1, 2, \dots$. Другими словами, если

$$\nu_{\pm}^{(j)} = \min \{ k: w_{\pm}^{(j)}(k) \geq N + d(k) \},$$

то

$$\nu = \min \nu_{\pm}^{(j)}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия $[\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_1]$, (24), (25), (30). Тогда:

1) выполнено неравенство

$$\mathbf{P}_{\theta} \{ \nu(N, d(\cdot)) < \theta \} \leq 2 d l e^{-\mu_1 N}, \quad (31)$$

где

$$d = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\mu_1/\mu}, \quad \mu_1 = \min_{j, \pm} \mu_{\pm}^{(j)},$$

$$\mu_{\pm}^{(j)} = \sup \left[\lambda: \exp \{ \lambda [\pm (h_j(x^{(F)}) - a_j) - b] \} \leq 1 \right], \quad \mu_1 > \mu;$$

2) при $\theta \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_{\theta}(\nu - \theta | \nu > \theta) < \frac{N + \mu^{-1} \ln \theta}{b} (1 + o(1)). \quad (32)$$

З а м е ч а н и е 2. Среднее значение «запаздывания» $\nu - \theta$ здесь имеет, как и в [1], порядок $\ln \theta$, т.е. тот же порядок (с точностью до постоянного множителя), что и для асимптотически оптимальной процедуры при известных F и G (см. [10], [11]).

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 9 в [1]. Утверждение (31) вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\theta\{\nu < \theta\} &\leq \mathbf{P}_\theta\left\{\bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^{\theta-1} \left\{w_+^{(j)}(k) \geq N + d(k)\right\}\right\} \\ &\quad + \mathbf{P}_\theta\left\{\bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^{\theta-1} \left\{w_-^{(j)}(k) \geq N + d(k)\right\}\right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_\infty\{w_+^{(j)}(k) \geq N + d(k)\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_\infty\{w_-^{(j)}(k) \geq N + d(k)\}. \end{aligned}$$

Но равномерно по k

$$\mathbf{P}\{w_\pm^{(j)}(k) \geq v\} \leq e^{-\mu_1 v}$$

при всех j (см., например, [12] и определение μ_1). Поэтому

$$\mathbf{P}_\theta\{\nu < \theta\} \leq 2l \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_1(N+d(k))} = 2lde^{-\mu_1 N}.$$

Утверждение (32) доказывается столь же просто: после момента разладки в силу неравенств (28), (29) среднее время достижения границы $N + \mu^{-1} \ln(\theta + k)$ хотя бы одним из блужданий $w_\pm^{(j)}(\theta + k)$ не превзойдет в силу теоремы восстановления $b^{-1}(N + \mu^{-1} \ln \theta)(1 + o(1))$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если a_j не известны и выполнено условие (26), то для a_j можно построить оценки

$$a_j^* = M^{-1} \sum_{i=1}^M h_j(x_i).$$

Если для $h(x_j^{(F)})$ выполнено двустороннее условие Крамера, то

$$\mathbf{P}\{|a_j^* - a_j| > M^{-1/4}\} \leq e^{-c\sqrt{M}}.$$

Такая оценка позволяет использовать описанную в теореме 4 процедуру при замене a_j на a_j^* и при добавлении в правой части неравенства (31) слагаемого $e^{-c\sqrt{M}}$. Если θ случайно, $P_{(M)} = \mathbf{P}\{\theta \leq M\} \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$, то при сохранении того же подхода в правой части (31) появится также слагаемое $P_{(M)}$.

2.2. Последовательное оценивание при известном распределении F . В этом пункте мы будем предполагать, что F известно. Случай неизвестного F при выполнении (2) рассмотрен в п. 2.3.

