Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Несколько замечаний о распределении времени первого выхода и оптимальной остановке $AR(1)$ -последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 3, 458–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2442>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:54:04

© 2008 г.

НОВИКОВ А. А.*

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ВЫХОДА И ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ AR(1)-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

В работе выводятся достаточные условия для экспоненциальной ограниченности времени выхода за уровень авторегрессионной последовательности первого порядка (AR(1)) и доказывается тождество для среднего времени первого выхода. Далее это тождество используется для вывода логарифмической асимптотики среднего времени первого выхода гауссовской AR(1)-последовательности из полосы. Точность асимптотической аппроксимации иллюстрируется результатами статистического моделирования, и указывается поправочный коэффициент, приводящий к существенно лучшей точности. Для случая AR(1)-последовательности, порожденной инновацией с экспоненциальным распределением, выводится явная формула для производящей функции времени первого пересечения уровня, которая далее используется для исследования задачи об оптимальной остановке.

Ключевые слова и фразы: время первого выхода, авторегрессионные процессы, мартингалы, экспоненциальная ограниченность, оптимальная остановка.

1. Введение. AR(1)-последовательность определяется как решение уравнения

$$X_n = \lambda X_{n-1} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

где $\{\eta_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (*инновация*), x и λ — неслучайные константы. Положим

$$\tau_a = \inf\{n \geq 0: X_n > a\} \quad \text{и} \quad \tau_{a,b} = \inf\{n \geq 0: X_n > a \text{ или } X_n < b\},$$

где мы всегда предполагаем, что $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Для случая $\lambda = 1$, т.е. когда X_n является случайным блужданием, в литературе есть много результатов о распределениях τ_a и перескока

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; University of Technology Sydney, Department of Mathematical Sciences, PO Box 123, Broadway, NSW 2007, Australia; e-mail: Alex.Novikov@uts.edu.au

¹⁾ Работа выполнена при поддержке ARC Discovery Grant.

$X_{\tau_a} - a$. Изложение результатов в этом направлении, полученных, в основном, с помощью факторизационной техники Винера–Хопфа, имеется в [4], [11] и многих других монографиях.

Для времени первого выхода $\tau_{a,b}$ известен следующий результат об экспоненциальной ограниченности (см. [24], [26]): если $\lambda = 1$, то

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = 0\} < 1 \implies \tau_{a,b} \in \text{Cr}, \quad (2)$$

где Cr обозначает класс неотрицательных случайных величин с конечным экспоненциальным моментом, т.е.

$$\xi \in \text{Cr} \iff \mathbf{E}e^{\alpha\xi} < \infty \quad \text{для некоторого } \alpha > 0$$

(условие Крамера).

Отметим, что в случае $\lambda = 0$, очевидно,

$$\mathbf{P}\{b \leq \eta_1 \leq a\} < 1 \implies \tau_{a,b} \in \text{Cr}. \quad (3)$$

Некоторые результаты о распределении времени первого выхода τ_a для случая $\lambda \in (0, 1)$ можно найти в работах [14], [15], [19]. В частности, в [19] показано, что если

$$\mathbf{E}(\eta_1^-)^\delta < \infty \quad \text{для некоторого } \delta > 0$$

(где $x^- = \max(-x, 0)$), то при $a > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \leq a(1 - \lambda)\} < 1 \implies \tau_a \in \text{Cr}; \quad (4)$$

кроме того, при выполнении условия

$$\psi(u) := \ln \mathbf{E}e^{u\eta_1} < \infty \quad \text{для всех } u \in [0, \infty) \quad (5)$$

справедливо следующее тождество:

$$\mathbf{E}_x \tau_a = \frac{1}{|\ln \lambda|} \int_0^\infty (\mathbf{E}_x e^{uX_{\tau_a}} - e^{ux}) e^{-\phi(u)} \frac{du}{u}, \quad (6)$$

где $\phi(u) = \sum_{k=0}^\infty \psi(\lambda^k u)$ и символ математического ожидания $\mathbf{E}_x$ соответствует начальному условию $X_0 = x$.

В настоящей работе мы приводим ряд обобщений результатов статьи [19]; в частности, для случая $|\lambda| < 1$ мы даем аналог импликации (4) (см. теорему 1 в п. 2) и приводим формулу для математического ожидания $\tau_{a,b}$ (см. теорему 2 в п. 2). В качестве простого следствия последнего результата мы выводим нижнюю оценку и асимптотику для $\mathbf{E}_x \tau_{a,-a}$ при $a \rightarrow \infty$ для случая гауссовской инновации η_n с нулевым средним (верхняя оценка для $\mathbf{E}_x \tau_{a,-a}$ в этом случае была получена в [10]).

В п. 3 мы обсуждаем случай, когда инновация η_n имеет экспоненциальное распределение $\mathbf{P}\{\eta_n > y\} = e^{-y}$, $y > 0$, которое, конечно,

не удовлетворяет предположению (5). Здесь, используя мартингальный подход, мы выводим явные формулы для $\mathbf{E}_x \tau_a$ и $\mathbf{E}_x \rho^{\tau_a}$, $\rho \in (0, 1)$ (см. теорему 3), которые были уже приведены (без доказательства) в лекционных заметках [18]. Отметим, что в работе [12], мотивированной физическими приложениями, была найдена явная формула для $\mathbf{E}_x \tau_0$ для случая, когда инновация η_n имеет двустороннее экспоненциальное распределение с $\mathbf{P}\{|\eta_n| > y\} = \frac{1}{2} e^{-y}$, $y > 0$.

