Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Аркин, А. Д. Сластников, Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 3, 516–533

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:41:15

НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ

© 2008 г. АРКИН В. И.*, СЛАСТНИКОВ А. Д.*

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОЙ
ОСТАНОВКИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Описывается вариационный подход к решению задач оптимальной остановки диффузионных процессов как альтернатива традиционному подходу, основанному на решении задачи Стефана со свободной границей. Устанавливается вариационная природа условия гладкого склеивания. Приводится пример, когда решение задачи Стефана не является решением задачи оптимальной остановки. На основе предложенного подхода получено решение задачи оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения с однородной функцией выплат.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, оптимальная остановка, вариационный подход, гладкое склеивание, двумерное геометрическое броуновское движение, задача Стефана.

1. Введение. Описание подхода. Пусть на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задан диффузионный процесс X_t , $t \geq 0$, со значениями в $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим задачу оптимальной остановки для этого процесса вида

$$U(x) = \sup_{\tau} \mathbf{E}^x g(X_{\tau}) e^{-\rho \tau}, \quad (1)$$

где $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ есть функция выплат, $\rho \geq 0$ — коэффициент дисконтирования, $\mathbf{E}^x$ — символ математического ожидания, означающий, что процесс X_t начинается в точке x , а супремум берется по некоторому классу моментов остановки (м.о.) τ (обычно это класс $\mathcal{M}$ всех м.о. относительно фильтрации $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$).

Традиционное понимание решения задачи (1) — это нахождение м.о. τ^* , на котором достигается супремум в (1), и функции $U(x)$, соответствующей различным начальным значениям x (см., например, [1]).

* Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: arkin@cemi.rssi.ru, slast@cemi.rssi.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00541, 08-06-00154).

Другими словами, (1) трактуется как семейство задач, зависящих от параметра x (марковский подход, «массовая» постановка).

Во многих случаях оптимальным моментом остановки в задаче (1) является момент первого выхода процесса X_t из области продолжения наблюдений $C = \{U(x) > g(x)\}$. Неизвестные функцию $U(x)$ и область C обычно предлагается искать как решение так называемой задачи Стефана со свободной границей:

$$\mathbf{L}_X U(x) = \rho U(x), \quad x \in C; \quad (2)$$

$$U(x) = g(x), \quad x \in \partial C; \quad (3)$$

$$\text{grad } U(x) = \text{grad } g(x), \quad x \in \partial C \quad (4)$$

([1, гл. III]; здесь $\mathbf{L}_X$ — инфинитезимальный оператор процесса X_t , ∂C — граница множества C). Условие (3) называется условием «непрерывного склеивания», а условие (4) — условием «гладкого склеивания». Доказательство необходимости условия (4) в одномерном случае можно найти в [1]. Аналогичный результат для многомерного случая при жестких дополнительных предположениях был получен в [2].

В данной работе развивается другой подход к решению задачи оптимальной остановки, который мы назвали вариационным. В рамках этого подхода априори задается класс «областей продолжения», среди которых предлагается искать оптимальную. При этом, в отличие от массовой постановки, рассматривается индивидуальная задача (1) для фиксированного начального состояния процесса $X_0 = x$.

Пусть $\mathcal{G} = \{G\}$ — заданное семейство областей в $\mathbf{R}^n$, $\tau_G = \tau_G(x) = \inf\{t \geq 0: X_t \notin G\}$ — момент первого выхода процесса X_t из области G (очевидно, $\tau_G = 0$ при $x \notin G$), а $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \{\tau_G, G \in \mathcal{G}\}$ — множество моментов первого выхода для класса областей $\mathcal{G}$. В дальнейшем будем считать, что $\tau_G < \infty$ (п.н.) для всех $G \in \mathcal{G}$.

При фиксированном начальном значении процесса x каждой области продолжения наблюдений $G \in \mathcal{G}$ можно поставить в соответствие функцию множества

$$V_G(x) = \mathbf{E}^x g(X_{\tau_G}) e^{-\rho \tau_G}. \quad (5)$$

Очевидно, что вне области G эта функция совпадает с функцией выплат g (т.е. $V_G(x) = g(x)$, $x \notin G$), а внутри G функция $V_G(x)$ является (при некоторых предположениях) решением граничной задачи Дирихле:

$$\mathbf{L}_X u(x) = \rho u(x), \quad x \in G; \quad u(y) \rightarrow g(x), \quad y \in G, \quad y \rightarrow x \in \partial G. \quad (6)$$

Для вычисления функций множества типа (5) могут также использоваться и мартингалльные методы (см., например, [1], [3], [4]).

Таким образом, нахождение момента оптимальной остановки в классе м.о. $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ можно свести к решению вариационной задачи

$$V_G(x) \rightarrow \max_{G \in \mathcal{G}}. \quad (7)$$

А именно, если G^* есть оптимальная область в (7), то оптимальный момент остановки в классе $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ совпадает с моментом первого выхода процесса из этой области: τ_{G^*} .

Если при этом класс областей $\mathcal{G}$ выбран «удачно», то удастся доказать, что момент τ_{G^*} будет и оптимальным моментом остановки в задаче (1) по всем м.о. $\mathcal{M}$. Ниже такой подход будет реализован для процесса X_t двумерного геометрического броуновского движения и однородной функции выплат g .

В одномерном случае идея вариационного подхода, а именно, максимизация ожидаемых выплат по моментам выхода диффузионного процесса из некоторого параметрического семейства областей (полуинтервалов), была высказана в [5] в связи с задачей расчета рациональной стоимости «Русского опциона».

Максимизация по уровням выхода геометрического броуновского движения использовалась в [6] как метод определения оптимального момента инвестирования в рамках теории реальных опционов.

Близкий подход развивался в [7], где задача оптимальной остановки произвольного одномерного диффузионного процесса сводилась к задаче математического программирования. Однако этот метод существенно опирался на ряд свойств одномерного диффузионного процесса, не имеющих места в многомерном случае.

Что касается многомерных процессов, то условия первого порядка как эвристический способ нахождения границ оптимального «сектора продолжения наблюдений» в задаче оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения и однородной (первой степени) функции выплат использовались в работе [4]. Общая концепция вариационного подхода и его применение к задачам оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения, возникающим в моделях инвестирования, рассматривались в [8], [9].

Отметим, что вычисление оптимального момента остановки в заданном классе областей представляет, на наш взгляд, и практический интерес. Связано это с тем, что для многомерных процессов, как правило, невозможно получить в явном виде решение задачи Стефана. Поэтому имеет смысл подобрать класс областей, для которых можно тем или иным способом вычислить функцию множеств $V_G(x)$. При этом для решения задачи (7) с фиксированным начальным условием $X_0 = x$ можно использовать и численные методы.