Рассмотрим следующий общий подход. Разделим выборку X на подвыборки $X_{km,m} = (x_{km+1}, \dots, x_{(k+1)m})$ длиной m и по каждой из них построим эмпирическую функцию распределения $F_{k,m}$. Выберем какое-нибудь расстояние ρ между распределениями, для которого известна асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}_\theta\{\sqrt{m}\rho(F, F_m) > z\} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad z = o(\sqrt{m}),$$

где $F_m = F_{1,m}$, $\theta > m$. Можно рассматривать, скажем, расстояния Колмогорова, $\sqrt{\chi^2}$, $\sqrt{\omega^2}$ и др. Например, для расстояния Колмогорова

$$\rho(F, F_m) = \sup_t |F(t) - F_m(t)| \quad (33)$$

при $z \rightarrow \infty$, $z = o(\sqrt{m})$ и непрерывной функции F выполняется

$$\mathbf{P}_\theta\{\sqrt{m}\rho(F, F_m) > z\} \sim 2e^{-2z^2}. \quad (34)$$

Если F произвольно, то при всех m и z имеет место неравенство

$$\mathbf{P}_\theta\{\sqrt{m}\rho(F, F_m) > z\} \leq 2e^{-2z^2}$$

(см. [13]). Для определенности мы остановимся на расстоянии Колмогорова. Отметим, что для метрики (33) и двух эмпирических функций распределения F_{m_1} и F_{m_2} , соответствующих непрерывной F , справедливо также соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \rho(F_{m_1}, F_{m_2}) > z\right\} \sim 2e^{-2z^2} \quad (35)$$

при $z \rightarrow \infty$, $z^4 = o((m_1 + m_2) \min(m_1, m_2))$ (см. [14]). Это соотношение нам понадобится в п. 2.3, где F будет оцениваться по выборке.

Вернемся к случаю, когда F известно. Для каждой из эмпирических функций распределения $F_{k,m}$, $k = 1, 2, \dots$, найдем расстояния $\rho_k = \rho(F, F_{k,m})$. Введем в рассмотрение границу $b(k) = \sqrt{N + \ln k}$, где N фиксировано или $N \rightarrow \infty$, $N = o(m)$, и будем проводить наблюдения до момента

$$\eta = \min\{k: \sqrt{m}\rho_k > b(k)\}, \quad (36)$$

когда впервые произойдет событие $\{\sqrt{m}\rho_k > b(k)\}$. Если оно не произошло совсем в течение всех доступных наблюдений, то мы будем считать, что разладки не произошло. Если же событие (36) произошло, то мы будем утверждать, что

$$\theta \in \begin{cases} [1, m], & \text{если } \eta = 1, \\ [(\eta - 2)m, \eta m], & \text{если } \eta \geq 2. \end{cases} \quad (37)$$

Вероятность ошибки (ложной тревоги) P_1 при этом будет удовлетворять при $m \rightarrow \infty$ соотношениям

$$\begin{aligned} P_1 &:= \mathbf{P}\{\eta < \infty \mid \theta = \infty\} \leq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\sqrt{m} \rho_k > b(k)\} \mid \theta = \infty\right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{m} \rho_k > \sqrt{N + \ln k} \mid \theta = \infty\} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2(N + \ln k)} \leq 2e^{-2N} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2 \ln k} = ce^{-2N}, \end{aligned}$$

где $c = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty$.

Значение P_1 есть аналог вероятности ошибки первого рода (разладки не было, а тревога прозвучала). Чтобы оценить аналог вероятности ошибки второго рода (разладка была, но осталась незамеченной), рассмотрим при условии

$$A_k = \{\theta \in ((k-1)m, km]\} \quad (38)$$

вероятность

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbf{P}\{\eta > k \mid A_k\} \leq \mathbf{P}\{\sqrt{m} \rho_k \leq b(k) \mid A_k\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sqrt{m} \sup_t |G_m(t) - F(t)| \leq b\left(\frac{\theta}{m} + 1\right)\right\}, \quad (39) \end{aligned}$$

где $G_m(t)$ есть эмпирическая функция распределения, построенная по m наблюдениям из распределения G . Последнее неравенство в (39) следует из того, что A_k влечет за собой событие

$$A'_k = \{\text{все наблюдения из } X_{km,m} \text{ имеют распределение } G\}, \quad k \geq 1. \quad (40)$$