Теорему 3 можно использовать для анализа некоторых схем контроля качества, в которых наблюдаемые случайные величины имеют экспоненциальное распределение (см. [2]). Еще одно применение теоремы 3 дается в п. 4, где обсуждается задача об оптимальной остановке AR(1)-последовательностей с экспоненциальной инновацией.

В настоящей работе мы применяем, в основном, мартингальную технику, которая уже использовалась в [14], [15] и [17] для анализа распределения τ_a процессов авторегрессионного типа и, в частности, для процесса Орнштейна–Уленбека (т.е. процесса авторегрессии с непрерывным временем). Обзор некоторых результатов, полученных в этом направлении, можно найти в [18]. Из последних работ на эту тему укажем [7] и [8], в которых изучались процессы авторегрессионного типа с инновацией, имеющей распределение в виде смеси экспоненциальных функций.

2. Случай $|\lambda| < 1$. Следующий результат содержит аналоги импликаций (2), (3) и (4).

Теорема 1. 1) Если $|\lambda| \leq 1$, $b < 0 < a$, то

$$\mathbf{P}\{b(1 - \lambda) \leq \eta_1 \leq a(1 - \lambda)\} < 1 \implies \tau_{a,b} \in \text{Cr.}$$

2) Если $\lambda \in (-1, 0)$, $a > 0$ и для некоторого $\delta > 0$

$$\mathbf{E}|\eta_1|^\delta < \infty, \tag{7}$$

то

$$\mathbf{P}\{\eta_1 + \lambda\eta_2 \leq a(1 - \lambda^2)\} < 1 \implies \tau_a \in \text{Cr.} \tag{8}$$

3) Если $\lambda \in (-1, 0)$, $a > 0$ и

$$\mathbf{E} \ln(1 + |\eta_1|) < \infty, \tag{9}$$

то

$$\mathbf{P}\{\eta_1 + \lambda\eta_2 \leq a(1 - \lambda^2)\} < 1 \implies \mathbf{E}_x \tau_a < \infty. \tag{10}$$

Доказательство. 1) В случае $\lambda \in [-1, 0]$ при любом $n > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_{a,b} > n\} &= \mathbf{P}\{\tau_{a,b} > n - 1, X_{n-1} \in [b, a], X_n \in [b, a], \eta_n = X_n - \lambda X_{n-1}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\tau_{a,b} > n - 1, \eta_n \in [b(1 - \lambda), a(1 - \lambda)]\} \\ &= \mathbf{P}\{\tau_{a,b} > n - 1\} \mathbf{P}\{b(1 - \lambda) \leq \eta_n \leq a(1 - \lambda)\}, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено ввиду независимости X_k и η_n при $k < n$. По индукции

$$\mathbf{P}\{\tau_{a,b} > n\} \leq [\mathbf{P}\{b(1-\lambda) \leq \eta_n \leq a(1-\lambda)\}]^n,$$

что влечет соотношение $\tau_{a,b} \in \text{Cr}$ ввиду предположения $\mathbf{P}\{b(1-\lambda) \leq \eta_n \leq a(1-\lambda)\} < 1$.

В случае $\lambda \in (0, 1)$ мы можем использовать импликацию (4). Так как $\tau_{a,b} \leq \tau_a$, то в силу (4)

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \leq a(1-\lambda)\} < 1 \implies \tau_{a,b} \in \text{Cr}.$$

По этой же причине (и ввиду симметрии обозначений) получаем

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \geq b(1-\lambda)\} < 1 \implies \tau_{a,b} \in \text{Cr}.$$

Теперь остается заметить, что

$$\mathbf{P}\{b(1-\lambda) \leq \eta_1 \leq a(1-\lambda)\} < 1 \iff \mathbf{P}\{b(1-\lambda) \leq \eta_1\} \mathbf{P}\{\eta_1 \leq a(1-\lambda)\} < 1.$$

Случай $\lambda = 1$ отмечен выше в (2).

Для доказательства утверждений 2) и 3) заметим, что из (1) следует, что

$$X_{2k} = \lambda^2 X_{2(k-1)} + \eta_{2k} + \lambda \eta_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Последовательность $\eta_{2k} + \lambda \eta_{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, является инновацией для последовательности X_{2k} , $k = 1, 2, \dots$. Поскольку время первого выхода $\tilde{\tau}_a = \inf\{k \geq 0: X_{2k} > a\}$ не меньше $\tau_a/2$, то, применяя (4) к $\tilde{\tau}_a$, получаем (8). По таким же соображениям импликация (10) выполнена в силу теоремы 3 из [19]. Теорема 1 доказана.

Далее в этом пункте мы предполагаем, что $\lambda \neq 0$, $|\lambda| < 1$ и выполнено следующее условие:

$$\psi(u) := \ln \mathbf{E} e^{u\eta_1} < \infty \quad \text{для всех } u \in (-\infty, \infty), \quad (12)$$

которое, конечно, гарантирует выполнение условия (9).