Заметим также, что сама идея вариационного подхода является до-

вольно универсальной и может быть использована не только для диффузионных процессов и функций выплат вида (1). Так например, в задаче оптимальной остановки для случайных блужданий решение находилось с помощью оптимизации по классу областей (полуинтервалов) — см. [10].

Статья организована следующим образом. В п. 2 дается описание вариационного подхода для случая, когда класс областей продолжения представляет собой однопараметрическое семейство множеств в $\mathbf{R}^n$. Описывается вариационная природа условий гладкого склеивания и показывается, что эти условия в рассматриваемом случае эквивалентны условию стационарной точки для некоторой функции одной переменной. Приводятся примеры задач оптимальной остановки, для которых решение задачи Стефана не является решением задачи оптимальной остановки.

В п. 3 показывается, как вариационный подход используется для решения задачи оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения с однородной (неотрицательной степени однородности) функцией выплат. Отметим, что линейный вариант этой задачи, возникающий в моделях оптимального выбора момента инвестирования для создания предприятий, на эвристическом уровне рассматривался в [11] и послужил основой теории реальных опционов (см., например, [12]). Строгое обоснование формулы для оптимального момента остановки из [11], а также условия, при которых она справедлива, были даны в [13]. Сведение задачи выбора оптимального момента инвестирования проектов создания новых предприятий с учетом налоговой системы к оптимальной остановке двумерного геометрического броуновского движения с линейной функцией выплат было проведено в [9]. Для решения этой задачи был использован вариационный подход.

Случай нелинейной однородной (первой степени) функции выплат, возникающий в рамках теории реальных опционов при наличии налоговых льгот, рассматривается в п. 4.

2. Вариационная задача и принцип гладкого склеивания.

При некоторых дополнительных предположениях общую вариационную задачу (7) можно несколько упростить и сделать более удобной для исследования.

Обозначим через D множество возможных начальных состояний процесса X_t (оно может состоять и из одной точки). Пусть $\mathcal{G} = \{G_p, p \in P \subset \mathbf{R}^1\}$ — однопараметрическое семейство областей в $\mathbf{R}^n$, $\tau_p = \inf\{t \geq 0: X_t \notin G_p\}$, $V_p(x) = V_{G_p}(x)$.

Функцию $F(p, x)$, заданную на $P \times D$, будем называть гранично-начальной, если $F(p, x) = V_p(x)$ для $p \in P$, $x \in G_p$. Отметим, что такие гранично-начальные функции всегда существуют и определяются не единственным образом.

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующее представление для функции $V_p(x)$:

$$V_p(x) = \begin{cases} F(p, x), & x \in G_p, \\ g(x), & x \notin G_p, \end{cases} \quad (8)$$

где $F(p, x)$ есть гранично-начальная функция.

Предполагается, что на границе множеств G_p имеет место «непрерывное склеивание»:

$$F(p, x) = g(x), \quad x \in \partial G_p. \quad (9)$$

Далее будем предполагать, что семейство областей G_p удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $G_{p_1} \subset G_{p_2}$ при $p_1 < p_2$ — монотонность;
- 2) каждая точка $x \in D$ принадлежит границе единственного множества из класса $\mathcal{G}$ (параметр этого множества будем обозначать через $q(x)$, так что $x \in \partial G_{q(x)}$) — «густота».

Условие непрерывного склеивания (9) с учетом свойства густоты для класса областей можно записать следующим образом:

$$F(q(x), x) = g(x) \quad \forall x \in D. \quad (10)$$

При выполнении указанных выше условий решение задачи максимизации $V_p(x)$ по p дается следующим утверждением.

Теорема 1. Пусть при $x \in D$ функция $F(p, x)$ имеет единственный максимум (по $p \in P$) в точке $p^*(x)$, и пусть $F(p, x)$ убывает по p при $p > p^*(x)$. Тогда $\max_{p \in P} V_p(x) = V_{p^*(x)}(x)$, т.е. $\tau_{p^*(x)}$ является оптимальным моментом остановки в задаче (1) по классу моментов остановки $\mathcal{M}(\mathcal{G})$.

Доказательство. Обозначим для краткости $p^* = p^*(x)$ и покажем, что $V_p(x) \leq V_{p^*}(x)$ при любых $p \in P$, $x \in D$. Рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $p < p^*$. Если $x \notin G_{p^*}$, то $x \notin G_p$ (в силу вложенности областей) и, значит, $V_p(x) = g(x) = V_{p^*}(x)$. Если $x \in G_{p^*}$ и $x \in G_p$, то $V_p(x) = F(p, x) \leq F(p^*, x) = V_{p^*}(x)$. Наконец, если $x \in G_{p^*}$ и $x \notin G_p$, то, используя (10), имеем: $V_p(x) = g(x) = F(q(x), x) \leq F(p^*, x) = V_{p^*}(x)$.

2) Пусть теперь $p > p^*$. Если $x \notin G_p$, то $x \notin G_{p^*}$ (в силу вложенности областей) и, следовательно, $V_p(x) = g(x) = V_{p^*}(x)$. Если $x \in G_p$ и $x \in G_{p^*}$, то $V_p(x) = F(p, x) \leq F(p^*, x) = V_{p^*}(x)$. В случае, когда $x \in G_p$ и $x \notin G_{p^*}$, нетрудно показать, что $p^* \leq q(x) < p$. Поэтому из монотонности $F(p, x)$ по p при $p > p^*$, а также из соотношения (10) имеем: $V_p(x) = F(p, x) \leq F(q(x), x) = g(x) = V_{p^*}(x)$.

Теорема полностью доказана.

Таким образом, при описанных выше предположениях проблема максимизации функции $V_p(x)$ по p , которая имеет «составную» структуру (см. (8)), сводится к максимизации более простой гранично-начальной функции $F(p, x)$. Примеры использования теоремы 1 будут приведены ниже.

В рамках вариационного подхода можно несколько иначе взглянуть на принцип «гладкого склеивания», который является одним из основных элементов при решении задачи Стефана со свободной границей.

Будем считать, что множество D открыто (в $\mathbf{R}^n$), выполнены общие предположения на семейство областей, сформулированные выше, и, кроме того, функции $F(p, x)$, $g(x)$, а также $q(x)$ (параметр области, граница которой проходит через точку x) дифференцируемы по всем переменным. Отметим, что гладкость функции $q(x)$ имеет место, например, в силу теоремы о неявной функции, когда границы областей ∂G_p задаются поверхностями вида $\{y \in \mathbf{R}^n: \Psi(p, y) = 0\}$, где $\Psi(p, y)$ непрерывно дифференцируема по (p, y) и $\Psi'_p(p, y)$ отлична от нуля.