Если $N = o(m)$, $\ln \theta = o(m)$ при $m \rightarrow \infty$, то

$$b(\theta m^{-1} + 1) = \sqrt{N + \ln(\theta + m) - \ln m} = o(\sqrt{m}) \quad (41)$$

и по теореме Санова (см. [15], [16]) в силу (39)

$$\ln P_2 \leq -m R(G, F)(1 + o(1)), \quad (42)$$

где $R(G, F) > 0$ есть расстояние Кульбака–Лейблера между G и F :

$$R(G, F) = \int \left[\ln \frac{dG(t)}{dF(t)} \right] dG(t). \quad (43)$$

Ясно также, что при всех k

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbf{P}\{m\eta > mk \mid \theta \in ((k-1)m, km]\} \\ &\geq \mathbf{P}\{m\eta > \theta + m \mid \theta \in ((k-1)m, km]\}. \end{aligned}$$

Но оценка (42) от k не зависит и, стало быть, для безусловной вероятности $\mathbf{P}_\theta\{m\eta > \theta + m\}$ будем иметь

$$\ln \mathbf{P}_\theta\{m\eta > \theta + m\} \sim -m R(G, F)(1 + o(1)).$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $\ln \theta = o(m)$, момент разладки оценивается с помощью решающего правила (37), где величина η определена соотношением (36), $\rho_k = \rho(F, F_{k,m})$. Тогда вероятности ошибок этого решающего правила обладают свойствами

$$\mathbf{P}\{\eta < \infty \mid \theta = \infty\} \leq ce^{-2N}, \quad (44)$$

$$\ln \mathbf{P}_\theta\{m\eta > \theta + m\} \sim -m R(G, F), \quad (45)$$

где $c = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$, R определено в (43).

2.3. Последовательное оценивание при неизвестных F и G и при выполнении неравенства $\theta > M$. Если выполнено неравенство $\theta > M$ (условие (26)), то распределение F можно оценивать по M первым наблюдениям с помощью эмпирической функции распределения F_M . Остальные наблюдения, как и в предыдущем пункте, разобьем на подвыборки $X_{M+km,m}$ объема m . Эмпирические функции распределения, построенные по этим подвыборкам, вновь обозначим через $F_{k,m}$. Для упрощения изложения будем считать, что M и m имеют один порядок роста (они «соизмеримы»), т.е. $M/m \rightarrow r \in (0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, согласно (35), для непрерывных F

$$\mathbf{P}\{q\sqrt{m}\rho(F_M, F_{k,m}) > z\} \sim 2e^{-2z^2}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (46)$$

где $q = \sqrt{r/(1+r)} \sim \sqrt{M/(M+m)}$. Если F имеет скачки, то знак $\sim$ в (46) следует заменить на асимптотическое неравенство, так как при появлении разрывов у функции F расстояние $\rho(F_M, F_{k,m})$ уменьшается по распределению.

Последовательная процедура отыскания момента разладки в новых условиях совершенно аналогична изложенной в п. 2.2. Функции $b(k)$ и η определяются как прежде (см. (36)) при замене ρ_k на $\rho_k^* = q\rho(F_M, F_{k,m})$. Решающее правило (37) остается в силе. В этом случае, как и прежде, в силу (46) при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_1 = \mathbf{P}\{\eta < \infty \mid \theta = \infty\} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{m}\rho_k^* > \sqrt{N + \ln k} \mid \theta = \infty\} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2(N + \ln k)}(1 + o(1)) = ce^{-2N}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Пусть $A_k = \{\theta \in (M + (k-1)m, M + km]\}$ (ср. с (38)). Тогда для условной вероятности

$$P_2 = \mathbf{P}\{\eta > k \mid A_k\} \leq \mathbf{P}\{\sqrt{m} \rho_k^* \leq b(k) \mid A_k\} \quad (47)$$