Положим

$$Q(y) = \frac{1}{|\ln \lambda^2|} \int_0^\infty [(e^{uy} - e^{ux}) e^{-\phi(u)} + (e^{-uy} - e^{-ux}) e^{-\phi(-u)}] \frac{du}{u}, \quad (13)$$

где

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^\infty \psi(\lambda^k u) = \psi(u) + \phi(\lambda u), \quad u \in (-\infty, \infty). \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$, $b < 0 < a$, выполнено (12) и

$$\mathbf{P}\{b(1-\lambda) \leq \eta_1\} < 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\eta_1 \leq a(1-\lambda)\} < 1. \quad (15)$$

Тогда

$$\mathbf{E}_x \tau_{a,b} = \mathbf{E}_x Q(X_{\tau_{a,b}}) < \infty.$$

Доказательство. Мы приводим здесь только набросок доказательства, поскольку оно близко к доказательству теоремы 3 из [19].

Сначала мы показываем, что процесс $Q(X_n) - n$ является мартингалом по отношению к естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$. Для случая $\lambda \in (0, 1)$ этот факт следует из соотношения

$$Q(X_n) - n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|\ln \lambda|} \int_0^\infty (e^{uX_n} - e^{ux}) e^{-\phi(u)} \frac{du}{u} - n \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|\ln \lambda|} \int_0^\infty (e^{-uX_n} - e^{-ux}) e^{-\phi(-u)} \frac{du}{u} - n \right],$$

где процессы в квадратных скобках являются мартингалами (см. [19, утверждение 2 и теорема 2]).

Для случая $\lambda \in (-1, 0)$ мы замечаем, что по лемме 1 из [19] интеграл в определении функции $Q(y)$ конечен при выполнении условий (12) и (15).

В силу (1), (12) и теоремы Фубини

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(Q(X_n) - n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \frac{1}{|\ln \lambda^2|} \int_0^\infty \left[(e^{u\lambda X_{n-1} + \psi(u)} - e^{ux}) e^{-\phi(u)} \right. \\ & \quad \left. + (e^{-u\lambda X_{n-1} + \psi(-u)} - e^{-ux}) e^{-\phi(-u)} \right] \frac{du}{u} - n \\ &= \frac{1}{|\ln \lambda^2|} \int_0^\infty \left[(e^{u\lambda X_{n-1}} - e^{\lambda ux}) e^{-\phi(\lambda u)} \right. \\ & \quad \left. + (e^{-u\lambda X_{n-1}} - e^{-\lambda ux}) e^{-\phi(-\lambda u)} \right] \frac{du}{u} - n \\ & \quad + \int_0^\infty \frac{1}{|\ln \lambda^2|} \left[e^{u\lambda x - \phi(\lambda u)} + e^{-u\lambda x - \phi(-\lambda u)} - e^{ux - \phi(u)} - e^{-ux - \phi(-u)} \right] \frac{du}{u} \\ &= Q(X_{n-1}) - n \\ & \quad + \int_0^\infty \frac{1}{|\ln \lambda^2|} \left[e^{u\lambda x - \phi(\lambda u)} + e^{-u\lambda x - \phi(-\lambda u)} - e^{ux - \phi(u)} - e^{-ux - \phi(-u)} \right] \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен 1, так как его можно переписать в форме известного интеграла Фруллани (см. [9, п. 12.16]). Это означает, что процесс $Q(X_n) - n$ является мартингалом и, следовательно, по теореме об остановке мартингалов для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}_x \tau_{a,b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x Q(X_{\min(\tau_{a,b}, n)}).$$

Заключительный этап доказательства состоит в обосновании равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x Q(X_{\min(\tau_{a,b}, n)}) = \mathbf{E}_x Q(X_{\tau_{a,b}}),$$

которое проводится аналогично доказательству сходного факта в [19].

Следствие 1. Пусть $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$, $a > 0$, $\eta_1 \stackrel{d}{=} -\eta_1$ (символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению) и

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \leq a(1 - \lambda)\} < 1.$$

Тогда

$$\mathbf{E}_x \tau_{a,-a} = \frac{1}{|\ln |\lambda||} \int_0^\infty (\mathbf{E}_x \operatorname{ch}(uX_{\tau_{a,-a}}) - \operatorname{ch}(ux)) e^{-\phi(u)} \frac{du}{u} \quad (16)$$

$$\geq \frac{1}{|\ln |\lambda||} \int_0^\infty (\operatorname{ch}(ua) - \operatorname{ch}(ux)) e^{-\phi(u)} \frac{du}{u}. \quad (17)$$

Доказательство. Для обоснования (16) нужно только заметить, что $\phi(u) = \phi(-u)$, и затем упростить выражение (13). Неравенство (17) справедливо в силу оценки $\operatorname{ch}(uX_{\tau_{a,-a}}) \geq \operatorname{ch}(ua)$.