Пусть $\bar{p}(x)$ есть стационарная точка функции $F(p, x)$ по p , т.е. $F'_p(\bar{p}(x), x) = 0$ ($x \in D$). Из условия (10) вытекает

$$F'_p(q(x), x) \operatorname{grad} q(x) + F'_x(q(x), x) = \operatorname{grad} g(x), \quad x \in D. \quad (11)$$

Поэтому если x лежит на границе области $G_{\bar{p}(x)}$, то $q(x) = \bar{p}(x)$ и

$$F'_x(\bar{p}(x), x) = \operatorname{grad} g(x), \quad x \in \partial G_{\bar{p}(x)}. \quad (12)$$

Это равенство можно рассматривать как вариант условия гладкого склеивания на границе множества, параметр которого является стационарной точкой функции $F(p, x)$.

Заметим, что множество точек x , для которых выполнено (12), может быть, вообще говоря, пустым. Рассмотрим случай, когда стационарные точки $\bar{p}(x) = \bar{p}$ не зависят от x . При этом множество тех x , где справедливо (12), заведомо непусто. Такая ситуация возникает, в частности, для рассматриваемых ниже геометрического броуновского движения и однородной функции выплат (функция $F(p, x)$ при этом представима в виде произведения функции от x и функции от p). Вводя функцию $\bar{F}(x) = F(\bar{p}, x)$, соотношение (12) можно записать в виде

$$\operatorname{grad} V_{\bar{p}}(x) = \operatorname{grad} \bar{F}(x) = \operatorname{grad} g(x), \quad x \in \partial G_{\bar{p}}. \quad (13)$$

Поскольку, как отмечалось выше, $\bar{F}(x)$ при $x \in G_{\bar{p}}$ является решением задачи Дирихле (6) в области $G_{\bar{p}}$, то соотношение (13) есть традиционное условие гладкого склеивания, и, следовательно, пара $(\bar{F}(x), G_{\bar{p}})$ является решением задачи Стефана (2)–(4). При этом $G_{\bar{p}}$ будет «кандидатом» на область оптимального продолжения. Если максимум функции $F(p, x)$ по p достигается в точке $p^* \in \operatorname{int} P$, то также выполнено условие гладкого склеивания (13) с $\bar{p} = p^*$.

Заметим, что если система областей $\{G_p\}$ выбрана так, что $\text{grad } q(x) \neq 0$ при $x \in D$, то, как видно из (11), условие гладкого склеивания (13) эквивалентно условию стационарности $F(p, x)$ (по p) в точке $\bar{p}$.

Функция F может иметь различные стационарные точки, причем не обязательно точки экстремума. В этом случае решение задачи Стефана существует, но может не давать решение задачи оптимальной остановки.

Примеры. 1. Рассмотрим одномерное геометрическое броуновское движение $dX_t = X_t(0.5 dt + dw_t)$, $X_0 = x$, или $X_t = x \exp\{w_t\}$ (w_t — стандартный винеровский процесс), функцию выплат $g(x) = (x-1)^3 + x^\delta$ ($\delta > 0$) при $x \geq 0$ и дисконт $\rho = \delta^2/2$. Отметим, что функция g является гладкой и монотонной при любом $\delta > 0$.

Пусть p^* — граничная точка оптимальной области продолжения наблюдений. В силу монотонности функции выплат в качестве неизвестной области продолжения будем рассматривать интервал $(0, p^*)$.

Задача Стефана для нахождения неизвестных функции $U(x)$ и границы p^* выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^2 U''(x) + \frac{1}{2} x U'(x) = \rho U(x), & 0 < x < p^*, \\ U(p^*) = g(p^*), \\ U'(p^*) = g'(p^*). \end{cases} \quad (14)$$

Ее исследование начнем со вспомогательной задачи Дирихле для нахождения функции $V_p(x) = \mathbf{E}^x g(X_{\tau_p}) e^{-\rho \tau_p}$, где $\tau_p = \min\{t \geq 0: X_t \geq p\}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^2 V''(x) + \frac{1}{2} x V'(x) = \rho V(x), & 0 < x < p, \\ V(p) = g(p). \end{cases} \quad (15)$$

Решением этой задачи является $V_p(x) = h(p) x^\delta$ ($0 < x < p$), где $h(p) = g(p) p^{-\delta} = (p-1)^3/p^\delta + 1$.

Условие гладкого склеивания $V_{p^*}'(p^*) = g'(p^*)$, как нетрудно понять, равносильно условию $p^* g'(p^*) = \delta g(p^*)$, или $h'(p^*) = 0$.

При $\delta \leq 3$ задача Стефана (14) имеет единственное решение: $U(x) = V_1(x) = x^\delta$, $p^* = 1$. Однако момент τ_1 выхода на уровень 1 не является оптимальным м.о., поскольку $V_p(x) \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ для любого $x > 0$.

Таким образом, решение задачи Стефана существует, в то время как задача оптимальной остановки не имеет решения.

При $\delta > 3$ задача Стефана (14) имеет два решения: $U(x) = V_1(x) = x^\delta$, $p^* = 1$ и $U(x) = V_{p_\delta}(x) = h(p_\delta) x^\delta$, $p^* = p_\delta = \delta/(\delta-3)$.

Отметим, что $V_{p_\delta}(x) > V_1(x)$ при $0 < x < p_\delta$. Можно показать (воспользовавшись, например, [7, теорема 3]), что момент выхода на границу p_δ будет оптимальным среди всех м.о. $\mathcal{M}$.

Таким образом, одно из решений задачи Стефана (с границей $p^* = 1$) не дает решение задачи оптимальной остановки (которое, в отличие от предыдущего примера, существует).

Подчеркнем, что в обоих примерах функции выплат являются монотонными и имеют одну и ту же стационарную точку.

Покажем, как работает теорема 1 на конкретных примерах.

2. Для описанного выше примера в качестве класса областей продолжения берем интервалы $(0, p)$, $p > 0$, а соответствующие моменты остановки равны $\tau_p = \min\{t \geq 0: X_t \geq p\}$. Из решения задачи Дирихле (15) видно, что в качестве гранично-начальной функции можно взять $F(p, x) = [(p-1)^3/p^\delta + 1]x^\delta$. Заметим, что при $\delta \leq 3$ функция $F(p, x)$ неограниченно возрастает по p при любом $x > 0$ и оптимального м.о. не существует. При $\delta > 3$ для любого $x > 0$ функция $F(p, x)$ достигает максимума по p в точке $p^* = p_\delta$ и выполняются все условия теоремы 1. Поэтому τ_{p_δ} будет оптимальным м.о. среди $\{\tau_p, p > 0\}$.

3. В работе [5] расчет рациональной стоимости «Русского опциона» был сведен к задаче оптимальной остановки (с линейной функцией выплат $g(x) = x$) для диффузионного процесса $(\psi_t, t \geq 0)$ с отражением, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\psi_t = -\psi_t(r dt + \sigma dw_t) + d\varphi_t,$$

где неотрицательный процесс $(\varphi_t, t \geq 0)$ растет лишь при попадании процесса $(\psi_t, t \geq 0)$ в граничную точку $\{1\}$. В качестве «упрощенного варианта» этой задачи в [5] предлагалось рассматривать максимизацию только по м.о. вида $\tau_p = \min\{t \geq 0: \psi_t \geq p\}$, $p > 1$.