имеем

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \mathbf{P}\left\{\sqrt{M} \rho(F, F_M) \geq b(k) \sqrt{r} q^{-1} \mid A_k\right\} \\ &+ \mathbf{P}\left\{\sqrt{m} \rho_k^* \leq b(k) \mid A_k, \sqrt{M} \rho(F, F_M) < b(k) \sqrt{r} q^{-1}\right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

В силу неравенства треугольника $\rho(F_{k,m}, F) \leq \rho(F, F_M) + \rho(F_M, F_{k,m})$. Поэтому

$$\sqrt{m} \rho_k^* \geq q \sqrt{m} \rho'_k - q \sqrt{m} \rho(F, F_M),$$

где ρ'_k распределено как ρ_k в п. 2.2 и не зависит от $\rho(F, F_M)$, так что второе слагаемое в правой части (48) при выполнении A_k и при $\ln \theta = o(m)$ не превосходит

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{q \sqrt{m} \sup |G_m(t) - F(t)| \leq 2b(k)\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sqrt{m} \sup |G_m(t) - F(t)| \leq \frac{2}{q} b \left(\frac{\theta - M + m}{m}\right)\right\} \\ &\leq e^{-mR(G,F)(1+o(1))}. \end{aligned} \quad (49)$$

Следовательно, при $\ln \theta = o(m)$ в силу (47)–(49) (напомним, что $km \geq \theta - M$ на A_k)

$$\begin{aligned} P_2 &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{2r}{q^2} \left(N + \ln \frac{\theta - M}{m} \right) \right\} (1 + o(1)) + e^{-mR(G,F)(1+o(1))} \\ &= 2 e^{-2rN/q^2} \left(\frac{\theta - M}{m} \right)^{-2r/q^2} (1 + o(1)) + e^{-mR(G,F)(1+o(1))}. \end{aligned}$$

Отсюда, аналогично предыдущему, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $m \rightarrow \infty$, $\ln \theta = o(m)$, $M/m \rightarrow r \in (0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$; момент разладки оценивается с помощью решающего правила (37), где функция η определяется в (36) при замене ρ_k на $\rho_k^* = q\rho(F_M, F_{k,m})$, $q = \sqrt{r/(1+r)}$, $N = o(m)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta < \infty \mid \theta = \infty\} &\leq c e^{-2N} (1 + o(1)), \quad c = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}, \\ \mathbf{P}_{\theta}\{m \eta > \theta - M + m\} &\leq 2 e^{-2rN/q^2} \left(\frac{\theta - M}{m} \right)^{-2r/q^2} \\ &\times (1 + o(1)) + e^{-mR(G,F)(1+o(1))}. \end{aligned} \quad (50)$$

З а м е ч а н и е 4. Параметр θ в теоремах 5, 6 согласно правилу (37) определяется с точностью до $2m$. Поэтому если θ и n суть величины одного порядка, то в теоремах 5, 6 следует брать «наименьшее» m , удовлетворяющее условию $m \gg \ln n$ (или $m \gg \ln \theta$). Это означает, что точность определения θ может иметь, например, порядок $m = (\ln \theta) \ln \ln \theta$. Это не сильно отличается от времени запаздывания в теореме 4 (см. замечание 2), имеющего порядок $\ln \theta$, как и в асимптотически оптимальной процедуре при известных F и G . Если m сравнимо с $\ln \theta$ и выбрано так, что

$$m > (1 + v) \frac{\ln \theta}{\rho^2(G, F)}, \quad (51)$$

где $v > 0$ фиксировано, то в правых частях (45), (50) вместо $m R(G, F)$ будет стоять $m Q(v)$, где $Q(v) > 0$ при $v > 0$, $Q(v) \rightarrow R(G, F)$ при $v \rightarrow \infty$. В этом случае порядок времени запаздывания в теоремах 5, 6 будет $\ln \theta$ — такой же, как для асимптотически оптимальной процедуры в [10], [11] при известных F и G . Однако θ и $\rho(F, G)$ нам не известны и указать в явном виде нужное нам m в (51) не удастся.

2.4. О других подходах к последовательному оцениванию θ .