Рассмотрим теперь случай гауссовской инновации $\eta_n \sim N(0, \varepsilon^2)$. В этом случае прямыми вычислениями легко получить, что

$$\phi(u) = \frac{u^2 \varepsilon^2}{2(1 - \lambda^2)}.$$

Задача нахождения асимптотики $\mathbf{E}_x \tau_{a,-a}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для гауссовского случая изучалась в [10], где, в частности, было показано, что при $|x| < 1$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{E}_x \tau_{1,-1} \leq \frac{1 - \lambda^2}{2} \quad (18)$$

(см. теорему 2 в исправленной версии работы [10] или резюме доклада [21]). С помощью следствия 1 теперь мы получаем

Следствие 2. Пусть $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$, $|x| < 1$, $\eta_1 \sim N(0, \varepsilon^2)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{E}_x \tau_{1,-1} = \frac{1 - \lambda^2}{2}. \quad (19)$$

Доказательство. В силу следствия 1

$$\mathbf{E}_x \tau_{1,-1} \geq \frac{1}{|\ln |\lambda||} \int_0^\infty (\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} x) \exp \left\{ -\frac{u^2 \varepsilon^2}{2(1 - \lambda^2)} \right\} \frac{du}{u} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{|\ln |\lambda||} \left(F \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\varepsilon} \right) - F \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\varepsilon} |x| \right) \right), \quad (21)$$

где (например, с использованием программы Mathematica®)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty (\operatorname{ch} u - 1) e^{-u^2/2} \frac{du}{u} = \int_0^x \int_0^\infty \operatorname{sh}(uz) e^{-u^2/2} du dz \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x e^{z^2/2} \operatorname{Erf} \left[\frac{z}{\sqrt{2}} \right] dz. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Erf}[z/\sqrt{2}] \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, то (например, с использованием правила Лопиталя) получаем

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x e^{z^2/2} dz \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{x^2/2} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение вместе с (20) и (18) влечет (19). Следствие 2 доказано.

Используя свойство самоподобия гауссовского распределения, можно легко показать, что математическое ожидание $\mathbf{E}_x \tau_{1,-1}$ при $\varepsilon = 1/a$ совпадает с $\mathbf{E}_{xa} \tau_{a,-a}$ при $\varepsilon = 1$.

Таблицы 1 и 2 содержат результаты моделирования методом Монте-Карло для $\ln \mathbf{E}_0 \tau_{a,-a}$ и соответствующие логарифмы нижней оценки $F(a\sqrt{1-\lambda^2})/|\ln|\lambda||$ (см. (20)) при $\lambda = 0.75$ и 0.9 для случая гауссовской инновации $\eta_i \sim N(0, 1)$.

Для сравнения мы также включили логарифмы функции $F((a + 0.5826)\sqrt{1-\lambda^2})/|\ln|\lambda||$, которую мы называем скорректированной аппроксимацией для $\mathbf{E}_0 \tau_{a,-a}$. Эта аппроксимация основана на предположении о том, что при относительно больших a и λ , близких к 1, математическое ожидание перескока AR(1)-последовательности X_n близко к константе $C = 0.5826 \dots$, которая является пределом математического ожидания перескока $X_{\tau_a} - a$ для гауссовского случайного блуждания $\sum_{k=1}^n \eta_k$ при $a \rightarrow \infty$ (см. [23]).

Таблица 1. $\lambda = 0.75, (1 - \lambda^2)/2 = 0.219$

a	4	5	6	7	8
$\ln(\text{нижняя граница})/a^2$	0.257	0.234	0.224	0.219	0.217
$\ln(\text{скорректированная аппр.})/a^2$	0.317	0.283	0.265	0.255	0.248
$\ln(\text{Монте-Карло})/a^2$	0.325	0.288	0.268	0.258	0.249

Таблица 2. $\lambda = 0.9, (1 - \lambda^2)/2 = 0.095$

a	4	6	8	10
$\ln(\text{нижняя граница})/a^2$	0.203	0.140	0.116	0.106
$\ln(\text{скорректированная аппр.})/a^2$	0.234	0.157	0.129	0.116
$\ln(\text{Монте-Карло})/a^2$	0.236	0.158	0.130	0.117

Таблицы 1 и 2 свидетельствуют о том, что скорректированная аппроксимация дает намного лучшее приближение к результатам моделирования по сравнению с нижней оценкой и тем более по сравнению с предельным значением $(1 - \lambda^2)/2$ (в логарифмической шкале).

3. Случай инновации с экспоненциальным распределением.

Мы будем использовать здесь стандартные обозначения из теории q -рядов (см. [1]) и, в частности, q -символ Похгаммера:

$$\prod_{j=1}^m (1 - \rho \lambda^{j-1}) =: (\rho; \lambda)_m, \quad (\rho; \lambda)_0 = 1.$$

В частности, используя это обозначение, имеем

$$(\lambda; \lambda)_m = \prod_{j=1}^m (1 - \lambda^j).$$

Положим

$$\begin{aligned} N_\rho(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k (\rho; \lambda)_k}{k!}, \quad 0 < \rho < 1; \\ H(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k (\lambda; \lambda)_{k-1}}{k!}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теорема 3. Пусть $0 < \lambda < 1$, $x \in [0, a]$, $a > 0$, $\mathbf{P}\{\eta_1 > y\} = e^{-y}$, $y > 0$. Тогда

1) для любого $\rho \in (0, 1)$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}_x \rho^{\tau_a} = \frac{\rho N_\rho(x)}{N_\rho(a/\lambda)}; \quad (23)$$

2) выполнено равенство

$$\mathbf{E}_x \tau_a = H(a) - H(\lambda x) + 1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что процесс $\rho^n N_\rho(X_n)$ является мартингалом. Нетрудно проверить, что для этого функция $N_\rho(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\rho \mathbf{E} N_\rho(\lambda x + \eta_1) = N_\rho(x) \quad (24)$$

(см. также [19, утверждение 1]).