Следуя приведенному в [5, формула (5.13)] выражению для $V_p(x) = \mathbb{E}^x \psi_{\tau_p} e^{-\rho \tau_p}$, в качестве гранично-начальной функции можно взять

$$F(p, x) = p \frac{\beta_2 x^{\beta_1} - \beta_1 x^{\beta_2}}{\beta_2 p^{\beta_1} - \beta_1 p^{\beta_2}}, \quad p \geq 1, \quad x \geq 1,$$

где β_1, β_2 — корни квадратного уравнения $\sigma^2 \beta^2 - (\sigma^2 + 2r)\beta - 2\rho = 0$ (причем $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$). Как легко убедиться, функция $F(p, x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а именно, для любого $x > 1$ она имеет единственный максимум в точке $p^* = [\beta_2(1 - \beta_1)/(\beta_1(1 - \beta_2))]^{1/(\beta_2 - \beta_1)}$ и убывает при $p > p^*$. Поэтому из теоремы 1 сразу вытекает оптимальность м.о. τ_{p^*} в классе м.о. $\{\tau_p, p > 1\}$.

3. Задача оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения с однородной функцией выплат. Покажем, как описанный выше подход работает для решения задачи оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения и однородной функции выплат. Такие задачи возникают, как уже

говорилось выше, в моделях выбора момента инвестирования проекта создания нового предприятия.

Рассмотрим двумерный процесс геометрического броуновского движения $X_t = (X_t^1, X_t^2)$, $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= X_t^1(\alpha_1 dt + \sigma_{11} dw_t^1 + \sigma_{12} dw_t^2), & X_0^1 &= x_1, \\ dX_t^2 &= X_t^2(\alpha_2 dt + \sigma_{21} dw_t^1 + \sigma_{22} dw_t^2), & X_0^2 &= x_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где (w_t^1, w_t^2) — двумерный винеровский процесс (с независимыми компонентами).

Пусть функция выплат $g(x_1, x_2)$ в (1) непрерывна и положительно однородна степени $m \geq 0$, т.е. $g(\lambda x) = \lambda^m g(x)$ для всех $\lambda > 0$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Начальные значения процесса будем считать принадлежащими области $D = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 > 0\}$, а в качестве областей продолжения наблюдений будем брать $G_p = \{(x_1, x_2) \in D: x_1 < px_2\}$, $p > 0$. При этом момент первого выхода процесса (16) из этой области, $\tau_p(x) = \min\{t \geq 0: X_t^1 \geq pX_t^2\}$, совпадает с моментом первого достижения процессом $\xi_t = X_t^1/X_t^2$ уровня p . Из явных формул для геометрического броуновского движения следует, что

$$\xi_t = \frac{x_1}{x_2} \exp \left\{ \left(\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \right) t + \sigma_1 \tilde{w}_t^1 - \sigma_2 \tilde{w}_t^2 \right\}, \quad (17)$$

где $\sigma_i^2 = \sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2$, а $\tilde{w}_t^i = (\sigma_{i1} w_t^1 + \sigma_{i2} w_t^2)/\sigma_i$ — стандартные винеровские процессы ($i = 1, 2$).

Отсюда видно, что момент $\tau_p(x)$ будет однородной (нулевой степени) функцией от $x = (x_1, x_2)$, т.е. $\tau_p(\lambda x) = \tau_p(x)$ для всех $\lambda > 0$, а при выполнении условия

$$\alpha_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) \geq \alpha_2 - \frac{1}{2}(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2) \quad (18)$$

$\tau_p(x)$ будет конечен п.н. при всех $x \in D$ и $p > 0$, поскольку винеровский процесс, как известно, достигает любых значений с вероятностью 1.

Далее, в силу свойства однородности X_t как функции от начального состояния и однородности функции g имеем:

$$\begin{aligned} V_p(\lambda x) &= \mathbf{E}^{\lambda x} e^{-\rho \tau_p(\lambda x)} g(X_{\tau_p(\lambda x)}) = \mathbf{E}^{\lambda x} e^{-\rho \tau_p(x)} g(X_{\tau_p(x)}) \\ &= \mathbf{E}^x e^{-\rho \tau_p(x)} g(\lambda X_{\tau_p(x)}) = \lambda^m V_p(x), \end{aligned}$$

т.е. $V_p(x)$ однородна степени m .

В области G_p будем представлять $V_p(x)$ в виде:

$$V_p(x_1, x_2) = x_2^m v_p(y), \quad \text{где } y = \frac{x_1}{x_2}, \quad v_p(y) = V_p(y, 1), \quad 0 < y < p.$$

Поскольку инфинитезимальный оператор процесса (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}u(x) = & \alpha_1 x_1 u'_{x_1} + \alpha_2 x_2 u'_{x_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 u''_{x_1 x_1} \\ & + (\sigma_{11} \sigma_{21} + \sigma_{12} \sigma_{22}) x_1 x_2 u''_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 u''_{x_2 x_2}, \end{aligned}$$

где σ_1, σ_2 определены в (17), эллиптическое уравнение в задаче Дирихле (6) для $V_p(x)$ превращается в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $v_p(y)$ (для краткости будем обозначать ее $v(y)$):

$$\frac{1}{2} y^2 v''(y) \tilde{\sigma}^2 + y v'(y) \left(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{m-1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) - v(y)(\rho - \bar{\alpha}_2 m) = 0, \quad (19)$$

где $\bar{\alpha}_i = \alpha_i + \frac{1}{2}(m-1)\sigma_i^2$ ($i = 1, 2$), $\tilde{\sigma}^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{21})^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{22})^2$.

Любое решение уравнения (19) при $0 < y < p$ имеет вид $v(y) = C_1 y^{\beta_1} + C_2 y^{\beta_2}$, где β_1, β_2 суть корни квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \beta(\beta-1) + \left(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{m-1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) \beta - (\rho - \bar{\alpha}_2 m) = 0. \quad (20)$$

Предположим, что

$$\rho > \max(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) m. \quad (21)$$

Тогда нетрудно вывести, что в уравнении (20) один из корней положителен, а другой — отрицателен. Будем, для определенности, считать, что $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$.