Отметим, что в литературе рассматриваются также алгоритмы последовательного отыскания θ , *допускающие частые ложные тревоги*. Это соответствует тому, что в описанных выше процедурах растущая граница $N + d(k)$ в п. 2.1 и граница $b(k) = \sqrt{N + \ln k}$ в п. 2.2 заменяется *постоянной* границей $b(k) = N = \text{const}$. Ясно, что тогда средняя задержка $E_\theta(\nu - \theta | \nu > \theta)$, например, в (32) при больших фиксированных N будет оцениваться значением $b^{-1}N(1 + o(1))$ (и не зависеть от θ), а среднее число ложных тревог будет расти вместе с θ линейно. Например, если выполнены условия теоремы 4, то среднее время между ложными тревогами будет оцениваться значением $(2le^{-\mu_1 N})^{-1}$ (ср. с (31)), если после каждой ложной тревоги вся процедура начинается заново. Если же начатая процедура продолжается, то оценки времени между ложными тревогами будут сложнее.

В [8] при выполнении условий $[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_l]$ предложены именно такого рода последовательные процедуры, допускающие растущее вместе с θ число ложных тревог. Рассмотрены случаи, когда F известно и когда оба распределения F и G неизвестны. Приведены схемы доказательств утверждений, в силу которых для некоторого большого параметра N время задержки имеет порядок N , а среднее расстояние между ложными тревогами — порядок e^{cN} , $c = \text{const}$.

Описанные процедуры с большим количеством ложных тревог требуют дополнительных исследований, связанных с оценкой временных и материальных затрат на проверку истинности тревог. Эти затраты

растут пропорционально θ при $\theta \rightarrow \infty$. Если другие источники информации об истинности тревог, кроме наблюдений x_i , отсутствуют, то возникает необходимость использовать наблюдения после каждой объявленной тревоги в таких количествах, что время задержки (до момента подтверждения истинности тревоги) составит величину порядка $\ln \theta$ (т.е. того же порядка, что и в теореме 4; предполагается, конечно, что при этом обеспечивается малость вероятности ошибочного подтверждения). Таким образом, в этом случае процедуры с частыми ложными тревогами во многом теряют свой смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borovkov A. A., Linke Yu. Yu. Change-point problem for large samples and incomplete information on distributions. — Math. Methods Statist., 2005, v. 14, № 4, p. 404–430.
2. Дарховский Б. С. Непараметрический метод для апостериорного обнаружения момента «разладки» последовательности независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 1, с. 180–184.
3. Carlstein E. Nonparametric change-point estimation. — Ann. Statist., 1988, v. 16, № 1, с. 188–197.
4. Hawkins D. L. A simple least squares method for estimating a change in mean. — Comm. Statist. Simulation, 1986, v. 15, p. 655–679.
5. Dümbgen L. The asymptotic behavior of some nonparametric change-point estimators. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 3, p. 1471–1495.
6. Boukai B., Zhou H. Nonparametric estimation in a two change-point model. — J. Nonparametr. Statist., 1997, v. 8, № 3, p. 275–292.
7. Huang W.-T., Chang Y.-P. Nonparametric estimation in change-point models. — J. Statist. Plann. Inference, 1993, v. 35, № 3, p. 335–347.
8. Baron M. I. Nonparametric adaptive change-point estimation and on-line detection. — Sequential Anal., 2000, v. 19, № 1–2, p. 1–23.
9. Brodsky B. E., Darkhovsky B. S. Nonparametric Methods in Change-point Problems. Dordrecht: Kluwer, 1993, 209 p.
10. Боровков А. А. Асимптотически оптимальные решения в задаче о разладке. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 625–654.
11. Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997, 771 с.
12. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
13. Massart P. The tight constant in the Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz inequality. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1269–1283.
14. Боровков А. А. К задаче о двух выборках. — Изв. АН СССР, 1962, т. 26, № 4, с. 605–624.
15. Санов И. Н. О вероятности больших отклонений случайных величин. — Матем. сб., 1957, т. 42, № 1, с. 11–44.
16. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.

Поступила в редакцию
8.VIII.2006