Так как $\mathbf{E} N_\rho(\lambda x + \eta_1) = \int_0^\infty N_\rho(\lambda x + y) e^{-y} dy$, то после замены $\lambda x + y = z$ получаем

$$\rho \int_{\lambda x}^\infty N_\rho(z) e^{-z} dz = e^{-\lambda x} N_\rho(x). \quad (25)$$

После дифференцирования по x левой и правой части и затем некоторых упрощений получим

$$N'_\rho(x) = \lambda N_\rho(x) - \lambda \rho N_\rho(\lambda x). \quad (26)$$

Будем решать это уравнение методом степенных рядов, предполагая, что $N_\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $c_0 = 1$. Тогда, подставляя этот ряд в (26), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda(1 - \rho \lambda^k) x^k.$$

Приравнявая коэффициенты в левой и правой частях, получаем $c_{k+1}(k+1) = c_k \lambda(1 - \rho \lambda^k)$. Отсюда вытекает, что $c_k = \lambda^k(\rho; \lambda)_k/k!$ и, следовательно, функция $N_\rho(x)$ действительно имеет представление (22).

Применяя теорему об остановке мартингалов, получим, что при любом $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}_x(\rho^{\tau_a} I\{\tau_a \leq n\} N_\rho(X_{\tau_a})) + \mathbf{E}_x(\rho^n I\{\tau_a > n\} N_\rho(X_n)) = N_\rho(x).$$

Так как на множестве $\{\tau_a > n\}$, очевидно, выполнена оценка $N_\rho(X_n) \leq N_\rho(a)$, то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\mathbf{E}_x(\rho^{\tau_a} I\{\tau_a < \infty\} N_\rho(X_{\tau_a})) = N_\rho(x). \quad (27)$$

Из (27), в частности, следует, что $\mathbf{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$, поскольку имеется монотонная сходимости $N_\rho(x) \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow 1$ и любом $x \geq 0$.

Теперь мы воспользуемся известным (по крайней мере, в фольклоре) фактом о том, что

$$X_{\tau_a} - a \stackrel{d}{=} \eta_1; \quad X_{\tau_a} \text{ и } \tau_a \text{ независимы.} \quad (28)$$

Этот факт указан для случайных блужданий (т.е. при $\lambda = 1$), например, в [4]; см. также обобщение этого факта в теореме 4 ниже.

Ввиду указанного факта и (27), имеем

$$\mathbf{E}_x \rho^{\tau_a} = \frac{N_\rho(x)}{\mathbf{E}_x N_\rho(X_{\tau_a})},$$

где в силу (28)

$$\mathbf{E}_x N_\rho(X_{\tau_a}) = \mathbf{E}_x N_\rho(a + \eta_1) = \frac{N_\rho(a/\lambda)}{\rho}.$$

Таким образом, (23) доказано.

Для доказательства второй части теоремы 3 мы рассмотрим асимптотическое разложение математического ожидания $\mathbf{E}_x \rho^{\tau_a}$ при $\rho \rightarrow 1$. Заметим, что $(1 - \mathbf{E}_x \rho^{\tau_a})/(1 - \rho) \rightarrow \mathbf{E}_x \tau_a$. С другой стороны, при $k \geq 1$ имеем $(\rho; \lambda)_k/(1 - \rho) \rightarrow (\lambda; \lambda)_{k-1}$ и, следовательно,

$$N_\rho(x) = 1 + (1 - \rho) \left(\lambda x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k (\lambda; \lambda)_{k-1}}{k!} \right) + o(1 - \rho).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mathbf{E}_x \rho^{\tau_a}}{1 - \rho} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a^k(\rho; \lambda)_k / k! - \rho \sum_{k=0}^{\infty} (x\lambda)^k(\rho; \lambda)_k / k!}{(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} a^k(\rho, \lambda)_k / k!} \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a^k(\lambda; \lambda)_{k-1}}{k!} - \frac{(x\lambda)^k(\lambda; \lambda)_{k-1}}{k!} \right) + o(1 - \rho) \right) \\ &\quad \times (1 + o(1))^{-1} \longrightarrow H(a) - H(\lambda x) + 1 = \mathbf{E}_x \tau_a. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема обобщает использованный выше результат (28) на случай нелинейных границ и $\lambda \in (0, 1]$.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in (0, 1]$, $\mathbf{P}\{\eta_1 > y\} = e^{-y}$, $y > 0$, и

$$\tau_f = \inf\{n \geq 0: X_n > f(n)\}, \quad f(0) > x, \quad \Upsilon_f = X_{\tau_f} - f(\tau_f),$$