Возвращаясь к исходной функции, имеем

$$V_p(x_1, x_2) = C_1 x_1^{\beta_1} x_2^{m-\beta_1} + C_2 x_1^{\beta_2} x_2^{m-\beta_2} \quad \text{при } 0 < x_1 < p x_2, \quad x_2 > 0. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что при всех $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2$ выполнено неравенство $|g(x_1, x_2)| \leq C(x_1^m + x_2^m)$, где $C = 2^m \max_{0 \leq y \leq 1} |g(y, 1-y)|$. Отсюда следует оценка

$$|V_p(x_1, x_2)| \leq C \max_{\tau} \mathbf{E}^x [(X_{\tau}^1)^m + (X_{\tau}^2)^m] e^{-\rho \tau},$$

где максимум берется по всем марковским моментам τ . Стандартные мартингаловые рассуждения дают, что при выполнении условия (21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x (X_{\tau}^1)^m e^{-\rho \tau} &= x_1^m \mathbf{E} \exp \left\{ -(\rho - \bar{\alpha}_1 m) \tau + \sigma_1 m \tilde{w}_{\tau}^1 - \frac{\sigma_1^2 m^2 \tau}{2} \right\} \\ &\leq x_1^m \mathbf{E} \exp \left\{ \sigma_1 m \tilde{w}_{\tau}^1 - \frac{\sigma_1^2 m^2 \tau}{2} \right\} = x_1^m, \end{aligned}$$

поскольку процесс $M_t = \exp\{\sigma_1 m \tilde{w}_t^1 - \sigma_1^2 m^2 t / 2\}$ является мартингалом, а $M_0 = 1$. Аналогично, $\mathbf{E}^x(X_\tau^2)^m e^{-\rho\tau} \leq x_2^m$. Следовательно, $|V_p(x_1, x_2)|$ ограничен сверху функцией $C(x_1^m + x_2^m)$.

Теперь, учитывая ограниченный рост (по x) функции $V_p(x_1, x_2)$, нетрудно показать, что $C_2 = 0$ в представлении (22). Постоянная C_1 в (22) находится из граничного условия в задаче Дирихле (6): $V_p(px_2, x_2) = C_1 x_2^m p^{\beta_1} = g(px_2, x_2) = x_2^m g(p, 1)$, т.е. $C_1 = g(p, 1) p^{-\beta_1}$.

Таким образом, в качестве гранично-начальной функции $F(p, x)$ в представлении (8) для рассматриваемой задачи оптимальной остановки можно взять

$$F(p, x) = h(p) x_1^{\beta_1} x_2^{m-\beta_1}, \quad h(p) = g(p, 1) p^{-\beta_1}. \quad (23)$$

Заметим, что точка максимума $F(p, x)$ по p совпадает с точкой максимума функции $h(p)$, т.е. не зависит от x .

Отметим, что класс областей $\{G_p, p > 0\}$ удовлетворяет требованиям монотонности и густоты, предъявляемым в п. 2 к областям продолжения, а τ_p являются м.о. Класс таких м.о. будем обозначать $\mathcal{M}^0 = \{\tau_p, p > 0\}$. Таким образом, из теоремы 1 для задачи оптимальной остановки двумерного процесса (16) и однородной (степени m) функции выплат вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (18), (21), $\tilde{\sigma} > 0$, а p^* есть единственная точка (абсолютного) максимума функции $h(p)$, определенной в (23), причем $h(p)$ убывает при $p > p^*$. Тогда $\tau^* = \min\{t \geq 0: X_t^1 \geq p^* X_t^2\}$ является оптимальным м.о. в классе $\mathcal{M}^0$.

Как оказывается, класс «областей продолжения» в этой задаче выбран «удачно» и м.о. τ^* (описанный в теореме 2) оказывается при некоторых дополнительных предположениях оптимальным и в классе всех м.о.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, $g \in C^2(\mathbf{R}_+^2)$, $p^* > 0$ есть единственная точка (абсолютного) максимума функции $h(p)$ и для $f(p) = g(p, 1)$

$$f'(p) p^{-\beta_1+1} \quad \text{убывает при} \quad p > p^*. \quad (24)$$

Тогда

$$\tau^* = \min\{t \geq 0: X_t^1 \geq p^* X_t^2\}$$

является оптимальным моментом остановки в классе всех моментов остановки $\mathcal{M}$.

Для доказательства оптимальности м.о. τ^* в классе $\mathcal{M}$ мы воспользуемся «верификационной теоремой», основанной на методе вариационных неравенств. Приведем ее в необходимом для нас виде.

Будем обозначать $\mathbf{R}^x$ распределение процесса X_t (в пространстве траекторий) с начальной точкой $X_0 = x$.

Верификационная теорема (см. [13], [15]). Предположим, что существует функция $\Phi: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^1$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\Phi \in C^1(\mathbf{R}_+^n)$, $\Phi \in C^2(\mathbf{R}_+^n \setminus \partial\Gamma)$; здесь и далее $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}_+^n: \Phi(x) > g(x)\}$;
- 2) $\partial\Gamma$ является графиком локально липшицевой функции и $\mathbf{E}^x \int_0^\infty \chi_{\partial\Gamma}(X_t) dt = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}_+^n$;
- 3) $\Phi(x) \geq g(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}_+^n$;
- 4) $\mathbf{L}\Phi = \rho\Phi$ для $x \in \Gamma$;
- 5) $\mathbf{L}\Phi \leq \rho\Phi$ для $x \in \mathbf{R}_+^n \setminus \bar{\Gamma}$ ($\bar{\Gamma}$ — замыкание множества Γ);
- 6) $\bar{\tau} = \inf\{t \geq 0: X_t \notin \Gamma\} < \infty$ п.н. (по мере $\mathbf{P}^x$) для всех $x \in \mathbf{R}_+^n$;
- 7) семейство $\{g(X_\tau)e^{-\rho\tau}, \tau \leq \bar{\tau}\}$ равномерно интегрируемо (по мере $\mathbf{P}^x$) для всех $x \in \Gamma$.

Тогда $\bar{\tau}$ является оптимальным м.о. в задаче (1) по всем м.о., а $\Phi(x)$ — соответствующей оптимальной функцией выигрыша.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим на $\mathbf{R}_+^2$ функцию

$$\Phi(x_1, x_2) = V_{p^*}(x_1, x_2) = \begin{cases} h(p^*) x_1^{\beta_1} x_2^{m-\beta_1}, & x_1 < p^* x_2, \quad x_2 > 0, \\ g(x_1, x_2), & x_1 \geq p^* x_2, \end{cases} \quad (25)$$

и проверим, что она удовлетворяет всем условиям верификационной теоремы.

Так как $h(p^*) > h(p)$ при $p \neq p^*$, то на множестве $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2: x_1 < p^* x_2\}$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= h(p^*) x_1^m x_2^{m-\beta} > h\left(\frac{x_1}{x_2}\right) x_2^m \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\beta_1} \\ &= x_2^m g\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = g(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (26)$$

(последнее равенство следует из однородности функции g).

Отсюда следует, что $\Phi(x) \geq g(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}_+^2$ (т.е. выполнено условие 3)) и $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}_+^2: \Phi(x) > g(x)\} = \{x_1 < p^* x_2\}$. Таким образом, $\partial\Gamma = \{(x_1, x_2): x_1 = p^* x_2\}$.

Требуемые в условии 1) свойства гладкости функции Φ следуют из ее определения, гладкости функции g и условия первого порядка для максимума функции $h(p)$: $h'(p^*) = 0$.

Условие 2) верификационной теоремы вытекает из свойств геометрического броуновского движения, а условие 4) — непосредственно из построения функции $\Phi(x) = F(p^*, x)$ как решения задачи Дирихле.

Далее, из условия (18) вытекает, что $\bar{\tau} = \inf\{t \geq 0: X_t \notin \Gamma\} = \inf\{t \geq 0: X_t^1 \geq p^* X_t^2\} < \infty$ п.н. для всех $x \in \mathbf{R}_+^2$.

Покажем, что из (21) вытекает условие 7) верификационной теоремы. Поскольку $X_\tau^1 \leq p^* X_\tau^2$ при $\tau \leq \bar{\tau}$, то

$$g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \leq \Phi(X_\tau) e^{-\rho\tau} = h(p^*)(X_\tau^2)^m \left(\frac{X_\tau^1}{X_\tau^2} \right)^{\beta_1} e^{-\rho\tau} \leq C(X_\tau^2)^m e^{-\rho\tau},$$

где $C = h(p^*)(p^*)^{\beta_1}$. Далее, из явного представления процесса X_t^2 (см. (16)) для любого k имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x [g(X_\tau) e^{-\rho\tau}]^k &\leq C^k x_2^{mk} \mathbf{E} \exp \left\{ \left[-\rho\tau + m \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) \tau + \sigma_2 \tilde{w}_\tau^2 \right] k \right\} \\ &= C^k x_2^{mk} \mathbf{E} \exp \left\{ - \left[\rho - \bar{\alpha}_2 m - \frac{1}{2} \sigma_2^2 (k-1) m \right] k\tau \right. \\ &\quad \left. + k\sigma_2 m \tilde{w}_\tau^2 - \frac{1}{2} k^2 \sigma_2^2 m^2 \tau \right\}. \end{aligned}$$

Если k выбрано таким образом, что $k > 1$ и $\rho - \bar{\alpha}_2 m - \frac{1}{2} \sigma_2^2 (k-1) m^2 \geq 0$, то из мартингальности процесса $M_t = \exp \{ k\sigma_2 m \tilde{w}_t^2 - \frac{1}{2} k^2 \sigma_2^2 m^2 t \}$, $t \geq 0$, и того, что $M_0 = 1$, получаем:

$$\mathbf{E}^x [g(X_\tau) e^{-\rho\tau}]^k \leq C^k x_2^{mk} \mathbf{E} \exp \left\{ k\sigma_2 m \tilde{w}_\tau^2 - \frac{1}{2} k^2 m^2 \sigma_2^2 \tau \right\} = C^k x_2^{mk}.$$

Отсюда вытекает равномерная интегрируемость семейства $\{g(X_\tau) e^{-\rho\tau}, \tau \leq \bar{\tau}\}$.

Остается проверить выполнение условия 5) верификационной теоремы. Пусть $x = (x_1, x_2) \notin \bar{\Gamma}$. В этом случае $q(x) = x_1/x_2 > p^*$,

$$\Phi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = x_2^m f(q(x))$$

и, как нетрудно вывести,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}g(x) - \rho g(x) &= x_2^m \left[\frac{1}{2} q^2(x) f''(q(x)) \tilde{\sigma}^2 + q(x) f'(q(x)) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{m-1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) - f(q(x))(\rho - \bar{\alpha}_2 m) \right]. \end{aligned}$$

Условие (24) равносильно неравенству

$$p f''(p) \leq (\beta_1 - 1) f'(p) \quad \text{при } p > p^*. \quad (27)$$

Интегрируя обе части последнего неравенства от p^* до p , нетрудно получить, что для $p > p^*$

$$p f'(p) \leq p^* f'(p^*) + \beta_1 [f(p) - f(p^*)] = \beta_1 f(p), \quad (28)$$

поскольку $h'(p^*) = 0$. Используя неравенства (27), (28) и тот факт, что β_1 есть положительный корень уравнения (20), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Lg(x) - \rho g(x)}{x_2^m} &= \frac{1}{2} p^2 f''(p) \tilde{\sigma}^2 + p f'(p) \left(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{m-1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) \\ &\quad - f(p)(\rho - \bar{\alpha}_2 m) \\ &\leq \frac{1}{2} p^2 f''(p) \tilde{\sigma}^2 + p f'(p) \left(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{m-1}{2} \tilde{\sigma}^2 - \frac{\rho - \bar{\alpha}_2 m}{\beta_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} p^2 f''(p) \tilde{\sigma}^2 - p f'(p) \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 (\beta_1 - 1) \\ &= \frac{1}{2} p \tilde{\sigma}^2 [p f''(p) - (\beta_1 - 1) f'(p)] \leq 0, \end{aligned}$$

где $p = q(x) > p^*$ вне области $\bar{\Gamma}$.

Таким образом, все условия верификационной теоремы выполнены, следовательно, $\bar{\tau} = \inf\{t \geq 0: X_t^1 \geq p^* X_t^2\} = \tau^*$ является оптимальным моментом остановки в задаче (1) по всем м.о. Теорема 3 доказана.

Приведем следствие этой общей теоремы для линейной функции выплат $g(x_1, x_2)$ [13]. Именно этот случай и возникает в классической задаче выбора оптимального момента инвестирования (см. [11], [12]).

Следствие. Пусть $g(x_1, x_2) = c_1 x_1 - c_2 x_2$ ($c_1, c_2 > 0$), $\tilde{\sigma} > 0$, выполнено условие (18) и $\rho > \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда оптимальным моментом остановки в задаче (1) по всем м.о. $\mathcal{M}$ является $\tau^* = \min\{t \geq 0: X_t^1 \geq p^* X_t^2\}$, где $p^* = c_2 c_1^{-1} \beta(\beta - 1)^{-1}$, а β есть положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \beta(\beta - 1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \beta - (\rho - \alpha_2) = 0.$$

Как нетрудно убедиться, в этом случае мы имеем $f(p) = g(p, 1) = c_1 p - c_2$, максимум функции $h(p) = (c_1 p - c_2) p^{-\beta}$ достигается при $p^* = c_2 c_1^{-1} \beta(\beta - 1)^{-1}$ и выполнены все условия теоремы 3.

З а м е ч а н и е. Гранично-начальная функция $F(p, x)$ для задачи с линейной функцией выплат $g(x_1, x_2) = c_1 x_1 - c_2 x_2$ ($c_1, c_2 > 0$) имеет вид $F(p, x) = (c_1 p - c_2) p^{-\beta} x_1^\beta x_2^{m-\beta}$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

4. Выбор оптимального момента инвестирования при наличии налоговых льгот. Задача оптимальной остановки с нелинейной однородной функцией выплат возникает в модели поведения инвестора, желающего вложить средства в создание нового предприятия при наличии налоговых льгот. В этой модели предполагается, что:

— решение об инвестировании принимается на основе наблюдаемой информации о рыночных ценах на затрачиваемые ресурсы и выпускаемую продукцию, носящей стохастический характер;

— в каждый момент времени инвестор может либо принять решение об инвестировании, либо отложить это решение до получения новой информации;

— инвестиции являются мгновенными и необратимыми, т.е. все инвестиции делаются в один момент времени и после этого уже не могут быть изъяты из проекта и использованы для других целей.