где $f(n)$ — неслучайная функция. Тогда для любого $n > 0$ и $y \geq 0$

$$\mathbf{P}\{\Upsilon_f > y, \tau_f \leq n\} = e^{-y} \mathbf{P}\{\tau_f \leq n\}.$$

Доказательство. В силу марковского свойства AR(1)-последовательности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\Upsilon_f > y, \tau_f \leq n\} &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{X_k > f(k) + y \mid \tau = k\} \mathbf{P}\{\tau_f = k\} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{X_k > f(k) + y \mid X_{k-1} \leq f(k-1), X_k > f(k)\} \mathbf{P}\{\tau_f = k\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}\{\eta_k > f(k) - \lambda X_{k-1} + y, X_{k-1} \leq f(k-1)\}}{\mathbf{P}\{\eta_k > f(k) - \lambda X_{k-1}, X_{k-1} \leq f(k-1)\}} \mathbf{P}\{\tau_f = k\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Так как при любом $y \geq 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\eta_k > f(k) - \lambda X_{k-1} + y, X_{k-1} \leq f(k-1)\} \\ &= \int_{-\infty}^{f(k-1)} \mathbf{P}\{\eta_k > f(k) - \lambda z + y\} \mathbf{P}\{X_{k-1} \in dz\} \\ &= e^{-f(k)-y} \int_{-\infty}^{f(k-1)} e^{\lambda z} \mathbf{P}\{X_{k-1} \in dz\} \end{aligned}$$

(мы воспользовались независимостью случайных величин X_{k-1} и η_k), то (29) равно $\sum_{k=1}^n e^{-y} \mathbf{P}\{\tau_f = k\} = e^{-y} \mathbf{P}\{\tau_f \leq n\}$. Теорема 4 доказана.

4. Одна задача об оптимальной остановке для AR(1)-последовательностей. Здесь мы обсуждаем классическую задачу об оптимальной остановке, которая заключается в нахождении функции (цены)

$$V_{\mathcal{M}}(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}_x[\rho^{\tau} g(X_{\tau}) I\{\tau < \infty\}],$$

где $\rho \in (0, 1)$, $g(x)$ — неотрицательная функция выплат, $\mathcal{M}$ — заданный класс моментов остановки по отношению к естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$, X_n — AR(1)-последовательность. В качестве $\mathcal{M}$ обычно рассматриваются либо $\overline{\mathcal{M}}$ — класс всех моментов остановки, либо класс ограниченных моментов остановки

$$\mathcal{M}_T = \{\tau \in \overline{\mathcal{M}}: \tau \leq T\}.$$

Изложение общей теории задач об оптимальной остановке с большим количеством примеров имеется в [6], см. также [22], [5], [20]. Известно, что $V_{\mathcal{M}}(x)$ является решением уравнения Вальда–Беллмана, которое в рассматриваемом нами случае имеет следующий вид:

$$V_{\mathcal{M}}(x) = \max\{g(x), \rho \mathbf{E}_x V_{\mathcal{M}}(\lambda x + \eta_1)\}. \quad (30)$$

Насколько мы знаем, явное решение этого уравнение не было известно ни для каких нетривиальных примеров AR(1)-последовательностей с $\lambda \in (0, 1)$ (случай $g(x) = \text{const}$ не представляет интереса).

Далее мы предполагаем, что $\mathbf{P}\{\eta_1 > y\} = e^{-y}$, $y > 0$.

Используя лемму Фату, получаем

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{M}}(x) &\leq \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{M}}} \sup_{a > 0} \mathbf{E}_x \left[\rho^{\min(\tau_a, \tau)} N_{\rho}(X_{\min(\tau_a, \tau)}) \frac{g(X_{\min(\tau_a, \tau)})}{N_{\rho}(X_{\min(\tau_a, \tau)})} \right] \\ &\leq \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{M}}} \sup_{a > 0} \mathbf{E}_x [\rho^{\min(\tau_a, \tau)} N_{\rho}(X_{\min(\tau_a, \tau)})] A, \end{aligned}$$

где $A = \sup_{y > 0} (g(y)/N_{\rho}(y))$ и по мартингальному свойству процесса $\rho^n N_{\rho}(X_n)$ (см. доказательство теоремы 3) $\mathbf{E}_x [\rho^{\min(\tau_a, \tau)} N_{\rho}(X_{\min(\tau_a, \tau)})] = N_{\rho}(x)$. Поскольку из (22) следует, что для функции $N_{\rho}(y)$ выполнены неравенства $(\rho; \lambda)_{\infty} \exp\{\lambda y\} \leq N_{\rho}(y) \leq \exp\{\lambda y\}$, то константа A конечна для непрерывных функций выплат $g(x)$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} g(x) \exp\{-\lambda x\} < \infty. \quad (31)$$

Чтобы получить нижнюю оценку для $V_{\mathcal{M}}(x)$, заметим, что

$$V_{\mathcal{M}}(x) \geq \sup_{a > 0} \mathbf{E}_x [\rho^{\tau_a} g(X_{\tau_a})], \quad (32)$$