Пусть $\tau \geq 0$ есть момент инвестирования, а I_τ — объем инвестиций, необходимых для создания предприятия в момент τ , $\pi_{\tau+t}^\tau$ — поток прибыли предприятия, $D_{\tau+t}^\tau$ — поток амортизационных отчислений, уменьшающих налоговую базу (в момент $\tau + t$, $t \geq 0$). При этом денежный поток предприятия в момент $\tau + t$ равен $\pi_{\tau+t}^\tau - \gamma(\pi_{\tau+t}^\tau - D_{\tau+t}^\tau) = (1 - \gamma)\pi_{\tau+t}^\tau + \gamma D_{\tau+t}^\tau$, где γ — ставка налога на прибыль.

Типичная льгота при создании новых предприятий — предоставление налоговых каникул (по налогу на прибыль) на срок окупаемости (payback period) ν_τ :

$$\nu_\tau = \inf \left\{ \nu \geq 0: \mathbf{E} \left(\int_0^\nu \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt \mid \mathcal{F}_\tau \right) \geq I_\tau \right\} \quad (29)$$

(если инфимум не достигается, полагаем $\nu_\tau = \infty$).

Ожидаемая прибыль предприятия, приведенная к моменту инвестирования τ , равна

$$V_\tau = \mathbf{E} \left(\int_0^{\nu_\tau} \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt + \chi_\tau \int_{\nu_\tau}^\infty [(1 - \gamma)\pi_{\tau+t}^\tau + \gamma D_{\tau+t}^\tau] e^{-\rho t} dt \mid \mathcal{F}_\tau \right), \quad (30)$$

где χ_τ — индикаторная функция множества $\Omega_\tau = \{\omega: \nu_\tau < \infty\}$.

Цель инвестора — выбрать такой момент инвестирования (момент остановки), чтобы ожидаемый чистый приведенный доход от создаваемой фирмы (Net Present Value, NPV) был максимальным:

$$\mathbf{E}(V_\tau - I_\tau) e^{-\rho \tau} \rightarrow \max_\tau, \quad (31)$$

где максимизация производится по всем моментам остановки $\tau \in \mathcal{M}$.

Предположим, что процесс *прибыли* ($\pi_{\tau+t}^\tau$, $t, \tau \geq 0$) описывается как $\pi_{\tau+t}^\tau = \pi_{\tau+t} \xi_{\tau+t}^\tau$, $t, \tau \geq 0$, где $(\pi_t, t \geq 0)$ — геометрическое броуновское движение:

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha_1 dt + \sigma_1 dw_t^1) \quad (\pi_0 > 0, \sigma_1 > 0), \quad t \geq 0,$$

w_t^1 — винеровский процесс, а $(\xi_{\tau+t}^\tau, t \geq 0)$ — семейство неотрицательных диффузионных процессов, однородных по τ , определяемых стохастическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \xi_{\tau+t}^\tau &= 1 + \int_\tau^{\tau+t} a(s - \tau, \xi_s^\tau) ds + \int_\tau^{\tau+t} b_1(s - \tau, \xi_s^\tau) dw_s^1 \\ &\quad + \int_\tau^{\tau+t} b_2(s - \tau, \xi_s^\tau) dw_s^2, \quad t, \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где w_t^2 — винеровский процесс, независимый от w_t^1 , а функции $a(t, x)$, $b_1(t, x)$, $b_2(t, x)$ удовлетворяют стандартным условиям, обеспечивающим существование и единственность сильного решения (см., например, [15, гл. 5]). Процесс π_t связан с внешними (рыночными) ценами на производимую продукцию и затрачиваемые ресурсы, а процесс $\xi_{\tau+t}^\tau$ отражает внутреннюю (производственную) неопределенность, возникающую в ходе деятельности предприятия.

Будем предполагать, что $\mathbf{E}\pi_{\tau+t} < \infty$ для всех $t, \tau \geq 0$.

Объем необходимых инвестиций I_t моделируется геометрическим броуновским движением:

$$dI_t = I_t(\alpha_2 dt + \sigma_{21} dw_t^1 + \sigma_{22} dw_t^2) \quad (I_0 > 0), \quad t \geq 0,$$

где винеровский процесс w_t^3 независим от w_t^1 и w_t^2 , а $\sigma_{21} \geq 0$, $\sigma_{22} > 0$.

Поток амортизационных отчислений в момент $t + \tau$ будем представлять в виде $D_{\tau+t}^\tau = I_\tau a_t$, $t \geq 0$, где $(a_t, t \geq 0)$ «плотность амортизации», т.е. неотрицательная функция $a: \mathbf{R}_+^1 \rightarrow \mathbf{R}_+^1$ такая, что $\int_0^\infty a_t dt = 1$.

Для получения явных формул нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Для всех $t \geq 0$ и моментов остановки τ

$$\mathbf{E}(\pi_{\tau+t}^\tau | \mathcal{F}_\tau) = \pi_\tau B_t, \quad \text{где } B_t = (\pi_0)^{-1} \mathbf{E}(\pi_t \xi_t^0). \quad (33)$$

Доказательство. В силу строго марковского свойства процессы $\hat{w}_t^i = w_{\tau+t}^i - w_\tau^i$, $t \geq 0$ ($i = 1, 2$) будут винеровскими, не зависящими от $\mathcal{F}_\tau$. Из явного представления геометрического броуновского движения следует, что $\pi_{\tau+t}^\tau = \pi_\tau \Pi_{\tau+t}^\tau$, где $\Pi_{\tau+t}^\tau = \exp\{(\alpha_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 \hat{w}_t^1\} \xi_{\tau+t}^\tau$.

Из однородности семейства (32) по τ следует, что процесс $\xi_{\tau+t}^\tau$ совпадает (п.н.) с единственным сильным решением уравнения

$$\xi_t = 1 + \int_0^t a(s, \xi_s) ds + \int_0^t b_1(s, \xi_s) d\hat{w}_s^1 + \int_0^t b_2(s, \xi_s) d\hat{w}_s^2.$$

Поскольку $(\xi_t, t \geq 0)$ не зависит от $\mathcal{F}_\tau$, таким же будет и процесс $\Pi_{\tau+t}^\tau$. Более того, для каждого $t \geq 0$ величина $\Pi_{\tau+t}^\tau$ имеет такое же распределение, как $\exp\{(\alpha_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 \hat{w}_t^1\} \xi_t$ и, значит, как $(\pi_t/\pi_0) \xi_t^0$. Следовательно, $\mathbf{E}(\pi_{\tau+t}^\tau | \mathcal{F}_\tau) = \pi_\tau \mathbf{E}\Pi_{\tau+t}^\tau = \pi_\tau \mathbf{E}(\pi_t \xi_t^0)/\pi_0$. Лемма доказана.