где, с использованием (28) и теоремы 3, имеем

$$\mathbf{E}_x [\rho^{\tau_a} g(X_{\tau_a})] = \mathbf{E}_x \rho^{\tau_a} \mathbf{E}_x g(X_{\tau_a}) = \rho N_{\rho}(x) \frac{\mathbf{E} g(a + \eta_1)}{N_{\rho}(a/\lambda)}. \quad (33)$$

Так как всегда $V_{\mathcal{M}}(x) \geq g(x)$, то из (32) и (33) получается следующая нижняя оценка:

$$V_{\mathcal{M}}(x) \geq G(x) := \max \left\{ g(x), \rho N_{\rho}(x) \sup_{a > 0} \frac{\mathbf{E} g(a + \eta_1)}{N_{\rho}(a/\lambda)} \right\}. \quad (34)$$

Этот результат наводит на предположение, что в классе $\overline{\mathcal{M}}$ оптимальным моментом остановки может быть (при некоторых дополнительных ограничениях на функцию выплат $g(x)$) время пересечения уровня a^* , на котором достигается максимум функции $B(a) = \mathbf{E}g(a + \eta_1)/N_\rho(a/\lambda)$. Один из возможных путей проверки этого предположения состоит в доказательстве того, что нижняя оценка является единственным (в подходящем классе функций) решением уравнения Вальда–Беллмана (30). Доказательство нижеследующего результата основано на другом подходе, который заключается в проверке того, что нижняя оценка является также и верхней оценкой для функции цены (этот подход использовался, например, в [20] для случайных блужданий и процессов Леви).

Теорема 5. Пусть $\lambda \in (0, 1)$, $\mathbf{P}\{\eta_1 > y\} = e^{-y}$, $y > 0$, и $g(x)$ — непрерывная неубывающая функция выплат, $g(0) = 0$. Предположим также, что функция $B(a) = \mathbf{E}g(a + \eta_1)/N_\rho(a/\lambda)$ имеет единственный максимум в точке $a^* > 0$. Тогда при $x \in [0, a^*)$ момент остановки

$$\tau_{a^*} = \inf\{n \geq 0: X_n > a^*\}$$

является оптимальным в классе $\overline{\mathcal{M}}$ и

$$V_{\overline{\mathcal{M}}}(x) = \rho N_\rho(x) \frac{\mathbf{E}g(a^* + \eta_1)}{N_\rho(a^*/\lambda)}.$$

Доказательство. Полученная выше нижняя оценка (34) в силу условия о неубывании и непрерывности функции $g(x)$ и других условий теоремы 5 имеет следующий вид:

$$V_{\overline{\mathcal{M}}}(x) \geq G(x) := \rho N_\rho(x) \sup_{a > 0} \frac{\mathbf{E}g(a + \eta_1)}{N_\rho(a/\lambda)} = \rho N_\rho(x) B(a^*).$$

Чтобы показать, что $V_{\overline{\mathcal{M}}}(x) \leq G(x)$, заметим сначала, что в силу неотрицательности $g(x)$

$$V_{\overline{\mathcal{M}}}(x) \leq \sup_{T > 0} V_{\mathcal{M}_T}(x).$$

Хорошо известно, что оптимальный момент остановки в классе $\mathcal{M}_T$ имеет следующий вид:

$$\tau_{\text{opt}} = \tau_f = \min\{n \leq T: g(X_n) = V_{\mathcal{M}_{T-n}}(x)\} = \min\{n \leq T: X_n > f_n\},$$

где $f = f(n)$ — некоторая детерминированная граница и последнее равенство справедливо в силу условий неубывания и непрерывности функции $g(x)$ (и непрерывности распределения X_n).

Таким образом,

$$V_{\mathcal{M}_T}(x) = \mathbf{E}_x[\rho^{\tau_f} g(X_{\tau_f})] = \mathbf{E}_x[\rho^{\tau_f} \mathbf{E}_x(g(f(\tau_f) + \eta_1) \mid \tau_f)], \quad (35)$$

где мы воспользовались доказанным выше (см. теорему 4) фактом о независимости τ_f и перескока $X_{\tau_f} - f(\tau_f) \stackrel{d}{=} \eta_1$. Так как процесс $\rho^n N_\rho(X_n)$ является мартингалом, то

$$\mathbf{E}_x \rho^{\tau_f} N_\rho(X_{\tau_f}) = N_\rho(x).$$

С другой стороны, опять же в силу независимости τ_f и перескока $X_{\tau_f} - f(\tau_f) \stackrel{d}{=} \eta_1$, имеем

$$\mathbf{E}_x \rho^{\tau_f} N_\rho(X_{\tau_f}) = \mathbf{E}_x \rho^{\tau_f} \mathbf{E}_x N_\rho(X_{\tau_f}).$$

Из последних двух соотношений и (35) следует, что

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{M}_T}(x) &\leq \mathbf{E}_x \left[\rho^{\tau_f} \mathbf{E}_x (N_\rho(f(\tau_f) + \eta_1) \mid \tau_f) \sup_{\tau_f} \frac{\mathbf{E}_x(g(f(\tau_f) + \eta_1) \mid \tau_f)}{\mathbf{E}_x(N_\rho(f(\tau_f) + \eta_1) \mid \tau_f)} \right] \\ &\leq \mathbf{E}_x [\rho^{\tau_f} \mathbf{E}_x (N_\rho(f(\tau_f) + \eta_1) \mid \tau_f)] \sup_a \frac{\mathbf{E}g(a + \eta_1)}{\mathbf{E}N_\rho(a + \eta_1)} \\ &= N_\rho(x) \sup_a \frac{\mathbf{E}g(a + \eta_1)}{\mathbf{E}N_\rho(a + \eta_1)}. \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что последний супремум равен $\rho B(a^*)$.