Выведем теперь формулу для приведенной прибыли предприятия (30).

Если $\omega \in \Omega_\tau$, то из (33) с учетом (29) имеем:

$$\begin{aligned} V_\tau &= I_\tau + (1 - \gamma) \mathbf{E} \left(\int_0^\infty \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt - \int_0^{\nu_\tau} \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt \middle| \mathcal{F}_\tau \right) + \gamma I_\tau A(\nu_\tau) \\ &= I_\tau [1 + \gamma A(\nu_\tau)] - (1 - \gamma) \left(I_\tau - \pi_\tau \int_0^\infty B_t e^{-\rho t} dt \right) \\ &= \gamma I_\tau [1 + A(\nu_\tau)] + (1 - \gamma) \pi_\tau B, \end{aligned} \quad (34)$$

где $B = \int_0^\infty B_t e^{-\rho t} dt$ (предполагается, что $B < \infty$), а $A(\nu) = \int_\nu^\infty a_t e^{-\rho t} dt$, $\nu \geq 0$.

Если $\omega \notin \Omega_\tau$ (т.е. $\nu_\tau = \infty$), то

$$V_\tau = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt \middle| \mathcal{F}_\tau \right) = \pi_\tau B. \quad (35)$$

Если $\omega \in \Omega_\tau$, то из определения срока окупаемости (29) и формулы (33) следует, что

$$I_\tau = \mathbf{E} \left(\int_0^{\nu_\tau} \pi_{\tau+t}^\tau e^{-\rho t} dt \middle| \mathcal{F}_\tau \right) = \pi_\tau \int_0^{\nu_\tau} B_t e^{-\rho t} dt. \quad (36)$$

Определим далее функцию $\nu(\cdot)$ как

$$\nu(p) = \inf \left\{ \nu > 0: \int_0^\nu B_t e^{-\rho t} dt \geq p^{-1} \right\}, \quad p > 0 \quad (37)$$

(если инфимум не достигается, то полагаем $\nu(p) = \infty$).

Тогда соотношение (36) означает, что $\nu_\tau = \nu(\pi_\tau/I_\tau)$ при $\omega \in \Omega_\tau$. Более того, $\Omega_\tau = \{\nu_\tau < \infty\} = \{\nu(\pi_\tau/I_\tau) < \infty\}$.

Таким образом, из (34) и (35) вытекает следующая формула для приведенной прибыли предприятия (30):

$$V_\tau = \begin{cases} \gamma I_\tau \left(1 + A \left(\nu \left(\frac{\pi_\tau}{I_\tau} \right) \right) \right) + (1 - \gamma) \pi_\tau B, & \text{если } \nu \left(\frac{\pi_\tau}{I_\tau} \right) < \infty, \\ \pi_\tau B, & \text{если } \nu \left(\frac{\pi_\tau}{I_\tau} \right) = \infty. \end{cases}$$

Теперь проблема выбора оптимального момента инвестирования (31) сводится к следующей задаче оптимальной остановки для двумерного геометрического броуновского движения (π_t, I_t) :

$$\mathbf{E} g(\pi_\tau, I_\tau) e^{-\rho \tau} \rightarrow \max_{\tau \in \mathcal{M}} \quad (38)$$

с однородной (первой степени) функцией выплат

$$g(\pi, I) = (1 - \gamma)(\pi B - I) + \gamma I A \left(\nu \left(\frac{\pi}{I} \right) \right),$$

где B , $\nu(\cdot)$, $A(\cdot)$ определены выше (формально полагаем $A(\infty) = 0$).

Легко показать, что если τ^* есть оптимальный м.о. в задаче (38) и $\nu(\pi_{\tau^*}/I_{\tau^*}) < \infty$ (п.н.), то τ^* является оптимальным моментом остановки в задаче (31).

Пусть β есть положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \beta (\beta - 1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \beta - (\rho - \alpha_2) = 0, \quad \tilde{\sigma}^2 = (\sigma_1 - \sigma_{21})^2 + \sigma_{22}^2.$$

Тогда из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Предположим, что $a_t, B_t \in C^1(\mathbf{R}_+)$ и выполнены условия теоремы 3. Тогда оптимальным моментом инвестирования в задаче (31) является $\tau^* = \min\{t \geq 0: \pi_t \geq p^* I_t\}$, где p^* есть корень уравнения*

$$\beta(1 - \gamma) + \frac{\gamma a_{\nu(p)}}{p B_{\nu(p)}} = (1 - \gamma)(\beta - 1)pB + \beta \gamma A(\nu(p)).$$

Более простую версию этой модели и доказательство оптимальности момента τ^* , не опирающееся на теорему 3, можно найти в [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
2. Алиев А. Ф. О принципе гладкого склеивания в $\mathbf{R}^n$. — Успехи матем. наук, 2007, т. 62, № 4, с. 147–148.
3. Ширяев А. Н. О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. М.: МИАН, 2007, 78 с. (Соврем. проблемы матем., № 8.)
4. Gerber H. U., Shiu E. S. W. Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks. — Math. Finance, 1996, v. 6, № 3, p. 303–322.
5. Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Новый взгляд на расчеты «Русского опциона». — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 130–149.
6. Arkin V., Slastnikov A., Shevtsova E. Tax incentives for investment projects in Russian economy. Working Paper № 99/03. Moscow: EERC, 1999.
7. Alvarez L. H. R. Reward functionals, salvage values, and optimal stopping. — Math. Methods Oper. Res., 2001, v. 54, № 2, p. 315–337.
8. Arkin V. I., Slastnikov A. D. Optimal stopping problems and investment models. — Dynamic Stochastic Optimization. Berlin: Springer, 2004, p. 83–98.
9. Аркин В. И., Слостников А. Д., Аркина С. В. Инвестирование в условиях неопределенности и задачи оптимальной остановки. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, № 1, с. 3–33.
10. Новиков А. А., Ширяев А. Н. Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 373–382.
11. McDonald R., Siegel D. The value of waiting to invest. — Quart. J. Econom., 1986, v. 101, p. 707–727.
12. Dixit A. K., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton Univ. Press, 1994.
13. Hu Y., Øksendal B. Optimal time to invest when the price processes are geometric Brownian motions. — Finance Stoch., 1998, v. 2, № 3, p. 295–310.
14. Arkin V. I., Slastnikov A. D. Optimal time to invest under tax exemptions. — From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. Berlin: Springer, 2006, p. 17–32.
15. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003.

Поступила в редакцию
21.XI.2007

Исправленный вариант
12.II.2008