З а м е ч а н и е. Доказательство теоремы 5 было бы проще, если бы было известно, что в классе $\overline{\mathcal{M}}$ оптимальный момент остановки является моментом выхода за уровень. Такого типа результаты известны для процессов Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем, не имеющих положительных скачков (см., например, статью [3], в которой существенно использовалась техника и результаты статей [13] и [16]).

В заключение, автор выражает признательность Брите Рус и Фиме Клебанеру за стимулирующие обсуждения результатов работы [10], а также Нино Кордзахия, Юпапори Арепонг, Габриелу Митетели, Саованит Сакпарунгси и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrews G. E., Askey R., Roy R. Special Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 664 с.
2. Areepong Y., Novikov A. A. EWMA control charts for changes in exponential distributions. — J. Quality Measurement and Anal. (to appear).
3. Baurdoux E. J. Examples of optimal stopping via measure transformation for processes with one-sided jumps. — Stochastics, 2007, v. 79, № 3–4, p. 303–307.
4. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
5. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 167 с.

6. *Peskir G., Shiryaev A. N.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
7. *Jacobsen M., Jensen A. T.* Exit times for a class of piecewise exponential Markov processes with two-sided jumps. — *Stochastic Process. Appl.*, 2007, v. 117, № 9, p. 1330–1356.
8. *Jacobsen M.* Exit times for a class of autoregressive sequences and random walks. Working paper. Copenhagen: Dept. of Appl. Math. and Statist., Univ. of Copenhagen.
9. *Джеффрис Г., Свирлас Б.* Методы математической физики, т. 2. М.: Мир, 1969, 352 с.
10. *Клебанер Ф. К., Липцер Р. Ш.* Большие отклонения для рекуррентных последовательностей с последствием. — *Проблемы передачи информ.*, 1996, т. 32, № 4, с. 23–34; испр. версия: http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0603/0603407v1.pdf.
11. *Kyprianou A. E.* Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 373 p.
12. *Larralde H.* A first passage time distribution for a discrete version of the Ornstein-Uhlenbeck process. — *J. Phys. A*, 2004, v. 37, № 12, p. 3759–3767.
13. *Lerche H. R., Urusov M.* Optimal stopping via measure transformation: the Beibel-Lerche approach. — *Stochastics*, 2007, v. 79, № 3–4, p. 275–291.
14. *Новиков А. А.* О моменте первого выхода процесса авторегрессии за уровень и одно применение в задаче «разладки». — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1990, т. 35, в. 2, с. 282–292.
15. *Новиков А. А., Эргашев Б. А.* Предельные теоремы для момента достижения уровня процессом авторегрессии. — *Тр. МИАН*, 1993, т. 202, с. 209–233.
16. *Новиков А. А.* Мартингалы и моменты первого выхода для процесса Орнштейна-Уленбека со скачками. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, т. 48, в. 2, с. 340–358.
17. *Novikov A. A., Melchers R. E., Shinjikashvili E., Kordzakhia N.* First passage time of filtered Poisson process with exponential shape function. — *Probab. Engrg. Mech.*, 2005, v. 20, № 1, p. 33–44.
18. *Novikov A. A.* Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes: survey of results on first passage times. — *Lecture notes at the conference «Stochastic Calculus with Jumps»*. Univ. of Angers, 2006; <http://www.im.pwr.wroc.pl/~jumps/ln/novikov.pdf>
19. *Novikov A. A., Kordzakhia N.* Martingales and first passage times of AR(1) processes. — *Stochastics*, 2008, v. 80, № 2–3, p. 197–210.
20. *Novikov A. A., Shiryaev A. N.* On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments. — *Stochastics*, 2007, v. 79, p. 393–406.
21. *Ruths B.* Exit times for past dependent systems. — *Extended abstracts of Russian-Scandinavian Symposium on Probability Theory and Applied Probability*, Petrozavodsk, 2006, p. 72.
22. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ: оптимальные правила остановки. М.: Наука, 1976, 272 с.
23. *Siegmund D.* Sequential Analysis — Tests and Confidence Intervals. New York: Springer-Verlag, 1985, 272 p.
24. *Stein C.* A note on cumulative sums. — *Ann. Math. Statist.*, 1946, v. 17, p. 498–499.
25. *Vervaat V.* On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. — *Adv. Appl. Probab.*, 1979, v. 11, p. 750–783.
26. *Wijsman R. A.* Stopping times: termination, moments, distribution. — *Handbook of Sequential Analysis*. New York: Dekker, 1991, p. 67–119.

Поступила в редакцию
16.X.2007

Исправленный вариант
3.III.2008